La Caja

1. OBJETIVO:

Que el estudiante identifique la relación funcional entre dos variables, el tipo de esta relación, la determinación de su dominio, su imagen y bosqueje la gráfica de su rapidez instantánea de cambio.

La práctica incide sobre el desarrollo de las siguientes:

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS [1]	COMPETENCIAS GENÉRICAS[2]	HABILIDADES SOCIOEMOCIONALES[3]
1. Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales. 2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques. 3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales. 4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático. 8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.	**Se expresa y se comunica** 4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados. • Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas. • Maneja las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información y expresar ideas. **Piensa crítica y reflexivamente** 5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. • Sintetiza evidencias obtenidas mediante la experimentación para producir conclusiones y formular nuevas preguntas. • Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información. 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva • Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética. **Aprende de forma autónoma** 7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida. • Articula saberes de diversos campos y establece relaciones entre ellos y su vida cotidiana. **Trabaja en forma colaborativa** 8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos. • Propone maneras de solucionar un problema o desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos. • Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva. • Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.	**Colaboración y trabajo en equipo** • Trabaja en equipo de manera constructiva y ejerce un liderazgo participativo y responsable, • Propone alternativas para actuar y solucionar problemas. • Asume una actitud constructiva.

[1] http://www.sep.gob.mx/work/sites/sep1/resources/LocalContent/111950/9/a486.htm

[2] [2] http://www.sems.gob.mx/aspnv/video/Diptico_Competencias_altares.pdf

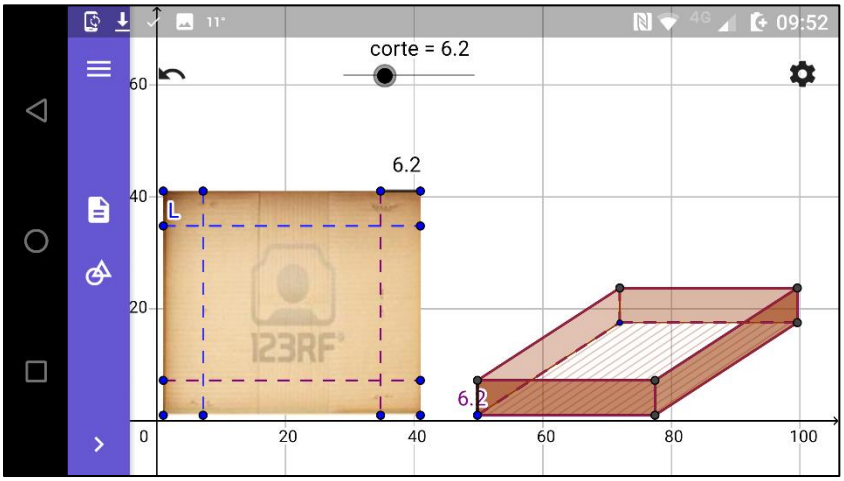
[3] https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/264246/Las_HSE_en_en_nuevo_modelo_educativo.pdf

PLANTEAMIENTO

Se quiere construir una caja con base cuadrada recortando un cuadrado de cada esquina de una pieza cuadrada de cartón y doblando los cortes hasta formar la caja deseada. Si las dimensiones de la pieza son de 40 cm x 40 cm. Encuentra las dimensiones de la caja más grande que se pueda construir.

Sugerencia: Antes de continuar con el paso siguiente, usando una hoja de tu cuaderno, obtén una sección de papel cuadrada y realiza cortes de igual tamaño en las esquinas para armar una caja sin tapa de base cuadrada.

