Sofia osorio Echeverry A00365139 Abril 29/2021

Ecuaciones Diferenciales

Ejercicios. Sección 3.1

27. Por hipotesis y_p satisface $y_p'' + Py_p' + qy_p = f(x)$

y por segunda hipotesis y_c satisface $y_c'' + Py_c' + qy_c = 0$

entonces la tesis establece que $y(x) = y_c + y_p$

satisface $y'' + Py + qy = f(x)$; tenemos que

$y' = y_c' + y_p' \to y'' = y_c'' + y_p''$ reemplazando en

la ecuación: $(y_c'' + y_p'') + p(y'_c + y'_p) + q(y_c + y_p) = f(x)$

$\to y_c'' + y_p'' + py_c' + Py_p' + qy_c + qy_p =$

$\to (y_c'' + Py_c' + qy_c) + (y_p'' + Py_p' + qy_p) =$

usando la hipotesis : $0 + f(x) =$

$f(x) =$

32. a) el wronskiano de las dos soluciones

$\omega(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ $\omega = y_1 y_2' - y_1' y_2$

$\to d\omega/dx = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - (y_1'' y_2 + y_1' y_2')$

$d\omega/dx = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$

Asi que : $A(x)\, d\omega/dx = A(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) = Ay_1 y_2'' - Ay_1'' y_2$

$= y_1 A y_2'' - A y_1'' y_1$ ①

ahora bien como y_1 y y_2 satisfacen la ecuación diferencial

$$A(x)y'' + B(x)y' + P(x)y = 0$$

$A(x)y'' = -B(x)y' - P(x)y$; con lo cual $A(x)y_1'' = -B(x)y_1' - P(x)y_1$

$$A(x)y_2'' = -B(x)y_2' - P(x)y_2$$

reemplazando la expresión en ①

$$A(x)\, dw/dx = y_1(-B(x)y_2' - P(x)y_2) - (-B(x)y_1' - P(x)y_1)y_2$$

$$A(x)\, dw/dx = -B(x)y_1y_2' - \cancel{P(x)y_1y_2} + B(x)y_1'y_2 + \cancel{P(x)y_2y_1}$$

$$A(x)\, dw/dx = B(x)(-y_1y_2' + y_1'y_2)$$

$$A(x)\, dw/dx = -B(x)(y_1y_2' - y_1'y_2) \rightarrow A(x)\, dw/dx = -B(x)w(x)$$

punto B. Si $A(x) \neq 0$ $\quad dw/dx = -B(x)/A(x)\; w(x)$

$$\int dw/w = \int -\frac{B(x)}{A(x)}\,dx \rightarrow \ln w = -\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx + C$$

$$e^{\ln w} = e^{-\int B(x)/A(x)\,dx} = e^{-\int B(x)/A(x)\,dx} \cdot e^{c}$$

$$w(x) = k e^{-\int B(x)/A(x)\,dx}$$

Sección 3.2 → Ejercicios: 19, 23, 31, 35, 36, 42

19. $x^3 y^{(3)} - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ $\quad y(1) = 6$

$y'(1) = 14$

$y''(1) = 22$

→ Ecuación de Euler

$x^3 y^{(3)} - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ con P.V.I

→ sabemos que $y_1 = x$; $y_2 = x^2$; $y_3 = x^3$

son soluciones L.I de la ecuación homogenea.

→ $y(x) = Ax + bx^2 + Cx^3$ solución general de la edo euler homogenea de orden 3.

· Pero tenemos P.V.I

→ $y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3$ → $A + B + C = 6$

→ $y'(x) = A + 2Bx + 3Cx^2$ → $A + 2B + 3C = 14$

→ $y''(x) = 2B + 6Cx$ → $2B + 6C = 22$

→ Se usa W.A → $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$

Solución Particular a la E.D.O de euler de grado tres homogenea es:

$y(x) = x + 2x^2 + 3x^3$

23. $y'' - 2y' - 3y = 6$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$

$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$; $y_p = -2$

→ Solución general de una EDO de orden superior NO Homogenea $y'' - 2y' - 3y = 6$

es $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ → Solución Particular

↳ es la solución general de la E.D.O homogenea asociada $y'' - 2y' - 3y = 0$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 2$$ → esta solución general que satisface el P.V.I

