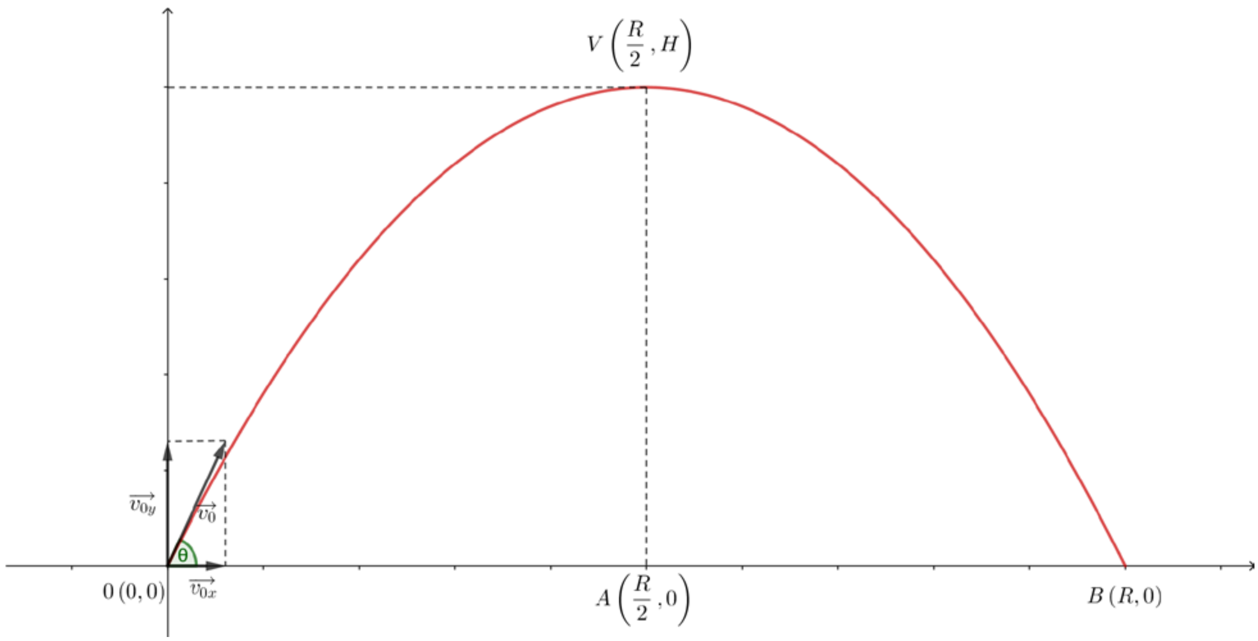
Aruncarea de la nivelul solului și aterizarea la același nivel



Se folosesc notațiile:

$O(0,0)$ – punctul de aruncare, nivel 0 (nivelul solului)

$B(R,0)$ – punctul de sosire, nivel 0

R – distanța parcursă (pe orizontală)

T – timpul

H – înălțimea maximă până la care ajunge obiectul

$V\left(\frac{R}{2},H\right)$ – vârful parabolei (punct de întoarcere)

$A\left(\frac{R}{2},0\right)$ – proiecția lui V pe axa Ox

$\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_{0x}} + \overrightarrow{v_{0y}}$, $v_0{}^2 = v_{0x}{}^2 + v_{0y}{}^2$

$v_{0x} = v_0 \cos\theta,\ v_{0y} = v_0 \sin\theta$

$v_x = v_{0x},\ \forall t \in [0, T]$ constant $\Rightarrow R = v_{0x}T \Rightarrow v_{0x} = \dfrac{R}{T}$

$v_y = v_{0y} - gt$. În punctul V avem $t = \dfrac{T}{2},\ v_y = 0 \Rightarrow v_{0y} = \dfrac{gT}{2}$

În punctul A: $x = \dfrac{R}{2},\ t = \dfrac{T}{2},\ \theta = 0$. În punctul B: $y = 0$

