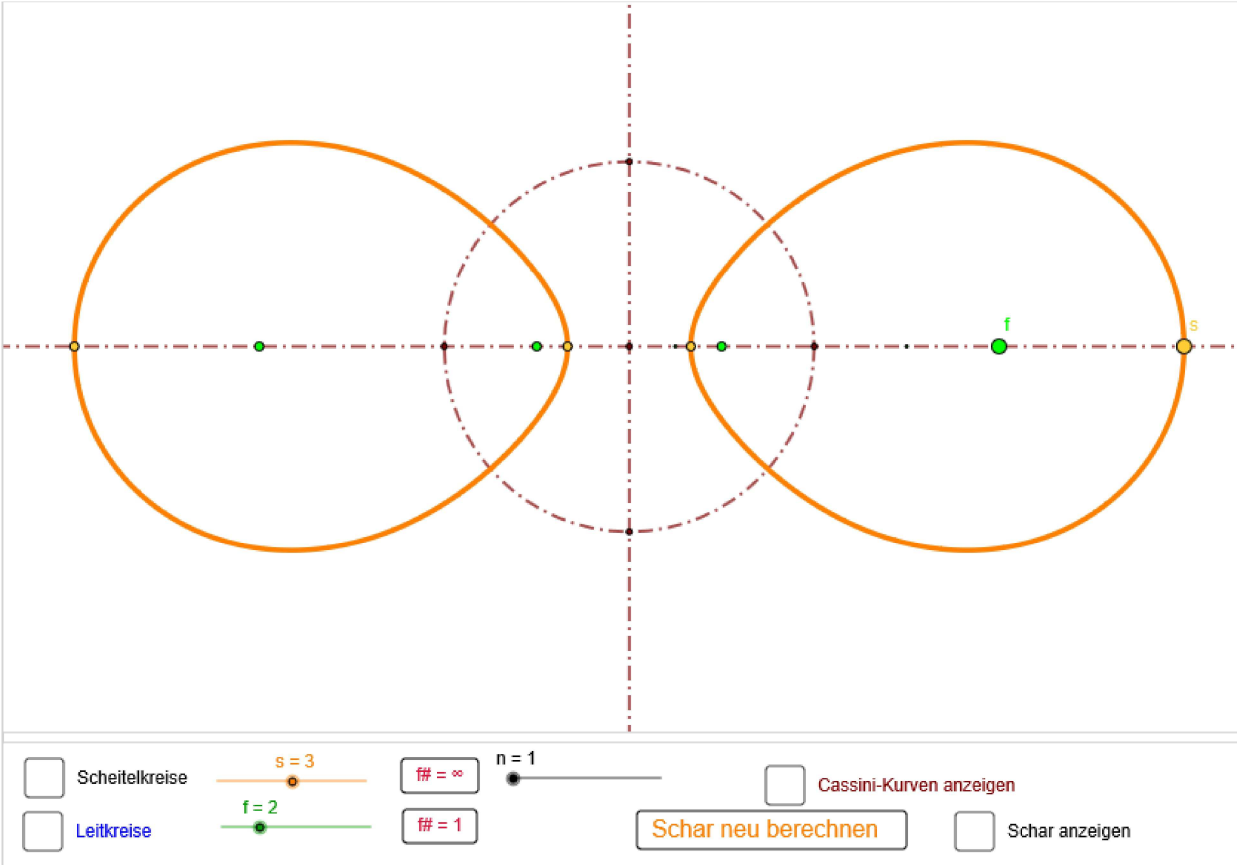
elliptische Funktion

Zur Verringerung der Ladezeit werden die impliziten Kurven erst nach ***Änderung von n*** mit dem ***button*** angezeigt!



Diese Seite ist Teil des ***GeoGebra-Books*** Moebiusebene. **(August 2019)**

Elliptische Funktionen sind komplex-differenzierbare Funktionen, welche einer ***Differential-Gleichung*** des Typs genügen

- $f'^2 = c \cdot (f - e_1) \cdot (f - e_2) \cdot (f - e_3) \cdot (f - e_4)$

Liegt einer der Nullstellen e_i - wir sagen "***Brennpunkte***" - in ∞, so liegt eine **WEIERSTRAßsche** $\wp$-Funktion vor.
Die oben angezeigten implizit definierten ***konfokalen bizirkularen Quartiken*** sind Lösungen der Differentialgleichung für die *reellen* ***Brennpunkte*** $f, -f, \frac{1}{f}, -\frac{1}{f}$. Die impliziten Gleichungen lauten:

- $(x^2+y^2)^2 - \left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) \cdot x^2 - \frac{\left(\left(f^2+\frac{1}{f^2}\right)\cdot\left(s^2+\frac{1}{s^2}\right)-4\right)\cdot f^2}{\left(f^2-s^2\right)\cdot\left(f^2-\frac{1}{s^2}\right)} \cdot y^2 + 1 = 0$, wobei $f \in \mathbb{R}$ die ***Brennpunkte*** und $s \in \mathbb{R}$ die ***Scheitel*** festlegen.