Enseguida, para ayudarte a visualizar la situación, abre en tu dispositivo el archivo GeoGebra **lacaja1.ggb**, y pulsa el botón **INICIAR**:



Trabajando colaborativamente con tu equipo, contesta cada una de las preguntas siguientes:

1. ¿Qué es lo que cambia al cambiar el valor de **corte**? _____

2. ¿Consideras que con este cambio que identificas cambia el volumen de la caja? ¿Sí?, ¿No? Discútelo con tus compañeros de equipo _____

3. ¿Qué fórmula se requiere para calcular el volumen de la caja?

a) volumen = $corte^2$ b) volumen = $(40 – corte)^3$ c) volumen= $(40 – 2*corte)^2*corte$

4. Si reescribimos esta fórmula utilizando el formato de funciones, ¿cómo queda? Justifica tu elección

a) volumen(corte) = $corte^2$ b) volumen(corte) = $(40 – corte)^3$ c) volumen(corte) = $(40-2*corte)^2*corte$

5. ¿Qué tipo de función es? _____

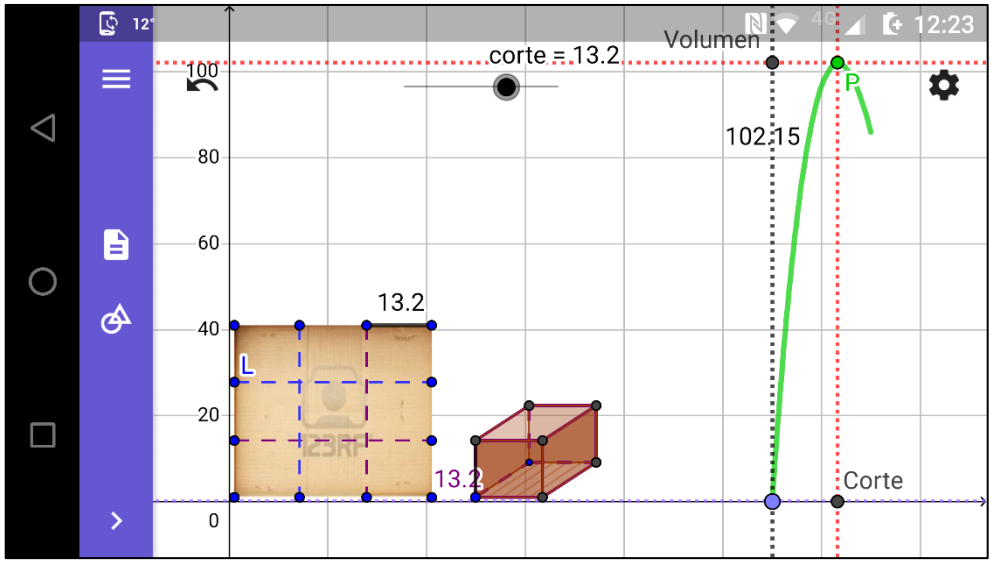
6. En esta función, ¿cuál es la variable dependiente? _____

7. ¿Cuál es la variable independiente? _____

8. ¿Cuál es el dominio de esta función? _____

9. ¿Cuál es su imagen? _____

10. Quizá contestar esta última pregunta sea un poco complicado. Por ello, ahora, carga en tu dispositivo el archivo **lacaja2.ggb**.



NOTA IMPORTANTE: Los valores de volumen máximo, corte máximo, etc. que serán calculados a través de la pantalla provienen de una función afectada por un factor de proporcionalidad utilizado en la construcción GeoGebra que se está utilizando. Los valores correspondientes a la función determinada en la pregunta 4, de volumen máximo $\mathbf{V_{max}}$, corte máximo $\mathbf{corte_{max}}$, etc. se recomienda calcularlos utilizando el graficador de GeoGebra

11. De acuerdo al gráfico de tu pantalla, ¿para qué valor del **corte**, el volumen **V** de la caja alcanza su valor máximo $\mathbf{V_{max}}$?

_____

12. Llamaremos a este valor del corte $\mathbf{corte_{max}}$. ¿Qué le sucede al valor del volumen **V** de la caja para valores del **corte** **<u>menores</u>** a $\mathbf{corte_{max}}$ ($0 \leq \mathbf{corte} < \mathbf{corte_{max}}$) si el **corte** en la esquina de la caja aumenta?

a) Aumenta b) Disminuye c) No cambia

13. Por lo tanto, podemos decir que, para el intervalo $0 \leq \mathbf{corte} < \mathbf{corte_{max}}$ el comportamiento de la gráfica de **V**(**corte**) ***vs***. **corte** es: a) creciente b) decreciente

