# Ba-Wü: BG
# Neuer Lehrplan Mathematik
# Modul-5: Prozesse
# Teil 2a: Einstufige Prozesse mit Matrizenrechnung

# Stoffverteilungsplan 1

| Woche | Inhalte |
|---|---|
| 1 + 2 | Einstufige Prozesse<br>Darstellung mit Tabellen, Graph, Matrizen u. Vektoren<br>Rechnen mit Matrizen und Vektoren |
| 3 + 4 | Umkehrung eines Prozesses<br>Lineare Gleichungssysteme, inverse Matrix<br>einfache Matrizengleichungen |
| 5 | Übungen |
| 6 + 7 | Zweistufige Prozesse<br>Verflechtungsdiagramm, Verflechtungsmatrizen<br>Bedarfs-, Kosten-, Gewinnermittlung |
| 8 + 9 | Übungen, Klassenarbeit |

## Beispiel

Eine Bäckerei beliefert täglich drei Schulen mit Brötchen und Laugenbrezeln. Die Bestellmengen sind an allen Werktagen gleich.

**Tägliche** Bestellmengen (Beschreibung als Tabelle)

| | Brötchen (B) | Brezeln (L) |
|---|---|---|
| Schule 1 | 250 | 180 |
| Schule 2 | 2000 | 130 |
| Schule 3 | 280 | 200 |

**Tägliche** Bestellmengen (Beschreibung als Matrix)

$$B_T = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & \quad L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 250 & 180 \\ 200 & 130 \\ 280 & 200 \end{pmatrix} \end{array}$$

Schule 2 bestellt täglich 130 Brezeln

# Einstufige Prozesse

## Beispiel

Die Bestellung wird wöchentlich abgerechnet, daher ist für die Bäckerei die wöchentliche Bestellung relevant.

**Wöchentliche** Bestellmengen

| | Brötchen (B) | Brezeln (L) |
|---|---|---|
| Schule 1 | 1250 | 900 |
| Schule 2 | 1000 | 650 |
| Schule 3 | 1400 | 1000 |

Beschreibung als Matrix $B_W = 5 \cdot B_T = 5 \cdot \begin{pmatrix} 250 & 180 \\ 200 & 130 \\ 280 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250 & 900 \\ 1000 & 650 \\ 1400 & 1000 \end{pmatrix}$

Skalare Multiplikation

## Beispiel

Die Schulen bieten an einem Samstag einen Abivorbereitungskurs an. Dadurch erhöht sich für diese Woche die Bestellmenge.

Wöchentliche Bestellmengen und zusätzliche Samstagbestellung

$$B_{W+S} = \begin{pmatrix} 1250 & 900 \\ 1000 & 650 \\ 1400 & 1000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 & 100 \\ 150 & 100 \\ 150 & 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1450 & 1000 \\ 1150 & 750 \\ 1550 & 1150 \end{pmatrix}$$

Matrizen-Addition

# Einstufige Prozesse

## Beispiel

Ein Brötchen kostet 0,70 €, eine Brezel 0,50 €. Welche Rechnungsbeträge ergeben sich für die Schulen am Ende einer Woche?

Wöchentliche Bestellmengen · Preise

$$B_W \cdot \vec{p} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1250 & 900 \\ 1000 & 650 \\ 1400 & 1000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} B \\ L \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1250 \cdot 0{,}7 + 900 \cdot 0{,}5 \\ 1000 \cdot 0{,}7 + 650 \cdot 0{,}5 \\ 1400 \cdot 0{,}7 + 1000 \cdot 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1325 \\ 1025 \\ 1480 \end{pmatrix}$$

Multiplikation
Matrix · Vektor

Preisvektor

Schule 3 zahlt
wöchentlich 1480 €.

## Verallgemeinerung

Matrix $A_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

n Zeilen,
m Spalten

Element $a_{ij}$

Zeile i,
Spalte j

Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

Zeilenvektor $\vec{c}^{\,T} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$

# Übersicht

## Rechnen mit Matrizen

### Matrix · Vektor

$$A_{n,m} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

mit $c_i = a_{i1} \cdot b_1 + \ldots + a_{im} \cdot b_m$

### Vektor · Matrix

$$\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot A_{nm} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_m \end{pmatrix}$$

mit $c_j = b_1 \cdot a_{1j} + \ldots + b_n \cdot a_{nj}$

### Matrix · Matrix

$$A_{n,m} \cdot B_{m,k} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} \end{pmatrix}$$

mit $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{im} \cdot b_{mj}$

### Addition

$$A_{n,m} + B_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

### Skalare Multiplikation

$$r \cdot A_{n,m} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & \cdots & r \cdot a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ r \cdot a_{n1} & \cdots & r \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

### Transponieren

$$A_{n,m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

### Gleichheit

$A_{n,m} = B_{n,m} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ für alle i, j.

## *Beispiel zur Übersicht*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

### Rechnen mit Matrizen

### Matrix · Vektor

$$A_{3,2} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

### Vektor · Matrix

$$\vec{b}^{\,T} \cdot D_{2,2} = (2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = (-4 \quad 13)$$

### Matrix · Matrix

$$A_{3,2} \cdot D_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 16 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

### Addition

$$A_{3,2} + B_{3,2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 8 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

### Skalare Multiplikation

$$3 \cdot A_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

### Transponieren

$$A^T_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

### Gleichheit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

## Beispiel

Die Bäckerei ändert nun ihre Preise und legt, bei gleichen Bestellmengen wie bisher, der Schule 2 eine Rechnung über 1140 € und Schule 3 über 1650 € vor. Wie viel kostet nun ein Brötchen bzw. eine Brezel, und wie hoch ist der Rechnungsbetrag von Schule 1?

$$B_W \cdot \vec{p} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1250 & 900 \\ 1000 & 650 \\ 1400 & 1000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 1140 \\ 1650 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1250p_1 + 900p_2 &= k_1 \\ 1000p_1 + 650p_2 &= 1140 \\ 1400p_1 + 1000p_2 &= 1650 \end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem

## Beispiel

… Preisänderung mit Matrizenrechnung

$$B_W \cdot \vec{p} = \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & L \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1250 & 900 \\ 1000 & 650 \\ 1400 & 1000 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ 1140 \\ 1650 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & k_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1000 & 650 & 0 & 1140 \\ 1400 & 1000 & 0 & 1650 \\ 1250 & 900 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & k_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}75 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}60 \\ 0 & 0 & 1 & 1477{,}50 \end{array}\right) \end{array}$$

Ein Brötchen kostet 0,75 €.

Eine Brezel kostet 0,60 €.

Schule 1 muss 1477,50 € bezahlen.

# Stationen

*Viel Spaß bei den Stationen*