Zwei der Kurven sind ***möbiusgeometrisch*** **CASSINI**-***Quartiken***.
Siehe die Kapitel Hermitesche Abbildungen und bizirkulare Quartiken und Quadratische Vektorfelder oder elliptische Funktionen

Leider kann man (in ***ge*** ***gebra***?) die Kurven nicht mit einer ***explizit*** gegebenen komplexen Funktion anzeigen wie zB. die zu $z \mapsto w = \sin(z)$ oder $z \mapsto w = \tan(z)$ gehörenden Kurven.

4 verschiedene ***Punkte*** auf einem Kreis besitzen stets 4 ***Symmetrie-Kreise*** (einer davon ist imaginär!).
Sie lassen sich mit Hilfe einer ***Möbius-Transformation*** so anordnen wie im Applet angezeigt.
Zu jeder Symmetrie gehören 2 ***Scheitelkreise***; spiegelt man einen ausgewählten ***Brennpunkt*** (hier **f**),

an diesen ***Scheitelkreisen***, so erhält man ***Punkte*** der zugehörigen ***Leitkreise***. Diese liegen in einem elliptischen Kreisbüschel mit den Grundpunkten **f** und **f#**;

f# erhält man als Spiegelbild von **f** an den ***Leitkreisen***!
Fällt **f#** mit ∞ oder mit 1 zusammen, so ist die zugehörige Quartik ***Möbiustransformierte*** einer **CASSINI**-Quartik.

Gleichungen:

- ***Leitkreis*** zur ***y-Achsen-Symmetrie***: $x^2+y^2-\frac{s^4-1}{f\cdot s^2}\cdot x+\frac{1}{f^2}=0$
- ***Leitkreis*** zur Symmetrie am ***Einheitskreis***: $x^2+y^2-\frac{2\cdot f\cdot\left(s^2-1\right)^2}{4\cdot f^2\cdot s^2-\left(s^2+1\right)^2}\cdot x-\frac{f^2\cdot\left(s^2+1\right)^2-4\cdot s^2}{4\cdot f^2\cdot s^2-\left(s^2+1\right)^2}=0$
- ***Leitkreis*** zur ***elliptischen Symmetrie***: $x^2+y^2-\frac{2\cdot f\cdot\left(s^2+1\right)^2}{4\cdot f^2\cdot s^2-\left(s^2-1\right)^2}\cdot x-\frac{f^2\cdot\left(s^2-1\right)^2-4\cdot s^2}{4\cdot f^2\cdot s^2-\left(s^2-1\right)^2}=0$
- **f#**: $f\#=\frac{f^2\cdot\left(s^4+1\right)-2\cdot s^2}{f\cdot\left(2\cdot f^2\cdot s^2-s^4-1\right)}$
- **f# =** ∞, dann ist $s=\sqrt{f^2+\sqrt{f^4-1}}$
  und man erhält die **CASSINI**-Gleichung $|z-f|^2\cdot|z+f|^2=\left|z^2-f^2\right|^2=f^4-1$.
  Die **CASSINI**-Quartik kann man mit ***Wurzelfunktion*** "konstruieren"!
- **f#** = 1, dann ist $s=\frac{\sqrt{\sqrt{f^2+1}\cdot(f-1)+f^2-f+1}}{\sqrt{f}}$

  und man erhält die Gleichung $\left(x^2+y^2\right)^2-\frac{2\cdot\left(f^2-f+1\right)}{f}\cdot x^2-\frac{2\cdot\left(f^2+f+1\right)}{f}\cdot y^2+1=0$

Die übrigen ***Quartiken*** können mit Hilfe der ***Leitkreise*** "konstruiert" werden!

Die Gleichungen wurden ohne großen Aufwand mit der längst vergangenen **CAS**-Software $\overrightarrow{DERIVE}$ berechnet!

– Walter Füchte