Deplasarea pe orizontală: $x = v_{0x}t$ (mișcare uniformă, viteza constantă)

Deplasarea pe verticală: $y = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2}$ (mișcare uniform variată, accelerația constantă)

Cazul I: Dacă știm unghiul θ și distanța R

- Aflarea lui T

Eliminăm t din ultimele 2 ecuații: $t = \dfrac{x}{v_{0x}} \Rightarrow y = v_{0y} \cdot \dfrac{x}{v_{0x}} - \dfrac{g}{2} \cdot \dfrac{x^2}{v_{0x}{}^2} = \dfrac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} \cdot x - \dfrac{g}{2} \cdot \dfrac{T^2}{R^2} \cdot x^2$, de

unde $y = x \operatorname{tg}\theta - \dfrac{gT^2}{2R^2} \cdot x^2$ (o parabolă).

$y = 0$ în punctele *O* și *B* deci $x_1 = 0,\ x_2 = R$

Pe de altă parte, $y = 0 \Leftrightarrow x \operatorname{tg}\theta - \dfrac{gT^2}{2R^2} x^2 = 0$, de unde $x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{2R^2 \operatorname{tg}\theta}{gT^2}$.

Din cele două expresii ale lui $x_2 \Rightarrow \dfrac{2R \operatorname{tg}\theta}{gT^2} = 1$ de unde $T = \dfrac{\sqrt{2Rg \operatorname{tg}\theta}}{g}$ (1)

- Aflarea lui H

În vârful V: $t = \dfrac{T}{2}$ și $v_y = 0$, de unde $v_{0y} = gt$.

$$y = H \text{ și } t = \frac{T}{2}, \text{ de unde } H = v_{0y} \cdot \frac{T}{2} - \frac{g}{2} \cdot \frac{T^2}{4} = g \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{T}{2} - \frac{g}{2} \cdot \frac{T^2}{4} = \frac{gT^2}{8}$$

Tinând cont de (1) $\Rightarrow H = \frac{R \operatorname{tg}\theta}{4}$ (2)

- Aflarea lui v_0

Avem $v_{0x} = v_0 \cos\theta$. Pe de altă parte $v_{0x} = \frac{R}{T}$. Din cele două rezultă $v_0 = \frac{R}{T\cos\theta}$. Din (1) avem $T = \frac{\sqrt{2Rg \operatorname{tg}\theta}}{g}$ și înlocuind în ultima relație $v_0 = \frac{R}{\frac{\sqrt{2Rg\operatorname{tg}\theta}}{g}\cdot\cos\theta} = \frac{\sqrt{Rg}}{\sqrt{2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta}}$, de unde

$v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\theta}}$, adică $v_0 = \frac{\sqrt{Rg\sin 2\theta}}{\sin 2\theta}$ sau $v_0^{\ 2} = \frac{Rg}{\sin 2\theta}$ (3).

Deci, atunci când unghiul θ și distanța R sunt date (pot fi măsurate) putem afla $T,\ H,\ v_0$ cu formulele $(1),\ (2),\ (3)$.

Cazul II: Dacă știm unghiul θ și viteza inițială v_0, atunci

Din $v_0^{\ 2} = \frac{Rg}{\sin 2\theta}$ (3) rezultă $R = \frac{v_0^{\ 2}\sin 2\theta}{g}$ (4)

Din $H = \frac{R\operatorname{tg}\theta}{4}$ (2) rezultă $H = \frac{v_0^{\ 2}\sin^2\theta}{g}$ (5)

Din $T = \frac{\sqrt{2Rg\operatorname{tg}\theta}}{g}$ (1) rezultă $T = \frac{\sqrt{2\cdot\frac{v_0^{\ 2}\sin 2\theta}{g}\cdot g\operatorname{tg}\theta}}{g} \Rightarrow T = \frac{2v_0\sin\theta}{g}$ (6)