$y(0) = 3$

$y'(0) = 11$

$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 2 \to y(0) = 3 \to C_1 + C_2 - 2 = 3$

$y'(x) = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x} \to y'(0) = 11 \to -C_1 + 3C_2 = 11$

$$\to \begin{array}{r} C_1 + C_2 = 5 \\ -C_1 + 3C_2 = 11 \quad + \\ \hline 4C_2 = 16 \\ C_2 = 4 \end{array}$$

→ Reemplazo en la primera ecuación

$C_1 + 4 = 5$

$C_1 = 1$

→ obtenemos que: la solución al P.V.I de la ecuación NO Homogenea

$$y'' - 2y' - 3y = 6 \quad \text{es} \quad y(x) = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$$

→ Ejercicio 31.

a) La ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + Py' + qy = 0 \quad (1)$$

admitira una solución $y = y(x)$ en un intervalo I, si tenemos el P.V.I en el punto $x = a \in I$; entonces (1) puede pensarse como una ecuación que satisface para $\forall x \in I$:

$$y''(x) + Py'(x) + qy(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

- si $x = a \in I$: $y''(a) + Py'(a) + qy(a) = 0$ (2)

pero esta ecuación relaciona las tres cantidades $y(a)$, $y'(a)$ y $y''(a)$. Pues P y q son coef fijos

→ de las tres cantidades $y(a)$, $y'(a)$ y $y''(a)$
la ecuación (2) asegura que $y''(a)$ se expresa
en terminos de las otras dos

$$y''(a) = -p\,y'(a) - q\,y(a).$$

b. $y'' - 2y' - 5y = 0$ podemos suponer que existe solución $y(x)$ que satisface

$$y(0) = 1 \;;\; y'(0) = 0 \;\text{y}\; y''(0) = C$$

→ en $x = 0$ $y(0)$ debe cumplir dichas condiciones por la E.D.O

$$: y''(0) - 2y'(0) - 5\cdot y(0) = 0$$

$$y''(0) = 2y'(0) + 5y(0)$$

$$C = 2(0) + 5(1) = 5$$

→ Entonces el P.V.I $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = C$ — Solo podra satisfacerse por la solucion $y(x)$ si y solo si $C = 5$

Ejercicio # 42

$$(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \qquad (-1 < x < 1) : \; y_1(x) = x$$

→ $(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ Sabiendo que $y_1(x) = x$ es solución en $(-1, 1)$

$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - 2y = 0$$

→ Suponemos que

$\{ y_2(x) = v(x)\cdot y_1(x) = v(x)\cdot x$ será la segunda solución $\}$

L.I $(v(x) \neq C)$: $y_2'(x) = v'(x) \cdot x + v(x) \cdot 1$

$$y_2''(x) = v''(x) \cdot x + v'(x) \cdot 1 + v(x) = v''(x)x + 2v'(x)$$

$$\rightarrow y_2''(x) + \frac{2x}{1-x^2} y_2'(x) - \frac{2}{1-x^2} y_2(x) = 0$$

$$\cdot \ (v''(x) \cdot x + 2v'(x)) + \frac{2x}{1-x^2}(v'(x) \cdot x + v(x)) - \frac{2}{1-x^2} v(x) \cdot x = 0$$

$$\rightarrow (v''(x) \cdot x + 2v'(x)) + \frac{2x}{1-x^2}(v'(x) \cdot x + v(x)) - \frac{2}{1-x^2} v(x) \cdot x = 0$$

$$\rightarrow x v''(x) + 2v'(x) + \frac{2x^2}{1-x^2} v'(x) + \cancel{\frac{2x\, v(x)}{1-x^2}} - \cancel{\frac{2x}{1-x^2} v(x)} = 0$$

$$\rightarrow x v''(x) + \left(2 + \frac{2x^2}{1-x^2}\right) \cdot v'(x) = 0$$

$$\rightarrow v''(x) + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) \cdot v'(x) = 0$$