14. Y, si a estos cambios del volumen **V** los representamos como **ΔV**, ¿cuál de las siguientes expresiones aplicaría en el intervalo de valores $0 \leq \mathbf{corte} < \mathbf{corte_{max}}$? Elige una de las tres opciones subrayándola

a) $\mathbf{\Delta V} > 0$ b) $\mathbf{\Delta V} < 0$ c) $\mathbf{\Delta V} = 0$

15. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener el **Volumen**? ¿Porqué? _____

_____

16. ¿Qué le sucede al valor del volumen **V** de la caja para valores del **corte** **<u>mayores</u>** a $\mathbf{corte_{max}}$ (corte > $\mathbf{corte_{max}}$) si el **corte** en la esquina de la caja aumenta?

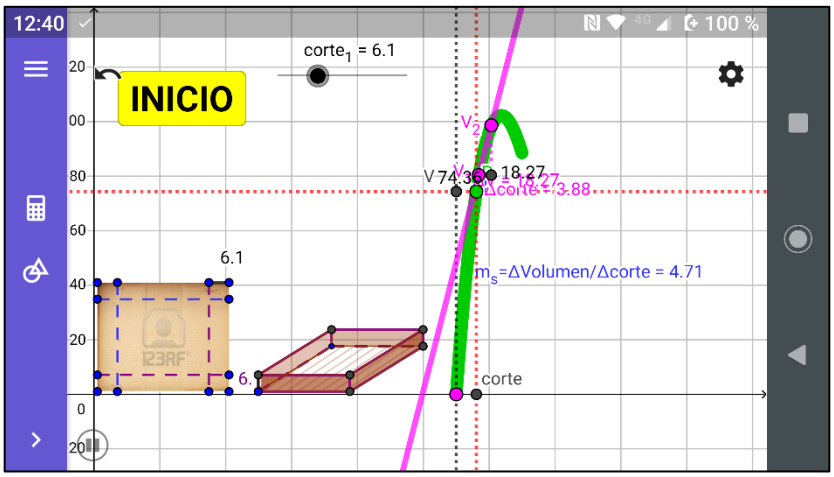
a) Aumenta b) Disminuye c) No cambia

17. Por lo tanto, podemos decir que, para el intervalo **corte** > $\mathbf{corte_{max}}$ el comportamiento de la gráfica de **V**(**corte**) ***vs***. **corte** es: a) creciente b) decreciente

18. Si ahora, analizamos los cambios de volumen **V** para valores de corte **<u>mayores</u>** a $\mathbf{corte_{max}}$ (corte > $\mathbf{corte_{max}}$), ¿cuál de las siguientes expresiones aplicaría? Elige una de las tres opciones subrayándola

a) $\mathbf{\Delta V} > 0$ b) $\mathbf{\Delta V} < 0$ c) $\mathbf{\Delta V} = 0$

Nos interesa analizar algunos aspectos de nuestra gráfica que aún no hemos discutido. Para ello abre el archivo **lacaja3.ggb** en tu dispositivo



NOTA IMPORTANTE: Cuando la secante se encuentre ubicada en un intervalo en donde la función sea decreciente el valor de **ΔV** que aparece en pantalla debe registrarse con signo negativo en la tabla

Observa en esta imagen que sobre la gráfica de la función **V(corte)** aparecen dos puntos $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ y, por esta pareja de puntos pasa una recta. Como esta recta corta a la curva en dos puntos, recibe el nombre de **SECANTE** de la curva. Además, en pantalla también tenemos la pendiente $\boldsymbol{m_s}$ de esta SECANTE (¿recuerdas que en tu curso de Geometría Analítica estudiaste el concepto de pendiente? ¿qué fórmula usabas para calcularla?)

19. Desplaza los puntos $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ colocándolos a ambos **antes** del punto máximo (punto más alto en la gráfica). ¿Cómo es el valor de $\boldsymbol{m_s}$ cuando $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ se encuentran antes de este punto?

a) positivo b) negativo c) cero

20. ¿Porqué? _____

21. ¿Cuál es la fórmula que en este caso se utiliza para calcular $\boldsymbol{m_s}$? Aplica tus conocimientos de Geometría Analítica y tu experiencia en prácticas con movimiento para determinar esta fórmula _____

A esta expresión se le suele llamar en Cálculo ***rapidez de cambio promedio***. Este nombre se debe a que da una idea de qué tanto cambia el volumen (**ΔV)** al tiempo que cambia el corte en las esquinas (**Δcorte**).

