

Dans la suite le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

### Éléments de symétrie d'une courbe (C) : $y = f(x)$

1. 1) Dans chacun des cas suivants, montrer que la courbe (C) d'équation  $y = f(x)$  admet l'élément indiqué comme élément de symétrie.

a- (C) :  $y = f(x) = x^2 + 4x - 5$  ; la droite (d) :  $x = -2$ .

b- (C) :  $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{2x^2 - 4x + 1}$  ; la droite (d) :  $x = 1$ .

c- (C) :  $y = f(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}$  ; le point A ( -3 ; 2 ).

d- (C) :  $y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  ; le point A ( -1 ; 0 ).

2) Dans chacun des cas suivants, indiquer l'élément de symétrie de la courbe (C) d'équation  $y = f(x)$ .

a- (C) :  $y = f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x}$  ; b- (C) :  $y = f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{\cos x + 2}$

c- (C) :  $y = f(x) = (4 + 3\cos(2x)) \cdot \tan(x)$

### **Fonctions composées.**

2. Domaine de définition et calcul de gof.

Dans chacun des cas suivants, définir gof après avoir défini son domaine de définition :

1)  $f : x \mapsto \frac{x}{x-1}$  ;  $g : x \mapsto \frac{1}{x-2}$ .

2)  $f : x \mapsto \frac{2x}{x+1}$  ;  $g : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$ .

### Dérivée de gof.

3. Calculer la fonction dérivée première de chacune des fonctions suivantes :  
(le domaine de dérivabilité de  $f$  ainsi que la forme réduite de la dérivée ne sont pas demandés)

1)  $f : x \mapsto \sin^2(\sqrt{2x})$  ; 2)  $f : x \mapsto \frac{1}{\cos^2(3x)}$  ;

3)  $f : x \mapsto \sqrt{\tan(3x)}$  ; 4)  $f : x \mapsto x^2 \cdot (2x+1)^3$  ;

5)  $f : x \mapsto 3x^2 \cdot \sin(2x)$  ; 6)  $f : x \mapsto \frac{\sin(3x)}{\cos(2x)}$ .

4. 1) On donne les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Connaissant  $f(x) = x^2$  et  $g'(x) = \frac{1}{x}$  ( $g'$  est la fonction dérivée de  $g$ ) :

a- Calculer  $(g \circ f)'(x)$ .

b- Soit  $h$  la fonction définie par  $h(x) = g(\sqrt{2x})$ . Calculer  $h'(x)$ .

2) On donne les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies dans l'intervalle  $]-\infty ; +\infty [$ .

Connaissant  $g(x) = x^2 + x + 1$  et  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Calculer  $(f \circ g)'(0)$ .

### Applications des dérivées

5. Dans chacun des cas suivants, trouver l'équation de la tangente à la courbe  $(C)$  au point de cette courbe d'abscisse  $\alpha$ .

1)  $(C)$  d'équation  $y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  ;  $\alpha = 0$ .

2)  $(C)$  d'équation  $y = f(x) = 2x + 1 + \sqrt{-x^2 + 2x}$  ;  $\alpha = 1$ .

3)  $(C)$  d'équation  $y = f(x) = x + \sqrt{x-2}$  ;  $\alpha = 2$ .

### Formes indéterminées et règle de l'Hospital

6. Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{x - 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\cos 2x + x - 1} \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{\tan(\pi x) - 1}{4x - 1}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+1)^2 - 9}{(3x-2)^4 - 1}$$

### Dérivée seconde – concavité d'une courbe – point d'inflexion

7. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  et l'on désigne par  $(C)$  sa courbe représentative.

1) Etudier la concavité de  $(C)$  et en déduire que  $(C)$  admet un point d'inflexion  $A$  à déterminer.

2) Montrer que  $A$  est un centre de symétrie de  $(C)$ .

8. Les deux courbes (F) et (G) sont respectivement les courbes représentatives de deux fonctions  $f$  et  $g$  continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$

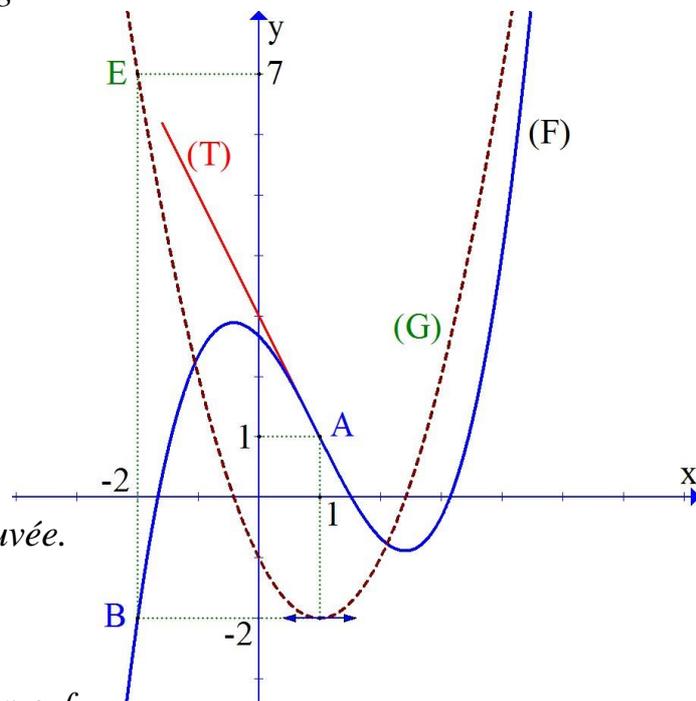
Indications :