- hacemos cambio de variable $u(x) = v'(x) \rightarrow u'(x) = v''(x)$ reemplazando esto en la ecuación anterior:

$$\cdot \ \frac{du}{dx} + \left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) u = 0$$

$$\cdot \ \frac{du}{dx} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) u$$

$$\cdot \ \frac{du}{u} = -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) dx$$

$$\rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -\left(\frac{2}{x} + \frac{2x}{1-x^2}\right) dx$$

$$\ln u = -2\ln|x| + \ln|1-x^2|$$

$$\ln u = \ln|x|^{-2} + \ln|1-x^2| = \ln|x^{-2}(1-x^2)|$$

Continuación

$$\ln\left| x^{-2}(1-x^2)\right| \quad y \text{ como } \quad -1 < x < 1$$

$\ln u = \ln(x^{-2}(1-x^2))$

$e^{\ln u} = e^{\ln(x^{-2}(1-x^2))}$ $\rightarrow$ $u(x) = x^{-2}(1-x^2) = x^{-2}-1$

pero $v'(x) = x^{-2}-1$

$v(x) = \int x^{-2}-1 \, dx$

$v(x) = -x^{-1}-x$

$\rightarrow$ $y_2(x) = v(x)\cdot x = (-x^{-1}-x)\cdot x = -1-x^2$

$y_2(x) = -(1+x^2)$

Por lo tanto la solución general

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2(-(1+x^2))$

$y(x) = C_1 y_1(x) + b_2(1+x^2)$

Ejercicios sección 3.3 → 19, 39, 42, 55, 58

Ejercicio 19. Resolver la E.D.O

$$y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$$

- como la ecuación diferencial es lineal y de orden superior, con coeficientes constantes y homogénea

→ La ecuación auxiliar es $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

$$\to r^2(r+1) - (r+1) = 0$$

$$\to (r+1)(r-1)(r+1) = 0$$

$$\to (r+1)^2 \cdot (r-1) = 0$$

→ las raices de la ecuación auxiliar son $r_1 = 1$

$$r_2 = r_3 = -1$$

multiplicidad $k = 2$

→ la solución general $y(x) = C_1 e^{1 \cdot x} + C_2 e^{-1 \cdot x} + C_3 x e^{-1} x$

Ejercicio # 39

$$y(x) = (A + Bx + Cx^2) e^{2x}$$

$$y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2 e^{2x}$$ por el teorema 2

las raices de la ecuación auxiliar son $r = 2$; multiplicidad $k = 3$

→ ecuación auxiliar $(r-2)(r-2)(r-2) = 0$

$$(r-2)^3 = 0$$

$$\to r^3 - 3r^2 \cdot 2 + 3r \cdot 2^2 - 2^3 = 0$$

$$\to r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$$

→ Entonces la E.D.O de orden superior lineal homogénea de coef. constantes

Sería → $y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

42. $y(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos 2x + (D + Ex + Fx^2)\,\text{sen}\,2x$

$y(x) = A\cos 2x + Bx\cos 2x + Cx^2\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x + Ex\,\text{sen}\,2x + Fx^2\,\text{sen}\,2x$

$y(x) = [A\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x] + x[B\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x] + x^2[C\cos 2x + F\,\text{sen}\,2x]$

$y(x) = e^{0.x}[A\cos 2x + D\,\text{sen}\,2x] + e^{0.x}x[B\cos 2x + E\,\text{sen}\,2x] + e^{0.x}x^2[C\cos 2x + F\,\text{sen}\,2x]$

pore el teorema 4 ; las raices de la ecuacion auxiliar son

$\to r = 0 \pm 2i$

ó

$r = 0 + 2i$

$r = 0 - 2i$

la multiplicada $k = 3$

la ecuación aux :

$\to [(r - (0+2i))(r - (0-2i))]^3 = 0$

$[((r-0) - 2i)((r-0) + 2i)]^3 = 0$

$[(r-0)^2 - (2i)^2]^3 = 0$

$[r^2 - 4i^2]^3 = 0$

$[r^2 + 4]^3 = 0$

$i = \sqrt{-1}$

$\to i^2 = -1$

$\to (r^2)^3 + 3(r^2)^2 \cdot 4 + 3(r^2)4^2 + 4^3 = 0$

$r^6 + 12r^4 + 48r^2 + 64 = 0$

Entonces la E.d.O de orden superior, lineal homogenea de coef. constantes sería:

$$y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0$$