

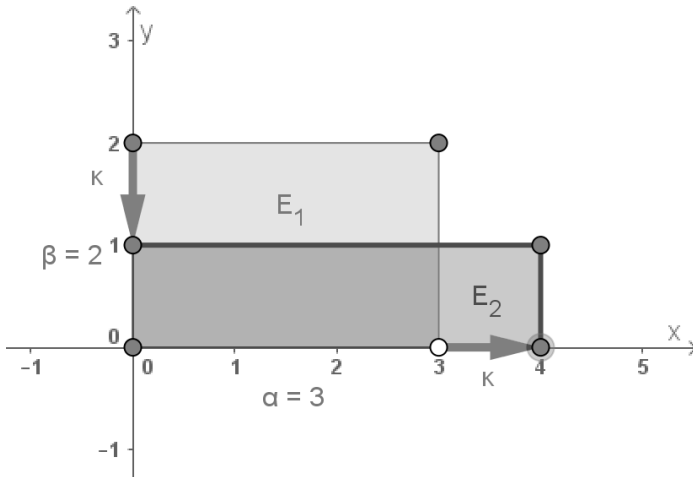
Φύλλο Εργασίας

αιτιολογία από /ή για ερμηνεία
στο μαθηματικό συλλογισμό με τη διαμεσολάβηση DGEs

Φύλλο Εργασίας	Ερευνητική Διδασκαλία	• Θέμα: ποια ανταλλαγή είναι η πιο συμφέρουσα;
	Τάξη	• Β΄Λυκείου
	Ομάδα	• Α Β Γ Δ Ε
	Εκπρόσωποι Ομάδας	• 1. • 2.

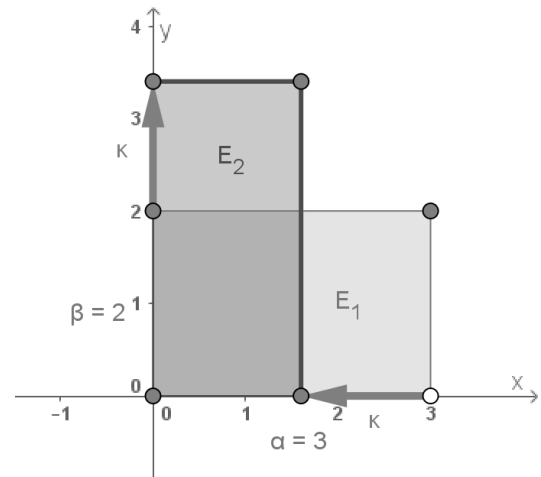
Μ. Τσιλιρίδης
Μάρτιος 2017

Ο ιδιοκτήτης μιας έκτασης E_1 σχήματος ορθογωνίου, μήκους $\alpha=3$ ($\times 10^2$ m) και πλάτους $\beta=2$ ($\times 10^2$ m) θα πρέπει να παραχωρήσει ένα τμήμα αυτής της έκτασης στο Δήμο της περιοχής ώστε να ανοιχθεί δρόμος που θα περνάει μέσα από αυτή. Η συμφωνία μεταξύ τους αφορούσε στο να μειωθεί μία από τις δύο διαστάσεις κατά κ μέτρα και να αυξηθεί η άλλη διάσταση επίσης κατά κ μέτρα. Αυτό μπορούσε να γίνει με δύο εναλλακτικούς τρόπους που φαίνονται στα σχήματα 1 & 2.



Νότιο – Ανατολική μεταβολή

σχ.1



Βόρειο - Δυτική μεταβολή

σχ.2

1^ο στάδιο (χωρίς τη χρήση του e-δομήματος)

A. Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης σας προσλαμβάνει ως σύμβουλο ώστε να του προτείνετε ένα από τα 2 είδη μεταβολής. Ποιο είδος μεταβολής θα τον συμβουλευάτε να επιλέξει προκειμένου να πάρει έκταση ίση με την αρχική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2ο στάδιο (χρήση του e-δομήματος)

Ανοίξτε το e-δόμημα MSC_emathisis.ggb. Σε αυτό υπάρχει ο δρομέας κ από τον οποίο μεταβάλλονται το μήκος α και το πλάτος β του ορθογωνίου E_1 κατά $\alpha \pm \kappa$, $\beta \mp \kappa$ αντίστοιχα.

