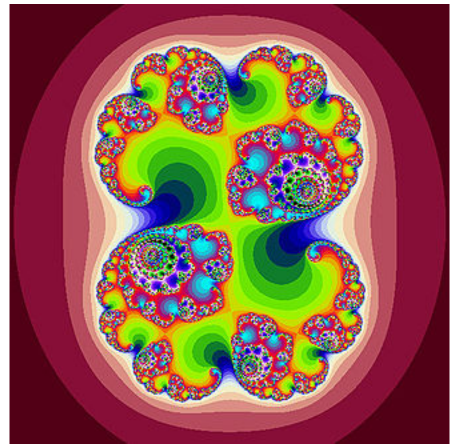
VIQUIPÈDIA
L'enciclopèdia lliure

Conjunt de Julia

Un **conjunt de Julia** és una forma fractal definida sobre el pla complex. Rep el seu nom del matemàtic Gaston Julia.[1] Donada una iteració del pla complex sobre si mateix (una aplicació que transforma punts del pla complex en punts del pla complex), el conjunt de Julia d'aquest sistema es pot definir com el conjunt de punts per als quals els punts propers no presenten un comportament similar sota l'acció repetida de la iteració. En altres paraules, per a cada nombre complex z del pla complex construïm la següent successió:



Conjunt de Julia per a *c* = (0.285, 0.01i)

$$z_0 = z$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

si aquesta successió és fitada, llavors z pertany al conjunt de Julia de paràmetre complex c, que anomenem com J_c; en cas contrari, z no pertany al conjunt de Julia.

A la imatge de la dreta, els punts negres pertanyen al conjunt (punts on el polinomi per $z = x + iy$ tendeix a infinit quan n tendeix a infinit) i els de color no. Els colors donen una indicació de la velocitat amb la qual la successió divergeix: en vermell fosc, al cap de poques iteracions ja se sap que el punt no està en el conjunt; en blanc, la divergència és molt més lenta. Com no es poden calcular infinits valors, és necessari posar un límit, i decidir que si els p primers termes de la successió estan fitats, el punt pertany al conjunt; en augmentar el valor de p es millora la precisió de la imatge.

D'altra banda, se sap que els punts la distància dels quals a l'origen és superior a 2 (és a dir, $x^2 + y^2 > 4$) no pertanyen al conjunt. Per tant, n'hi ha prou amb trobar un sol terme de la successió que verifiqui $|z_n| > 2$ per tenir la certesa que c no està en el conjunt. Existeix una relació molt forta entre els conjunts de Julia i el conjunt de Mandelbrot denotat per M, a causa de la similitud de les seves definicions. Si c pertany a M, llavors J_c és connex; en cas contrari, J_c està format per una infinitat de punts aïllats repartits de forma fractal (pols de Cantor). Els conjunts de Julia més complexos són aquells on c es troba just a la frontera de M.

Els conjunts de Julia i de Fatou són complementaris. De manera informal, el **conjunt de Fatou** d'una funció consisteix en valors amb la propietat que tots els valors propers es comporten de manera similar al repetir la iteració de la funció, i el conjunt de Julia consisteix en valors tals que una pertorbació arbitràriament petita pot causar canvis dràstics en la seqüència de la funció iterada. Per tant, el comportament de la funció dins del conjunt de Fatou és regular, mentre que al conjunt de Julia el seu comportament és caòtic. El conjunt de Fatou rep el seu nom del matemàtic Pierre Fatou.[2]

Polinomis de Julia

Tot i que actualment el conjunt de Julia s'associa la aquesta versió simple del polinomi,

$$z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

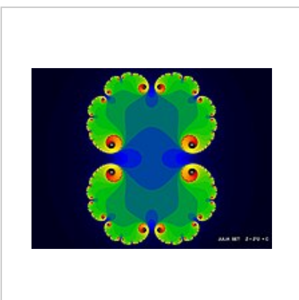
a Julia li interessaven les propietats iteratives de la següent expressió més general:[3]

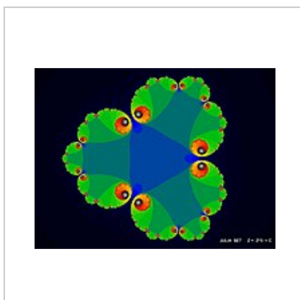
$$z_{n+1} = z_n^4 + \frac{z_n^3}{z_n - 1} + \frac{z_n^2}{(z_n^3 + 4z_n^2 + 5)} + c.$$

