즐거운 미적분학

교과서 112쪽	속도와 가속도	학번 이름	학습 확인

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t),\qquad a(t)=\frac{dv}{dt}=f''(t)$$

문제1. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 다음과 같을 때, 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하시오.

(1) $x=t+\ln(t+1)$

위치 $x=t+\ln(t+1)$

속도 $x'=1+\frac{1}{t+1}$ $\quad x'(1)=\frac{3}{2}$

가속도 $x''=\frac{-1}{(t+1)^2}$ $\quad x''(1)=-\frac{1}{4}$

(2) $x=e^t\sin t$

위치 $x=e^t\cdot\sin t$

속도 $x'=e^t\cdot\cos t+e^t\cdot\sin t$, $x'(1)=e(\cos1+\sin1)$

가속도 $x''=2\cdot e^t\cdot\cos t$, $x''(1)=2e\cdot\cos1$

속도와 가속도

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 시각 t에서의 점 P의 속도, 속력, 가속도, 가속도의 크기는 다음과 같다.

1. 속도: $(v_x, v_y)=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(f'(t), g'(t))$

2. 속력: $\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}$

3. 가속도: $(a_x, a_y)=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(f''(t), g''(t))$

4. 가속도의 크기: $\sqrt{{a_x}^2+{a_y}^2}=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\{f''(t)\}^2+\{g''(t)\}^2}$

문제2. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가

$x=t^3-t^2$, $y=t^2+2t$ 일 때, 시각 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하시오

위치 $(t^3-t^2,\ t^2+2t)$

속도 $(3t^2-2t,\ 2t+2)\xrightarrow{t=1\text{ 대입하면}}(1, 4)$

가속도 $(6t-2,\ 2)\xrightarrow{t=1\text{ 대입하면}}(4, 2)$

문제3. 어떤 자전거의 앞바퀴 위에 점 P를 표시하고 자전거를 타고 직선 도로를 달렸다. 점 P가 수평 방향으로 움직인 거리를 x, 수직 방향으로 올라간 거리를 y라고 할 때, 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)를 $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ 라고 하자. 시각 $t=\pi$에서의 점 P의 속력과 가속도의 크기를 각각 구하시오.

위치 $(t-\sin t,\ 1-\cos t)$

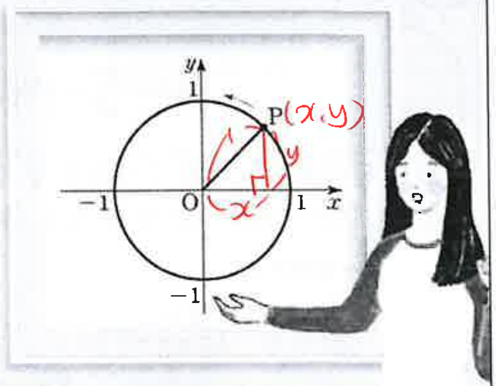
속도 $(1-\cos t,\ \sin t)\xrightarrow{t=\pi\text{ 대입}}(1-\cos\pi, \sin\pi)=(2, 0)\xrightarrow{\text{속도의 크기}}\sqrt{2^2+0^2}=2$

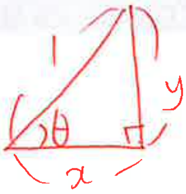
가속도 $(\sin t,\ \cos t)\xrightarrow{t=\pi\text{ 대입}}(0, -1)\xrightarrow{\text{가속도의 크기}}\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

생각과 표현

문제 해결 | 추론 | 창의·융합 | 의사소통

좌표평면 위에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 P가 점 (1, 0)을 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 매초 3라디안만큼 움직인다고 할 때, 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하고, 구한 과정을 친구들에게 설명해 보자.





$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$ 이므로 $P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$ 이다.

$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$

1초후 즉 $t=1$일때 $P(\cos 3, \sin 3)$

$t=2$일때 $P(\cos 6, \sin 6)$

⋮

t일때 $P(\cos 3t, \sin 3t)$: 점 P의 위치 미분

$(-3\sin 3t, 3\cos 3t)$ 속도 미분

$(-9\cos 3t, -9\sin 3t)$ 가속도