- E1.** Ανοίξτε τους διακόπτες [P] και [T] και δώστε κίνηση στο δρομέα κ από το διακόπτη κάτω αριστερά. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες από το σημείο $P(\kappa, f(\kappa))$ με $f(\kappa) = (3 + \kappa)(2 - \kappa)$ και το σημείο $T(\kappa, g(\kappa))$ με $g(\kappa) = (3 - \kappa)(2 + \kappa)$.

Συμπληρώστε τα κενά και τις επιλογές στον παρακάτω πίνακα όπου N-A είναι η νότιο-ανατολική μεταβολή και B-Δ η βόρειο-δυτική :

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
$f(\kappa)=6$	$\kappa = \dots, \dots$	<input type="checkbox"/> N-A	<input type="checkbox"/> B-Δ
$g(\kappa)=6$	$\kappa = \dots, \dots$	<input type="checkbox"/> N-A	<input type="checkbox"/> B-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το “Είδος μεταβολής” που επιλέξατε:

E2. Με ανοικτούς τους διακόπτες [P] και [Σ] δώστε κίνηση στο δρομέα κ. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες των σημείων $P(\kappa, f(\kappa))$ και $\Sigma(\kappa, E_2)$ που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού E_2 συναρτήσει των τιμών του κ.

I. Ποια συνάρτηση φαίνεται να παριστάνει το γράφημα των σημείων $\Sigma(\kappa, E_2)$;

II. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;

Τιμές του κ:

Δικαιολογήστε τώρα αλγεβρικά την απάντησή σας:

Διορθώστε τώρα τις τιμές του δρομέα κ ώστε οι καμπύλες των σημείων P και Σ να ταυτίζονται (δεξί κλικ στο δρομέα κ, Ιδιότητες & Δρομέας).

3ο στάδιο (διατύπωση εικασίας)

Υποθέστε τώρα ότι στις διαπραγματεύσεις του Ιδιοκτήτη με το Δήμο, του προσφέρθηκε η δυνατότητα να ανταλλάξει την έκταση E_1 με έκταση μεγαλύτερου εμβαδού από τη δική του, μεταβάλλοντας πάλι το μήκος και το πλάτος με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο ερώτημα.

Σε αυτό το στάδιο εξετάζουμε την περίπτωση αν είναι δυνατό ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική και σε καταφατική περίπτωση με ποιον τρόπο μεταβολής του αρχικού εμβαδού. Εργαστείτε μόνο με το μοντέλο $f(\kappa)$ για το εμβαδόν E_2 .

E3. Από το γράφημα των σημείων P, βρείτε τις τιμές του κ ώστε $E_2 > 6$.

Τιμές του κ:

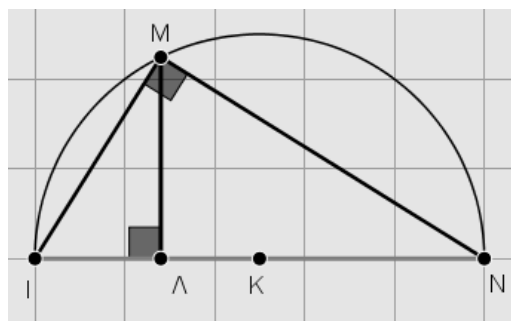
Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:

E4. Ανοίξτε το διακόπτη “1^η Αναπαράσταση”. Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου $IN=IA+AN$ όπου: $IA=AB$ και $AN=OA$.

Τότε σε κάθε θέση του σημείου Λ, για το ύψος ΜΛ του ορθογωνίου τριγώνου IMN θα ισχύει:

$$ML^2 = IA \cdot AN$$

Μπορείτε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω στοιχεία ώστε να εξετάσετε αν και πότε μεγιστοποιείται το εμβαδόν E_2 ;



Αναπτύξτε εδώ το σκεπτικό σας

E5. Από τα ευρήματα της προηγούμενης ερώτησης, διατυπώστε παρακάτω κάποιον ισχυρισμό που φαίνεται να ισχύει σχετικά με τα εμβαδά ορθογωνίων όπως του E_2 :

4^ο στάδιο: Απόδειξη ισχυρισμού

E6. 1. Αν συμβολίσουμε με x και γ τις διαστάσεις του ορθογωνίου E_2 , δείξτε ότι το σύστημα :

$$(\Sigma): \begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases} \text{ είναι ισοδύναμο με την εξίσωση } -x^2 + 5x - E_2 = 0$$

II. Ανοίξτε το διακόπτη $\rho(x)$. Σχηματίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής $\rho(x)=-x^2 + 5x - E_2$.

Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ . Τί παρατηρείτε για τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα x καθώς μεταβάλλεται το κ και από ποια σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά αυτή η παρατήρηση;

E7. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν $x=y=2.5$;

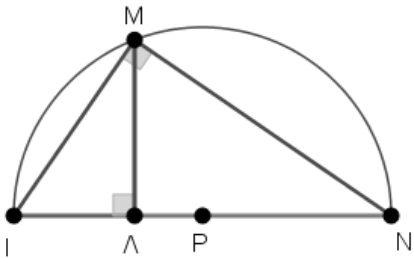
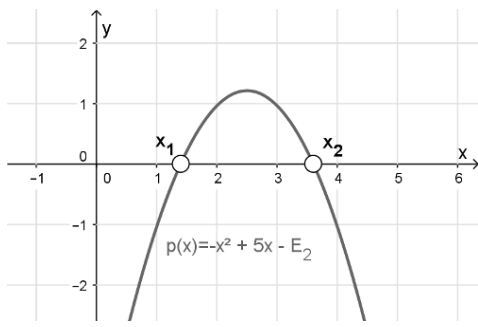
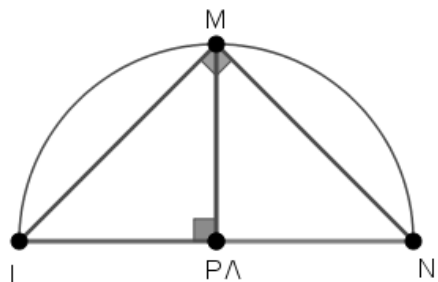
E8. Τελικά ποια λύση θα προτείνατε στον Ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το Δήμο της περιοχής του;

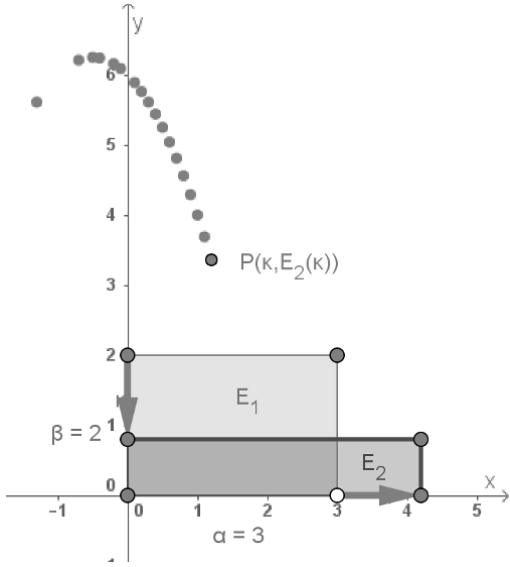
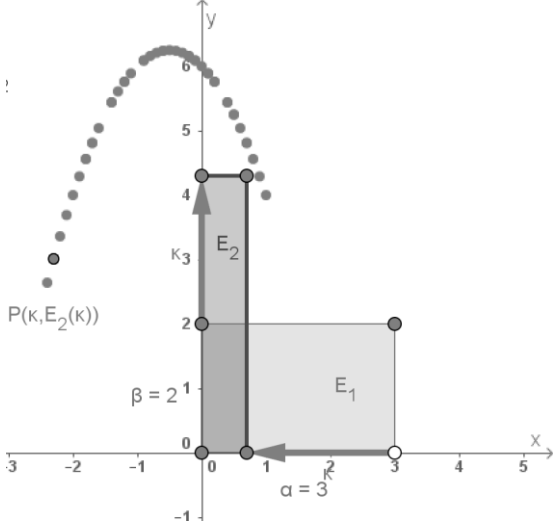
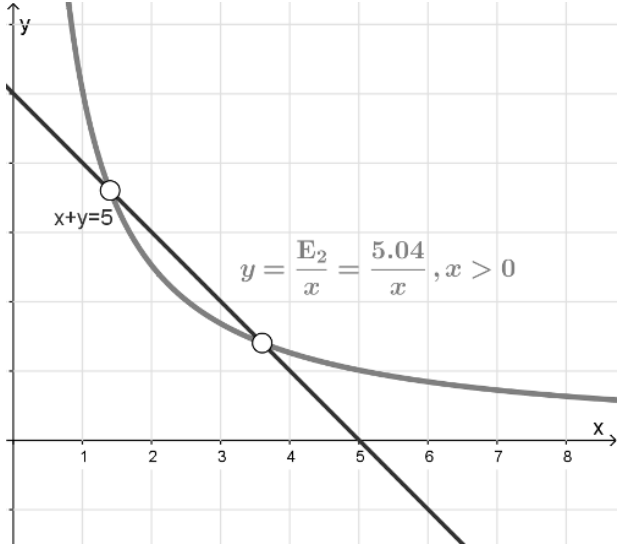
Ερωτήματα αυτοαξιολόγησης