22. Ahora, desplaza los puntos $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ colocándolos a ambos **después** del punto máximo. ¿Cómo es el valor de $\boldsymbol{m_s}$ cuando $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ se encuentran **después** de este punto?

a) positivo b) negativo c) cero

23. ¿Porqué? _____

24. Enseguida, coloca a $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ en dos posiciones distantes y ve acercando $\mathbf{V_1}$ a $\mathbf{V_2}$ **GRADUALMENTE** (únicamente mueve a $\mathbf{V_1}$; a $\mathbf{V_2}$ mantenlo fijo). Para cada nueva posición de $\mathbf{V_1}$ anota los valores de **Δcorte**, de **ΔV** y de $\boldsymbol{m_s}$ en la tabla siguiente. Repite esto hasta que $\mathbf{V_1}$ quede tan cerca como sea posible de $\mathbf{V_2}$. Para ello, haz **Zoom In** (**aproximación**) al menos 5 veces, hasta que los **Δ** sean del orden de las cienmilésimas.

Δcorte	ΔV	$m_s = \frac{\Delta V}{\Delta corte}$	$\lvert \Delta m_s \rvert$

25. ¿Cómo calificarías al **último** valor de **Δcorte** que registraste en la tabla anterior?

a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

26. ¿Cómo calificarías al **último** valor de **ΔV** que registraste en la tabla anterior?

a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

27. Sin embargo, al realizar estos cambios ¿qué observas que sucede con el valor de $m_s = \frac{\Delta V}{\Delta corte}$ que registraste en la tabla anterior?

a) Cada vez m_s se vuelve más grande b) Cada vez m_s se vuelve más y más pequeña

c) Prácticamente se mantiene constante

Aquí es importante destacar que, si se continua acercando el punto $\mathbf{V_1}$ al punto $\mathbf{V_2}$ el valor de la $m_s = \frac{\Delta V}{\Delta corte}$ ya no cambia. En matemáticas esto se expresa con la frase "***porque ya llegó al límite***".

28. ¿Cómo consideras el último valor de $|\Delta m_s|$?

a) valor grande b) valor pequeño c) valor infinitamente pequeño

Como ahora los puntos $\mathbf{V_1}$ y $\mathbf{V_2}$ se volvieron un solo punto, entonces la recta **SECANTE** se volvió recta **TANGENTE** a la curva. La noción de valores numéricos infinitamente pequeños surgió en los inicios del **Cálculo** y se les dio el nombre de **DIFERENCIALES**. Son cambios infinitamente pequeños, pero que no llegan a ser iguales a cero. Por ello, para escribirlos ya no se utiliza el símbolo **Δ**, sino que se representan con una ***d*** y la razón de cambio promedio que en nuestro caso era

