COLLEGE Des **SŒURS DU ROSAIRE** Cornet El Hamra		Classe :	S.G
Examen semestriel. Décembre 2017		Durée :	3 périodes
Mathématiques.			
Nom et prénom :.. N°		*3 pages – 6 exercices – 30 points*	

I *– (6 pts)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère les points A, B et D d'affixes respectives i, 1 *et* $-i$.
M est un point variable d'affixe z, *tel que* $(z \neq i)$, *et* M' *est un point d'affixe* z'
telle que $z' = \dfrac{z+i}{z-i}$.

1) Déterminer la ligne sur laquelle varie le point M lorsque z' *est un imaginaire pur.*

2) Montrer que, lorsque z *est réel,* M' *varie sur un cercle fixe de centre O.*

3) a) Montrer que $(z'-1)(z-i) = 2i$.

b) (C) est le cercle de centre A et de rayon 2.

Montrer que lorsque M varie sur le cercle (C), alors M' *varie sur un cercle fixe que l'on déterminera,*

II – (4 *pts*)

On considère la suite (u_n) *définie, pour tout entier n, par :* $u_n = \int_0^1 x^n.\sqrt{1-x^2}\,dx$.

1) a- Montrer que $F(x) = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}$ *est une primitive de* $f(x) = x.\sqrt{1-x^2}$

b- En déduire la valeur de u_1.

c- Sachant que $u_0 = \dfrac{\pi}{4}$, *calculer* u_2

2) a) Montrer que, pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) Montrer que (u_n) *est décroissante.*

c) En déduire que (u_n) *est convergente.*
Calculer la limite de (u_n) .

***III** – (5 points)*

Dans le tableau suivant, une <u>seule</u> des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, avec <u>justification</u>, la réponse qui lui correspond.

N°	*Questions*	*Réponses* a	b	c
1	*Si le complexe* $z=\dfrac{\sin\alpha - i\cos\alpha}{1-\sqrt{3}\,i}$, *alors* $z=$	$2e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$	$e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$	$\frac{1}{2}e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$
2	*Si* $\alpha=\dfrac{3\pi}{5}$ *radian*, alors, *en radian*, $\arccos\big(\sin(\alpha)\big)=$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{10}$
3	*Si z est un nombre complexe non nul alors* $\left\lvert\dfrac{2\bar{z}+i\bar{z}}{z}\right\rvert=$	3	5	$\sqrt{5}$
4	$\lim\limits_{x\to-\infty} x\big(\pi+2\arctan(2x)\big)=$	$-\infty$	1	-1
5	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}\,dx$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$3-\pi$

***IV** – (5 pts)*

Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x)=\displaystyle\int_2^{2x}\sqrt{5+t^2}\,dt$.

On désigne par (G) sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i}\,;\vec{j})$.

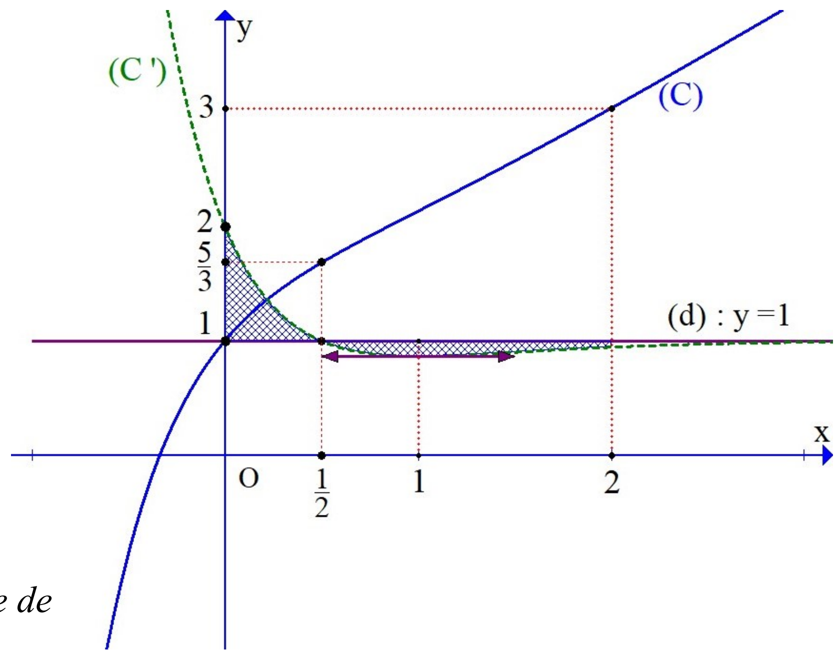
1) Montrer que (G) passe par le point A(1 ; 0), et trouver l'équation de la tangente en A à (G).

2) Calculer $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{F(x^2)}{x-1}$.

3) Etudier le signe de F .

***V**- (5 pts)*

Les deux courbes (C) et (C') ci-contre sont ,respectivement, les courbes représentatives en repère orthonormé $(O; \vec{i}\ ; \vec{j})$, d'une fonction f continue et dérivable dans IR et de sa dérivée g continue et dérivable dans IR.



<u>Indications :</u>

(C') admet au point $\left(1\ ; \frac{4}{5}\right)$ une tangente horizontale.

1) Montrer que f admet une fonction réciproque h ,indiquer son domaine de définition et calculer $h'(1)$.

2) Calculer l'aire de la surface hachurée.

3) a - Etudier le signe de $g'(x)$.

b - Soit t la fonction définie dans IR par $t = g \circ f$.
Montrer que t admet un maximum que l'on calculera.

***VI**- (5 pts)*

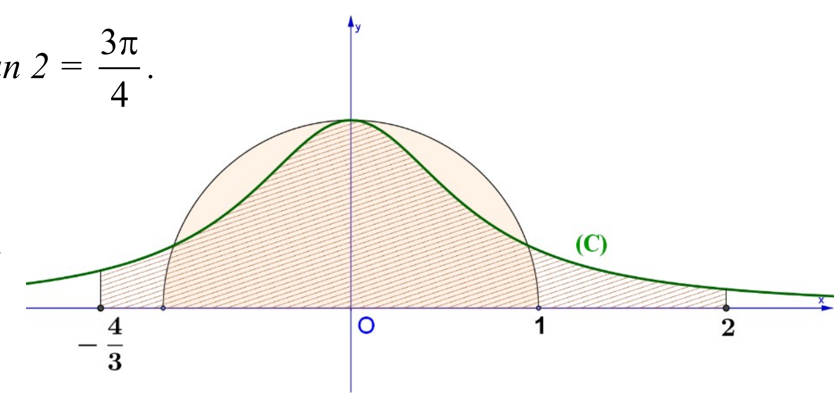
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}\ ; \vec{v})$.
On donne les deux nombres complexes $a = 1 + 3i$ et $b = 1 - 2i$.

1) Ecrire a et b sous forme exponentielle.

2) a- Vérifier que $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

b- En déduire que $\arctan 3 + \arctan 2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

3) La figure ci-contre montre, en repère orthonormé, la courbe représentative (C) de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{4}{4+9x^2}$ et un demi-cercle de rayon 1.



Montrer que, l'aire du ***<u>domaine hachuré limité par (C)</u>*** *est égale à l'aire du demi-cercle.*