Στα επόμενα δίνεται ένα σύνολο ερωτημάτων που αφορούν στο σύνολο της δραστηριότητας. Η πρόταση μας αφορά στη διακριτική ευχέρεια του εκπαιδευτικού αναφορικά με κάποια ενδεικτικά ερωτήματα που μπορούν να δοθούν για επεξεργασία στο σπίτι. Με τον τρόπο αυτό είναι εφικτή μια μορφή αυτοαξιολόγησης τόσο από την πλευρά του εκπαιδευτικού όσο και των συμμετεχόντων μαθητών και μαθητριών.

Άσκηση:

Από τις πληροφορίες των σχημάτων που δίνονται παρακάτω συμπληρώστε με Σ ή Λ τις αντίστοιχες προτάσεις:

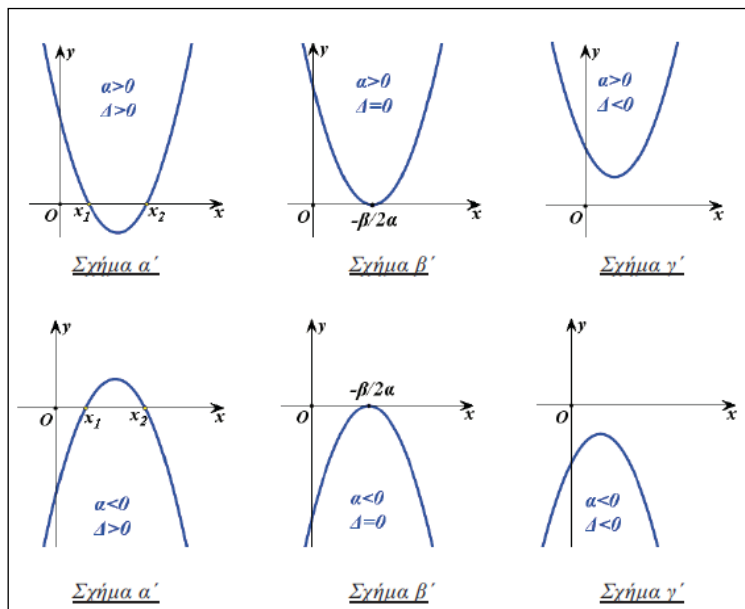
Σχήμα	Ισχυρισμός	Σ	Λ
	$\kappa = -0.5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	$\kappa \neq -0.5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	$E_2 = \max$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	$E_2 < E_1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	$E_2 < 4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	$E_2 \neq \max$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Εκτεταμένο φύλλο εργασίας

Υπενθυμίσεις

I. Η συνάρτηση του τριωνύμου: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \alpha \neq 0$



II. Σχετική θέση υπερβολής και ευθείας. Γραφική επίλυση μη γραμμικών συστημάτων

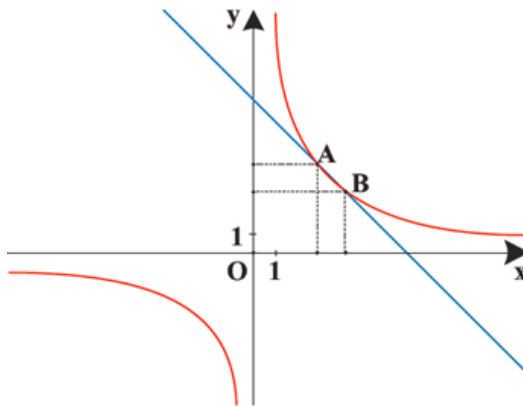
Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} (\Sigma)$$

Αλγεβρική επίλυση: Το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση 2^{ου} βαθμού $x^2 - 5x + 6 = 0$ από την οποία προκύπτει ότι $x=2$ ή $x=3$ οπότε $y=3$ ή $y=2$ αντίστοιχα.