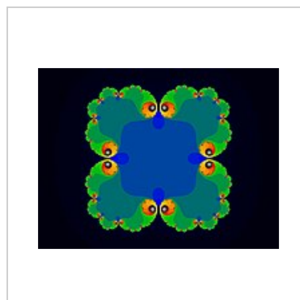
En el sentit més ampli, la forma exacta de la funció iterada pot ser qualsevol funció, essent la forma general $z_{n+1} = f(z_n)$. Sorgeixen conjunts especialment interessants amb funcions no lineals, com per exemple:[4]

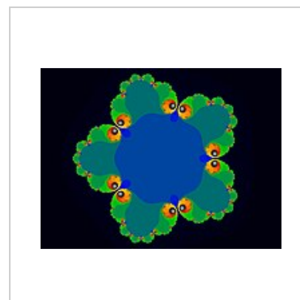
$$z_{n+1} = c\sin(z_n) \qquad z_{n+1} = c\exp(z_n)$$
$$z_{n+1} = c\,i\cos(z_n) \qquad z_{n+1} = c\,z_n\,(1 - z_n)$$

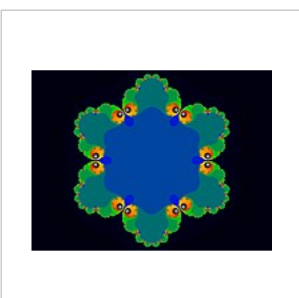
Exemples de conjunts de Julia

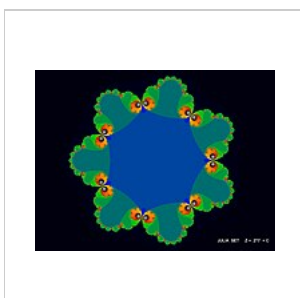

$f(z) = z^2 + 0.279$

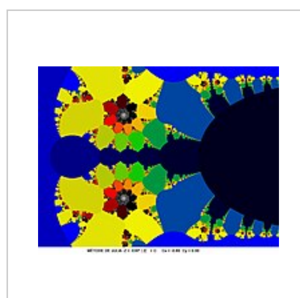

$f(z) = z^3 + 0.400$


$f(z) = z^4 + 0.484$

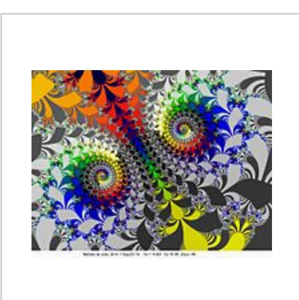

$f(z) = z^5 + 0.544$


$f(z) = z^6 + 0.590$

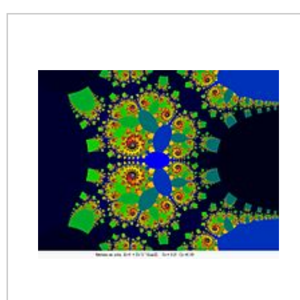

$f(z) = z^7 + 0.626$

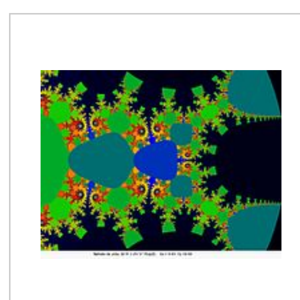

$f(z) = \exp(z) - 0.65$

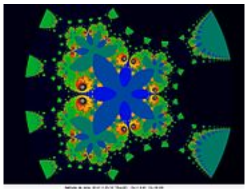

$f(z) = \exp(z^3) - 0.59$


$f(z) = \exp(z^3) - 0.621$


$f(z) = z * \exp(z) + 0.04$

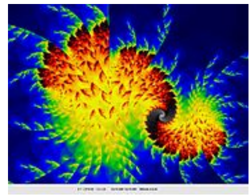

$f(z) = z^2 * \exp(z) + 0.21$


$f(z) = z^3 * \exp(z) + 0.33$

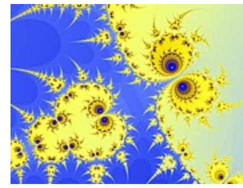


f(z) = z^4 * exp(Z) + 0.41

f(z) = Sqrt[Sinh(z²)] + (0.065,0.122i)



f(z) = [(z²+z)/Ln(z)] +(0.268,0.060i)



f(z) = Cosh(Z) +(-0.45,0.00i)

f(z) = Sin(Z) +(4.0,0.88i)