$g$  est la dérivée de  $f$ .

(F) passe par  $B(-2 ; -2)$  et par  $A(1 ; 1)$ .

(T) est la tangente en A à la courbe (F).

(G) passe par  $E(-2 ; 7)$  et admet au point  $(1 ; -2)$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



1) Trouver l'équation de (T).

2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + 2}{x + 2}$  et donner une interprétation graphique à la valeur ainsi trouvée.

3) Montrer que A est un point d'inflexion de (F).

4) Soit (L) la courbe représentative de la fonction  $g \circ f$ . Trouver l'équation de la tangente (D) à la courbe (L) au point K de cette courbe d'abscisse 1.

Image d'un intervalle I par une fonction continue.

Existence de solution(s), dans I, de l'équation  $f(x) = g(x)$ .

9. 1) Montrer que l'équation  $x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

2) Vérifier que  $0.39 < \alpha < 0.40$

10. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ .

1) a- Démontrer que l'équation  $f(x) = \frac{8}{5}$ , admet dans  $[-2 ; -1]$  une solution unique

$\alpha$ .

b- Démontrer que :  $-1.25 < \alpha < -1.24$

2) a- Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$ , admet dans  $[-3 ; -2]$  une solution unique  $\beta$ .

b- Démontrer que :  $-2.11 < \beta < -2.10$ .

11. On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ et } g(x) = x^2 + 1, \text{ et l'on désigne par } (F) \text{ et } (G) \text{ leurs courbes représentatives.}$$

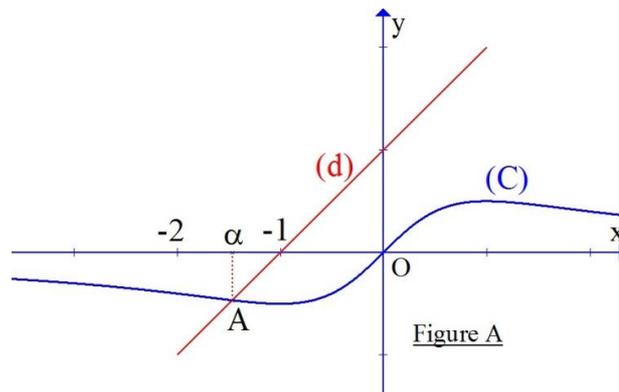
1) Montrer que  $(F)$  et  $(G)$  ont un seul point commun  $A$ .

2) Soit  $\alpha$  l'abscisse de  $A$ . Montrer que  $0,68 < \alpha < 0,69$ .

12. On considère la courbe  $(C)$  d'équation  $y = f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  et la droite  $(d)$  d'équation  $y = g(x) = x + 1$ . (Figure A)

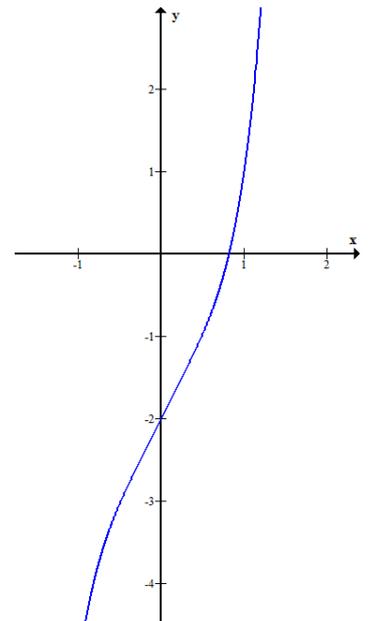
$(C)$  et  $(d)$  ont un seul point commun  $A$  d'abscisse  $\alpha$ .

Vérifier que :  $-1.5 < \alpha < -1.4$



13. La figure ci-contre représente le graphe  $(C)$  de la fonction  $g$  définie par  $g(x) = x^5 + 2x - 2$

Soit  $f$  la fonction définie dans  $]-\infty ; 1[$  par  $f(x) = \frac{x}{x^5 + x - 2}$



1) Démontrer que l'équation  $f(x) = -1$ , admet une solution unique  $\alpha$ .

2) Vérifier que :  $0.81 < \alpha < 0.82$