Γεωμετρική Ερμηνεία: Η 1^η εξίσωση του (Σ) παριστάνει ευθεία, ενώ η 2^η εξίσωση παριστάνει την υπερβολή

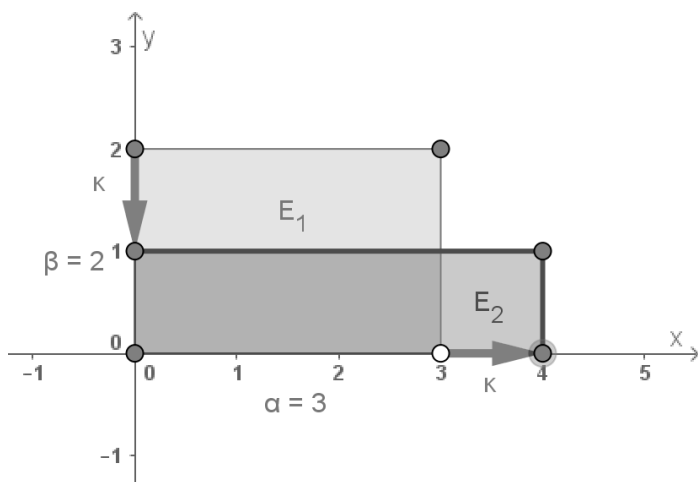
$y = \frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων

της ευθείας και της υπερβολής, δηλαδή τα σημεία $A(2,3)$ & $B(3,2)$, θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος (Σ) .



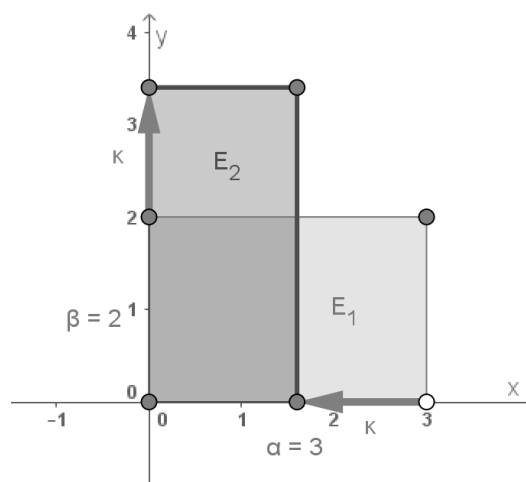
Εισαγωγή προβλήματος

Ο ιδιοκτήτης μιας έκτασης E_1 σχήματος ορθογωνίου, μήκους $\alpha=3$ ($\times 10^2$ m) και πλάτους $\beta=2$ ($\times 10^2$ m) θα πρέπει να παραχωρήσει ένα τμήμα αυτής της έκτασης στο Δήμο της περιοχής ώστε να ανοιχθεί δρόμος που θα περνάει μέσα από αυτή. Η συμφωνία μεταξύ τους είναι να μειώσει μία από τις δύο διαστάσεις κατά κ μέτρα και να αυξήσει την άλλη διάσταση επίσης κατά κ μέτρα και αφορούσε δύο εναλλακτικούς τρόπους (σχ.1 και σχ.2).



Νότιο – Ανατολική μεταβολή

σχ.1



Βόρειο - Δυτική μεταβολή

σχ.2

1^ο στάδιο

Υποθέστε ότι ο ιδιοκτήτης σας προσλαμβάνει ως σύμβουλο, ώστε να του προτείνετε ένα από τα 2 είδη μεταβολής. Ποιο είδος μεταβολής θα τον συμβουλευάτε να επιλέξει προκειμένου να πάρει έκταση ίση με την αρχική;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

Ανοίξτε το δόμημα MSC_emathisis.ggb. Σε αυτό υπάρχουν ο δρομέας κ από τον οποίο μεταβάλλονται το μήκος α και το πλάτος β του ορθογωνίου E_1 .