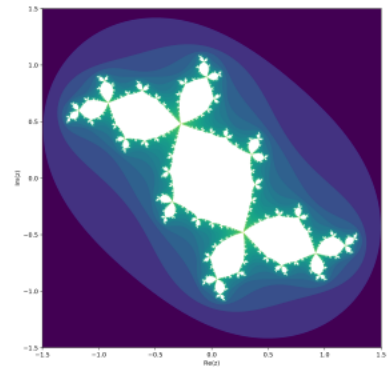
Definició formal

Podem definir $f(z)$ com una funció holomorfa no constant de l'esfera de Riemann cap a ella mateixa. Concretament, aquesta correspon a les funcions racionals complexes, és a dir, $f(z) = p(z)/q(z)$ on $p(z)$ i $q(z)$ són polinomis complexes. Assumint que p i q no tenen arrels comunes i almenys un d'ells té un grau major que 1, llavors hi ha un nombre finit de conjunts oberts, anomenats **dominis de Fatou**, que es mantenen invariants per $f(z)$, i són tals que la unió d'aquests conjunts és densa al pla i $f(z)$ es comporta de forma similar en cadascun d'ells. Aquesta última propietat significa que els extrems de les seqüències d'iteracions generades pels punts del conjunt són o bé exactament el mateix conjunt, essent llavors un cicle finit, o bé són cicles finits de conjunts circulars o anulars que es troben concentrats. En el primer cas el cicle és *atractor*, i en el segon és *neutre*.

Si entre el grau de $p(z)$ i $q(z)$ hi ha almenys dos graus de diferència, cada domini de Fatou té almenys un punt crític de $f(z)$, és a dir, un punt on $f(z) = \infty$ o bé $f'(z) = 0$. Si tots els punts crítics són preperiòdics, és a dir, no són periòdics però eventualment acaben en un cicle periòdic, llavors el conjunt de Julia de la funció correspon a tota l'esfera; en cas contrari és un conjunt dens no numerable i sense punts interiors, i de la mateixa cardinalitat que els nombres reals.

Si bé als dominis de Fatou el cicle és *atractor* o *neutre*, en el cas dels dominis de Julia és *repel·lent*, és a dir, $|f(z) - f(w)| > |z - w|$ per tota w del domini, el que significa que $f(z)$ es comporta caòticament en el conjunt. Tot i que hi ha punts en el conjunt de Julia amb seqüència d'iteracions finita, només hi ha un nombre comptable d'aquests punts corresponents a una part infinitessimal del conjunt. En tots els altres punts del conjunt, les seqüències generades es comporten caòticament, un fenomen anomenat caos determinista.

Tipus de conjunts de Fatou



Conill de Douady.

Hi ha hagut una àmplia investigació sobre el conjunt de Fatou i el conjunt de Julia de funcions racionals iterades, conegudes com a **mapes racionals**. Per exemple, se sap que el conjunt de Fatou d'un mapa racional té 0, 1, 2 o infinitament molts components.[5] Cadascun d'aquests components es pot classificar en quatre categories: punt periòdic atractor, component parabòlic, disc de Siegel o anell de Herman.[6]

El **disc de Siegel**, en honor de Carl Ludwig Siegel, és un component connectat del conjunt de Fatou on la dinàmica de $f(z)$ es conjuga analíticament amb una rotació irracional del disc unitari complex.[7] El teorema de Siegel demostra l'existència de discs de Siegel per nombres irracionals que satisfan una condició forta d'irracionalitat (una condició diofàntica). Més tard, Alexander Brjuno va millorar aquesta condició de la irracionalitat, ampliant-la als nombres de Brjuno.[8]

L'**anell de Herman** és un component on la funció racional es conjuga conjuntament amb una rotació irracional de l'anell estàndard.[8][9]

Conill de Douady

El **conill de Douady**, descobert per Adrien Douady, és qualsevol dels diferents conjunts de Julia plens particulars associats amb el paràmetre proper al període central del conjunt de Mandelbrot per a un mapa quadràtic complex.[10]

Conjunt de Julia quaternari

Conjunt de Julia quaternari.