$$m_s = \frac{\Delta V}{\Delta corte}$$

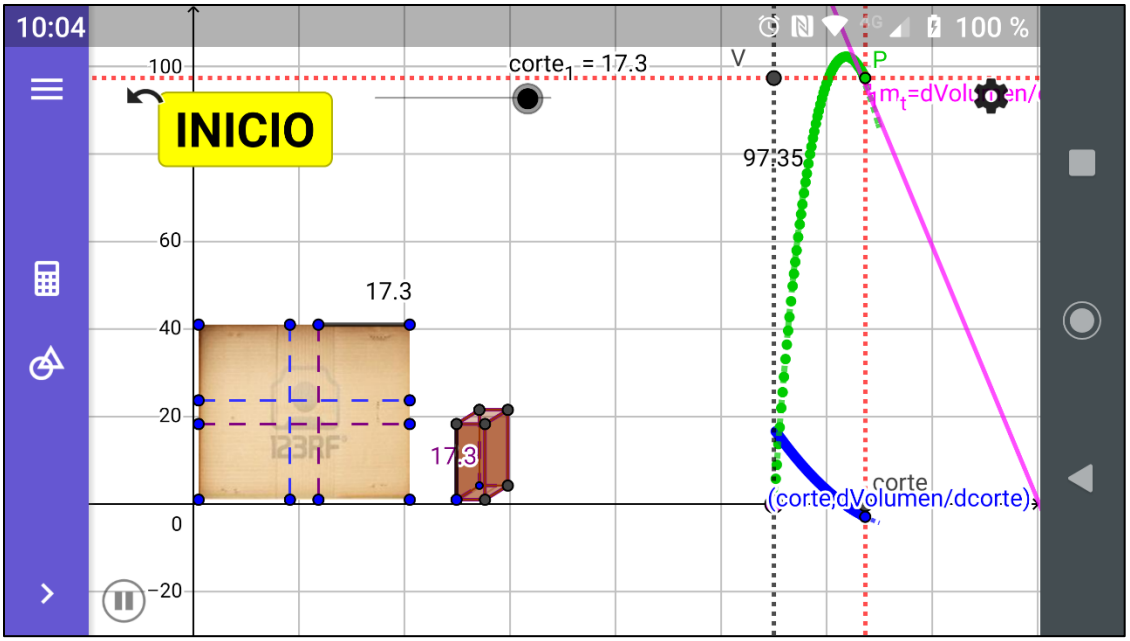
y entonces podemos decir que

$$\boxed{\lim_{\Delta corte \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta corte} = m_t = \frac{dV}{dcorte}}$$

que se considera una **razón instantánea de cambio**

Y esto, ¿de qué nos sirve?

29. Para dar respuesta a esta última pregunta, carga en tu dispositivo el archivo **lacaja4.ggb** y explora la construcción moviendo el deslizador **corte**, que se encuentra en la parte superior de la pantalla observando qué sucede con la TANGENTE a la gráfica de **V(corte)**, con su pendiente $\boldsymbol{m_t}$ y con la gráfica que se observa en la parte inferior de la pantalla



Las respuestas a las preguntas siguientes, tómalas de la gráfica de la pantalla de tu dispositivo:[4]

30. ¿Cuál es el valor de este volumen máximo, $\mathbf{V_{max}}$? _____

31. ¿Para qué valor de corte se alcanza este volumen máximo, $\mathbf{corte_{max}}$? _____

32. ¿Cuál es el signo de la pendiente de la tangente (m_t) a la curva **antes** de que el punto **P** alcance el punto máximo?

_____

33. ¿Cuál es el signo de la pendiente de la tangente (m_t) a la curva **después** de que el punto **P** alcanza el punto máximo?

_____

_____

34. ¿Cuánto vale la pendiente de la tangente (m_t) cuando el volumen de la caja alcanza su valor más alto $\mathbf{V_{max}}$? _____

_____

35. Respecto de la curva de la parte inferior, ¿cómo son los valores de la ordenada del punto generador de esta gráfica cuando el punto **P** alcanza el máximo?

a) positivo b) negativo c) cero

36. Respecto de esta curva, ¿cómo son los valores de la ordenada del punto generador cuando el punto **P** alcanza el máximo?

a) positivo b) negativo c) cero

37. ¿Cuál es el valor de su ordenada justo cuando el punto **P** alcanza el punto máximo? _____

_____

[4] La gráfica de la función que aparece en tu pantalla está afectada por un factor de proporcionalidad, para efectos de presentación y ésta es **Volumen(corte) = 0.03*(40-2corte)²corte**

38. ¿Consideras que esta gráfica es la gráfica de una función? _____

39. Si tu respuesta anterior es afirmativa, ¿cuáles serían las variables presentes en esta función? _____

_____

40. ¿Identificas algún tipo de relación entre las dos gráficas presentes en la pantalla? Coméntalo con tus compañeros de equipo y explícalo _____

_____

_____

41. Investiga el significado del término **OPTIMIZACIÓN** _____

_____

_____

42. Investiga la importancia de la **OPTIMIZACIÓN** de los recursos de una empresa _____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

43. Con tu maestro(a) revisarás el procedimiento para obtener, a partir de una función, una expresión para calcular su **rapidez instantánea de variación** y su relación con los procesos de **OPTIMIZACIÓN**.