E9. Να σημειώσετε στον πίνακα ποια από τα μεγέθη μεταβάλλονται και ποια όχι:

Μέγεθος	Μεταβάλλεται;
Μήκος α	<input type="checkbox"/> Ναι <input type="checkbox"/> Όχι
Πλάτος β	<input type="checkbox"/> Ναι <input type="checkbox"/> Όχι
Εμβαδόν ορθογωνίου E_2	<input type="checkbox"/> Ναι <input type="checkbox"/> Όχι
Περίμετρος ορθογωνίου E_2	<input type="checkbox"/> Ναι <input type="checkbox"/> Όχι

E10. Ανοίξτε τους διακόπτες [P] και [T] και δώστε κίνηση στο δρομέα κ από το διακόπτη κάτω αριστερά. Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες από το σημείο $P(\kappa, f(\kappa))$ όπου $f(\kappa) = (3 + \kappa)(2 - \kappa)$ και το σημείο $T(\kappa, g(\kappa))$ όπου $g(\kappa) = (3 - \kappa)(2 + \kappa)$.

I. Τι είδους καμπύλες φαίνεται να σχηματίζονται;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

II. Συμπληρώστε τα κενά και τις επιλογές στον παρακάτω πίνακα όπου N-A είναι η νοτιο-ανατολική μεταβολή και B-Δ η βορειο-δυτική :

Εξίσωση	Τιμές του κ	Είδος μεταβολής	
$f(\kappa) = 6$	$\kappa = \dots\dots$	<input type="checkbox"/> N-A	<input type="checkbox"/> B-Δ
$g(\kappa) = 6$	$\kappa = \dots\dots$	<input type="checkbox"/> N-A	<input type="checkbox"/> B-Δ

Δικαιολογήστε τις επιλογές σας για το “Είδος μεταβολής”:

E11. Με ανοικτή τη μέτρηση του εμβαδού E_2 , πειραματιστείτε για τις τιμές του $\kappa = -4$ και $\kappa = 3$ όπου και πάλι ισχύει ότι $f(\kappa) = 6$.

Θα συμβουλευάτε τον Ιδιοκτήτη να συμφωνήσει την ανταλλαγή με την έκταση E_2 που προκύπτει για αυτές τις τιμές του κ ;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

E12. I. Με ανοικτούς τους διακόπτες [P] και [Σ] δώστε κίνηση στο δρομέα κ . Στην οθόνη σχηματίζονται οι καμπύλες των σημείων $P(\kappa, f(\kappa))$ και $\Sigma(\kappa, E_2)$ που αναπαριστά τη μεταβολή του εμβαδού E_2 συναρτήσει των τιμών του κ .

Μπορείτε να αιτιολογήσετε πού οφείλονται οι διαφορές μεταξύ των δύο γραμμών;

II. Ποια συνάρτηση πιστεύετε ότι παριστάνει το γράφημα των σημείων $\Sigma(\kappa, E_2)$;

III. Για ποιες τιμές του κ φαίνεται στο λογισμικό ότι οι 2 προηγούμενες καμπύλες ταυτίζονται;
.... κ <
.....

Δικαιολογήστε την απάντησή σας με επίλυση κατάλληλης ανίσωσης:

Διορθώστε τώρα τις τιμές του δρομέα κ ώστε οι καμπύλες των σημείων P και Σ να ταυτίζονται (δεξί κλικ στο δρομέα κ , Ιδιότητες & Δρομέας).

2ο Στάδιο

Β. Υποθέστε τώρα ότι στις διαπραγματεύσεις του Ιδιοκτήτη με το Δήμο, του προσφέρθηκε η δυνατότητα να ανταλλάξει την έκταση E_1 με έκταση μεγαλύτερου εμβαδού από τη δική του, μεταβάλλοντας πάλι το μήκος και το πλάτος με τον ίδιο τρόπο όπως και στο 1^ο στάδιο.

