LÓGICA MATEMÁTICA

LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN

Proposición es una expresión con significado, en un lenguaje, que afirma algo de algo, sobre la cual tiene sentido inequívoco decir: es verdadera o (excluyente) es falsa.

SINTAXIS DE UN LENGUAJE PROPOSICIONAL

SÍMBOLO	NOMBRE	INTERPRETACIÓN
'	negación	no es cierto que ...
$\wedge$	conjunción	... y ...
$\vee$	disyunción	... y / o ...
$\rightarrow$	condicional	si ... , entonces ...
$\leftrightarrow$	bicondicional	... si y sólo si ...
(,)	paréntesis	
p , q , r , s $p_1 , p_2 , \ldots , p_i \quad i \in N$	variables proposicionales	

FÓRMULA ATÓMICA (f. at.)

Cada variable proposicional es una fórmula atómica y representa a una proposición atómica.

Ejemplos:

p: Hoy es sábado

q: Estoy descansando

FÓRMULA BIEN FORMADA (f. b. f.)

1) Una fórmula atómica es una fórmula bien formada

2) Si φ y ψ son fórmulas bien formadas, entonces también son fórmulas bien formadas:

$\varphi\,'$

$\varphi \wedge \psi$

$\varphi \vee \psi$

$\varphi \rightarrow \psi$

$\varphi \leftrightarrow \psi$

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
(56-2)23169001 y +56998581588

SEMÁNTICA

VALUACIÓN

Sea P el conjunto de variables proposicionales y dada la función:

$$\sigma_0 : P \to \{0, 1\}$$

Se define como valuación a la función:

$$\sigma : \{\text{f. b. f.}\} \to \{0, 1\}$$

Donde:

Si φ es:	entonces $\sigma(\varphi)$ es:
f. at.	$\sigma_0(\varphi)$
ψ'	$1 - \sigma(\psi)$
$\psi \wedge \phi$	$\sigma(\psi) \times \sigma(\phi)$
$\psi \vee \phi$	$\text{máx}\{\sigma(\psi), \sigma(\phi)\}$
$\psi \to \phi$	$\text{máx}\{1 - \sigma(\psi), \sigma(\phi)\}$
$\psi \leftrightarrow \phi$	$1 - \lvert\sigma(\psi) - \sigma(\phi)\rvert$

TAUTOLOGÍA

Una f. b. f. φ es una tautología (T) , si para cada función $\sigma_0 : P \to \{0, 1\}$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$

Ejemplo: $\psi \vee \psi'$

CONTRADICCIÓN

Una f. b. f. φ es una contradicción (C) , si para cada función $\sigma_0 : P \to \{0, 1\}$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 0$

Es decir, φ es una contradicción, si φ' es una tautología.

Ejemplo: $\psi \wedge \psi'$

CONTINGENCIA

Una f. b. f. φ es una contingencia, si no es tautología, ni contradicción.

Julio 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
(56-2)23169001 y +56998581588

CONECTIVOS Y SUS TABLAS DE VERDAD

También se puede valuar una f. b. f. mediante el uso de tablas de verdad. En esta ocasión, por razones de conveniencia, los valores que pueden tomar las f. b. f. son V y F (verdadero y falso) , y corresponden a los valores 1 y 0 respectivamente.

NEGACIÓN (’ , ~ , ¬)

Ejemplos:

p’: No es cierto que hoy es sábado

q’: No es cierto que estoy descansando

p	p’
V	F
F	V

CONJUNCIÓN ($\wedge$)

Ejemplo:

$p \wedge q$: Hoy es sábado y estoy descansando

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DISYUNCIÓN ($\vee$)

Ejemplo:

$p \vee q$: Hoy es sábado y / o estoy descansando

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
(56-2)23169001 y +56998581588

CONDICIONAL ($\rightarrow$)

Ejemplo:

$p \rightarrow q$: Si hoy es sábado, entonces estoy descansando

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$)

Ejemplo:

$p \leftrightarrow q$: Hoy es sábado, si y sólo si estoy descansando

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

ANÁLISIS MEDIANTE TABLA DE VERDAD

Mediante el uso de tablas de verdad, se puede analizar una f. b. f.

Ejemplo:

Confeccione la tabla de verdad de $(p \wedge q) \vee r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Julio 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
(56-2)23169001 y +56998581588

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Hay una serie de equivalencias de gran importancia en la Lógica proposicional, y están detalladas a continuación:

Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$
Doble Negación	$(p')' \Leftrightarrow p$
Conmutatividad	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$
Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
Distributividad	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $(q \vee r) \wedge p \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$ $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $(q \wedge r) \vee p \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (r \vee p)$
Absorción	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
Dualidad (De Morgan)	$(p \wedge q)' \Leftrightarrow p' \vee q'$ $(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$
Identidad	$p \wedge T \Leftrightarrow p$ $p \wedge C \Leftrightarrow C$ $p \vee T \Leftrightarrow T$ $p \vee C \Leftrightarrow p$
Complemento	$p \wedge p' \Leftrightarrow C$ $p \vee p' \Leftrightarrow T$ $T' \Leftrightarrow C$ $C' \Leftrightarrow T$

Julio 2018
http://www.eneayudas.cl
matematicayciencias@gmail.com
(56-2)23169001 y +56998581588