Els **conjunts de Julia quaternaris** es creen mitjançant el mateix principi que el conjunt de Julia tradicional, tret que utilitzen un nombre complex c de 4 dimensions en lloc d'un de només 2 dimensions. Si bé en el cas tradicional podem definir $c = (A, Bi)$ on A, B són nombres reals i $i^2 = -1$, en el conjunt de Julia quaternari tenim que $c = (A, Bi, Cj, Dk)$ on A, B, C, D són nombres reals però la interacció entre i, j, k és més complexa:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$\begin{array}{lll} ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Igual que amb els conjunts de Julia tradicionals en 2 dimensions que estan connectats o no en funció de la constant c, el mateix s'aplica als conjunts de Julia quaternaris.[11] Com que el resultat es tracta d'un espai de quatre dimensions, és problemàtica la representació completa d'un conjunt de Julia quaternari. Tot i això, és possible visualitzar la intersecció d'aquest conjunt de Julia amb un hiperplà en tres dimensions.

Multi-fractal de Julia

Un **multi-fractal de Julia** és un sistema de funcions iterades que parteix de la forma general del conjunt de Julia, però amb components d'atzar addicionals:

$$z_{n+1} = R_n \begin{cases} f(z_n), & \text{si } r_n > 1/2 \\ q(z_n), & \text{si } r_n \leq 1/2 \end{cases}$$

on r_n és una distribució uniforme contínua d'atzar entre 0 i 1, R_n és 1 o bé -1, amb probabilitats iguals, i $f(z_n)$ i $q(z_n)$ són dos polinomis de Julia similars, on sovint la única diferència és el valor de *c*. En essència, r_n serveix per seleccionar entre dues possibles constants, i el llindar de $1/2$ pot ser modificat per obtenir diferents efectes, mentre que R_n tria amb igualtat de probabilitat entre dues arrels.[12]

Vegeu també

- Conjunt de Mandelbrot

Referències

1. Gaston Julia (1918) "Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 8, pages 47–245.
2. Pierre Fatou (1917) "Sur les substitutions rationnelles", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, vol. 164, pages 806–808 and vol. 165, pages 992–995.
3. Paul Bourke. «Julia Set Fractal (2D) (http://paulbourke.net/fractals/juliaset/)», 2001. [Consulta: 2 gener 2021].
4. Paul Bourke. «Julia set of sin(z) (http://paulbourke.net/fractals/sinjulia/)», 1998, exemples actualitzats el 2019. [Consulta: 2 gener 2021].
5. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Teorema 5.6.2.
6. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Teorema 7.1.1.
7. Rubén Berenguel and Núria Fagella *An entire transcendental family with a persistent Siegel disc, 2009 preprint: arXiV:0907.0116 (https://arxiv.org/abs/0907.0116)*
8. Milnor, John W. *Dynamics in One Complex Variable*. 160. Third. Princeton University Press, 2006. (First appeared in 1990 as a Stony Brook IMS Preprint (http://www.math.sunysb.edu/preprints.html) Arxivat (https://web.archive.org/web/20060424085751/http://www.math.sunysb.edu/preprints.html) 2006-04-24 a Wayback Machine., available as arXiV:math.DS/9201272 (http://www.arxiv.org/abs/math.DS/9201272).)
9. Herman, Michael-Robert «Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations (http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1979__49__5_0)». *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 49, 1979, p. 5–233. ISSN: 1618-1913 (https://www.worldcat.org/issn/1618-1913).
10. "Julia Sets and the Mandelbrot Set (http://math.bard.edu/belk/math323/NotesJuliaMandelbrot.pdf) Arxivat (https://web.archive.org/web/20160807114151/http://math.bard.edu/belk/math323/NotesJuliaMandelbrot.pdf) 2016-08-07 a Wayback Machine.", *Math.Bard.edu*.
11. Paul Bourke. «Quaternion Julia Fractals (http://paulbourke.net/fractals/quatjulia/)», 2001. [Consulta: 2 gener 2021].

12. Paul Bourke & Chris Thomasson. «Multi Julia Iterated Function System (IFS) (http://paulbourke.net/fractals/multijulia/)», 2019. [Consulta: 2 gener 2021].

Bibliografia

- Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer 1993
- Alexander Bogomolny, "Mandelbrot Set and Indexing of Julia Sets (http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Algebra/JuliaIndexing.shtml)" a *cut-the-knot*.
- Evgeny Demidov, "The Mandelbrot and Julia sets Anatomy (http://ibiblio.org/e-notes/MSet/Contents.htm)" (2003)
- Alan F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer 1991, ISBN 0-387-95151-2

A Wikimedia Commons (https://commons.wikimedia.org/wiki/P%C3%A0gina_principal?uselang=ca) hi ha contingut multimèdia relatiu a: ***Conjunt de Julia***