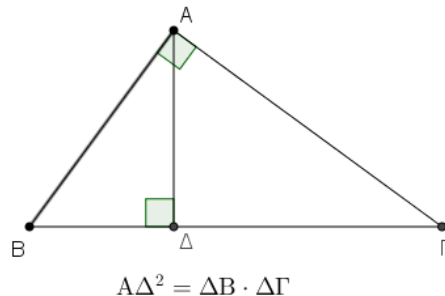
- Να εξετάσετε στο χαρτί αν υπάρχει περίπτωση ο Ιδιοκτήτης να πάρει έκταση μεγαλύτερη από την αρχική.
- Σε καταφατική περίπτωση, ποια μπορεί να είναι η μέγιστη έκταση που μπορεί να πάρει και με ποιο τρόπο μεταβολής;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

E13. Ανοίξτε **μόνο** το διακόπτη “1^η Αναπαράσταση”. Εμφανίζεται το ημικύκλιο διαμέτρου $IN=IL+LN$ όπου: $IL=AB$ και $LN=OA$.
Λαμβάνοντας υπόψη το παρακάτω Θεώρημα, συμπληρώστε τα κενά:

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτίνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτίνουσα.



- Για το ορθογώνιο τρίγωνο IMN θα ισχύει ότι: $ML^2 =$ _____
- Τί θα εκφράζει το μέγεθος ML^2 ; _____
- Από τον πειραματισμό σας, μπορείτε να εξετάσετε αν το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται;
Αν ναι τότε:
 - Για ποια θέση του σημείου Λ; (_____)
 - Τί φαίνεται να ισχύει για το σχήμα του E_2 (_____) και πόσο είναι το εμβαδόν E_2 ; (_____)

Δικαιολογήστε την απάντησή σας:

E14. Ανοίξτε το διακόπτη [P]. Να εντοπίσετε την τιμή του k για την οποία το εμβαδόν E_2 μεγιστοποιείται; $k =$ _____

Δικαιολογήστε αλγεβρικά την απάντησή σας:

E15. Από τα ευρήματα της προηγούμενης ερώτησης, διατυπώστε παρακάτω έναν ισχυρισμό σχετικά με τα εμβαδά ορθογωνίων όπως του E_2 :

3^ο στάδιο: Απόδειξη ισχυρισμού

E16. Αν συμβολίσουμε με x και y τις διαστάσεις του ορθογωνίου E_2 , συμπληρώστε τις εξισώσεις στο παρακάτω σύστημα (Σ):

$$(\Sigma): \begin{cases} x+y = \dots\dots\dots \\ xy = \dots\dots\dots \end{cases}$$

II. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $-x^2 + 5x - E_2 = 0$

E17. Στην οθόνη “Γραφικά2” ανοίξτε το διακόπτη $p(x)$. Βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x) = -x^2 + 5x - E_2$. Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του k (από το οποίο θυμίζουμε ότι μεταβάλλεται και το E_2).

I. Τι είδους καμπύλη είναι η συγκεκριμένη γραφική παράσταση;

II. Τι παρατηρείτε για τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης με τον άξονα xx' καθώς μεταβάλλεται το k ;

III. Από ποια σχέση ερμηνεύεται αλγεβρικά η παραπάνω παρατήρηση;

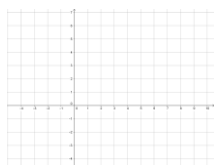
E18. Μπορείτε τώρα να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_2 γίνεται μέγιστο όταν $x=y=2.5$;

E19. Τελικά τι θα συμβουλεύατε τον Ιδιοκτήτη της έκτασης να διαπραγματευτεί με το Δήμο της περιοχής του;

4^ο Στάδιο

E20. I. Τι είδους γραμμές παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) :
$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=E_2 \end{cases}$$

II. Να παραστήσετε γραφικά τις εξισώσεις του συστήματος (Σ) .



Ανοίξτε το διακόπτη [2^η Αναπαράσταση] για να επικυρώσετε τις απαντήσεις σας.

E21. Πειραματιστείτε για τις διάφορες τιμές του κ . Τι παρατηρείτε για τις σχετικές θέσεις των 2 γραμμών;

E22. Ποια θα είναι η σχετική θέση των γραμμών που χαράξατε στην προηγούμενη ερώτηση όταν:

I. $\kappa \neq -0.5$ _____

II. $\kappa = -0.5$ _____

Ανοίξτε και το διακόπτη $[p(x)]$. Συγκρίνετε τη σχετική θέση της παραβολής $p(x)$ με τον άξονα x' για τις τιμές του κ του προηγούμενου ερωτήματος.

Παρατηρείτε κάποια σχέση ανάμεσα στις σχετικές θέσεις των γραμμών του ερωτήματος E22 και της παραβολής $p(x)$ με τον άξονα x' ;

Αιτιολογήστε την απάντησή σας αλγεβρικά: