

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

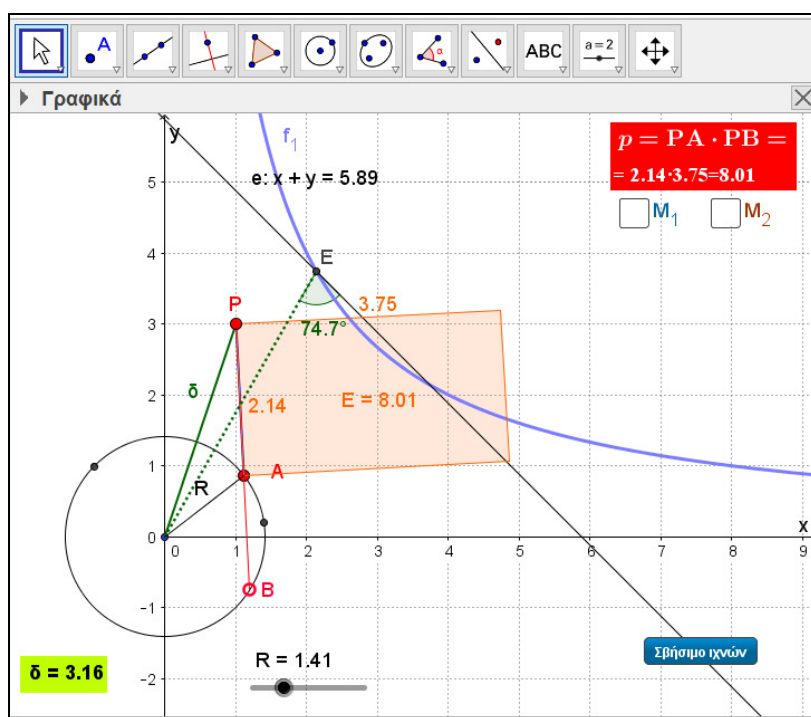
Μεταπτυχιακό Τμήμα

Τομέας: Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Ενσωμάτωση της Τεχνολογίας στη Δ.τ.Μ

Δύναμη σημείου ως προς κύκλο: “ένας αθέατος κόσμος συμμεταβολών”

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ



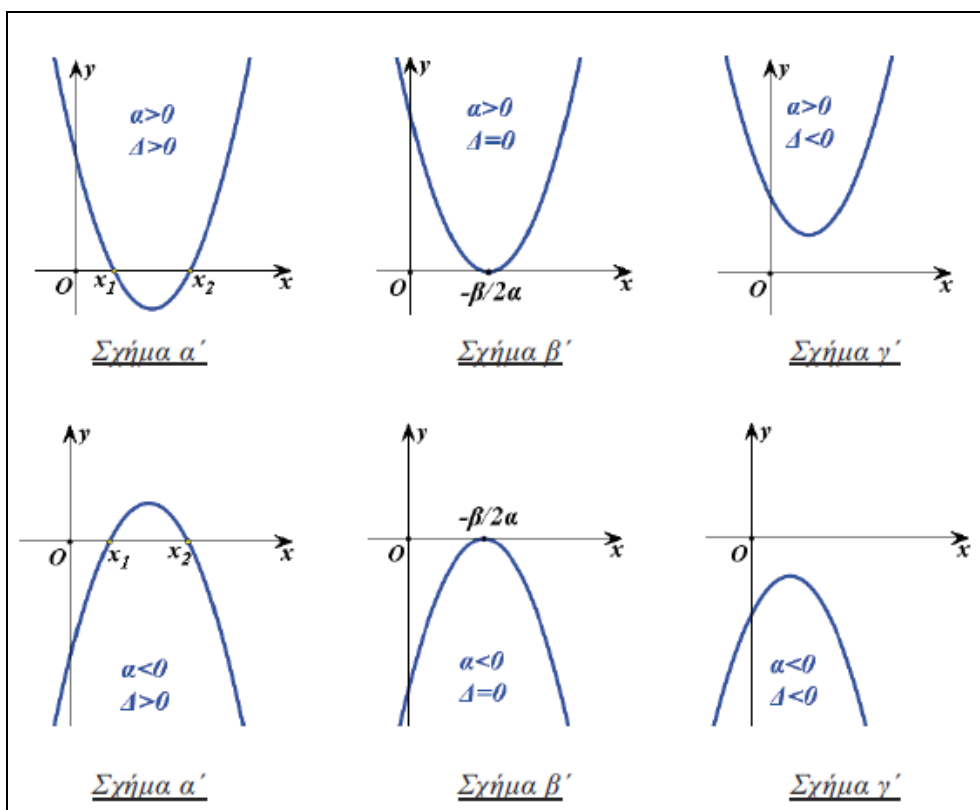
Παρέμβαση για τη Β' Λυκείου Προσανατολισμού
Διάρκεια: 2 + 1 διδακτικές ώρες

[17/12/2015]

Μ. Τσιλιπιδής

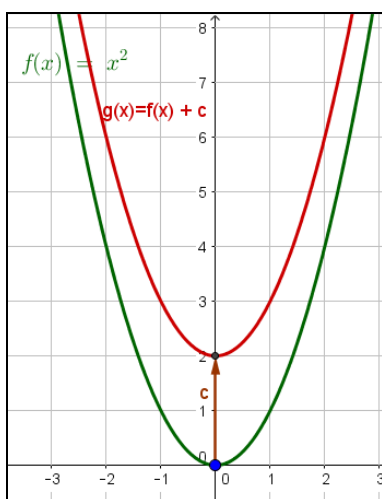
Υπενθυμίσεις Βασικών Γνώσεων

I. Η συνάρτηση του τριωνύμου: $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

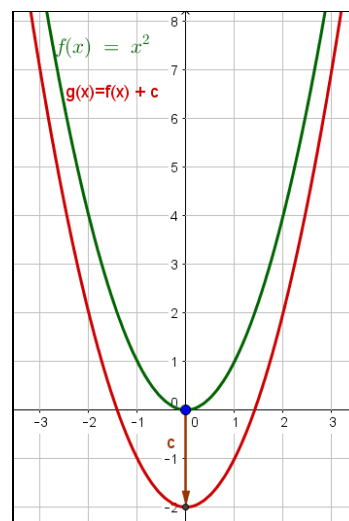


II. Κατακόρυφες μετατοπίσεις της συνάρτησης: $f(x) = x^2$

$c > 0$



$c < 0$



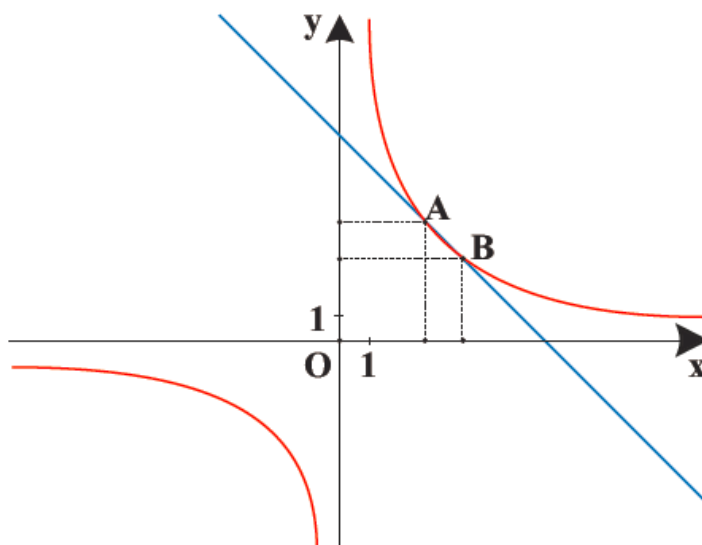
III. Σχετική θέση υπερβολής και ευθείας. Γραφική επίλυση μη γραμμικών συστημάτων
(Εφαρμογή σχολικού Άλγεβρας σελ. 25.)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1^ο Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} x+y=5 & (1) \\ xy=6 & (2) \end{cases}$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $x+y=5$ παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη εξίσωση $xy=6$ παριστάνει την υπερβολή $y = \frac{6}{x}$. Επομένως οι συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της υπερβολής θα μας δώσουν τις λύσεις του συστήματος.



Φύλλο Εργασίας (1)

1^η Φάση

Στη δραστηριότητα υπάρχουν:

Ένα σημείο P, ένας κύκλος (O,R) που η ακτίνα του μεταβάλλεται από το δρομέα R η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία P, A και B. Επίσης, υπάρχει η μέτρηση για το γινόμενο $p = PA \cdot PB$.

1. Μετακινείτε το σημείο B στην περιφέρεια του κύκλου. Τι παρατηρείτε για την τιμή του γινομένου $p = PA \cdot PB$;

2. Προσπαθήστε να εντοπίσετε τις παραμέτρους που καθορίζουν τις τιμές του γινομένου p.

3. Πλησιάστε πολύ κοντά τα σημεία A και B. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση της ευθείας PAB και του κύκλου;

4. Πώς μπορείτε να αξιοποιήσετε την προηγούμενη παρατήρηση ώστε να βρείτε τον τύπο που υπολογίζει την τιμή του γινομένου p.

5. I. Επαναλάβετε τα βήματα 1 & 2 όταν το σημείο P είναι μέσα στον κύκλο. Ισχύουν τώρα ανάλογα συμπεράσματα με τα βήματα 1 & 2; Ναι Όχι

II. Προσπαθήστε να δώσετε τώρα τον τύπο που δίνει την τιμή του γινομένου p.

6. Γενικεύστε τα συμπεράσματα των ερωτήσεων 4 και 5 στο επόμενο πλαίσιο.

¹ Στα κενά κουτιά δίνονται οι αναμενόμενες από τους μαθητές απαντήσεις.

7. Βρείτε ένα γεωμετρικό μέγεθος που να περιγράφει το γινόμενο p .

8. Με το σημείο P να είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη [**Αναπαράσταση**]. Εμφανίζεται ένα ορθογώνιο E με πλευρές PA και PB και η μέτρηση $\tau = PA+PB$ της ημιπεριμέτρου του.

I. Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου B στον κύκλο (O,R) και παρατηρήστε τις τιμές της ημιπεριμέτρου τ . Τί φαίνεται να ισχύει για την περίπτωση που το B τείνει να ταυτιστεί με το A ;

II. Αλλάξτε διαδοχικά την ακτίνα R του κύκλου (O,R) και την απόσταση δ και επαναλάβετε τον πειραματισμό. Διατυπώστε στο πλαίσιο την εικασία σας.

9. Τι σχήμα φαίνεται να αποκτά το ορθογώνιο E , όταν το A τείνει να ταυτιστεί με το B ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

10. Συνδυάζοντας τις παρατηρήσεις σας από το 7^ο και 8^ο βήμα, διατυπώστε έναν ισχυρισμό που να αφορά στα ευρήματα αυτών των βημάτων.

2^η Φάση

11. I. Αν θέσουμε $PA=x$ και $PB=y$, γράψτε ένα σύστημα (Σ) δύο εξισώσεων με αγνώστους τα x και y που να περιγράφει τα μεγέθη p και τ .

- II. Να δείξετε ότι το σύστημα (Σ) οδηγεί στην εξίσωση 2^{ου} βαθμού: $x^2 - \tau x + p = 0$

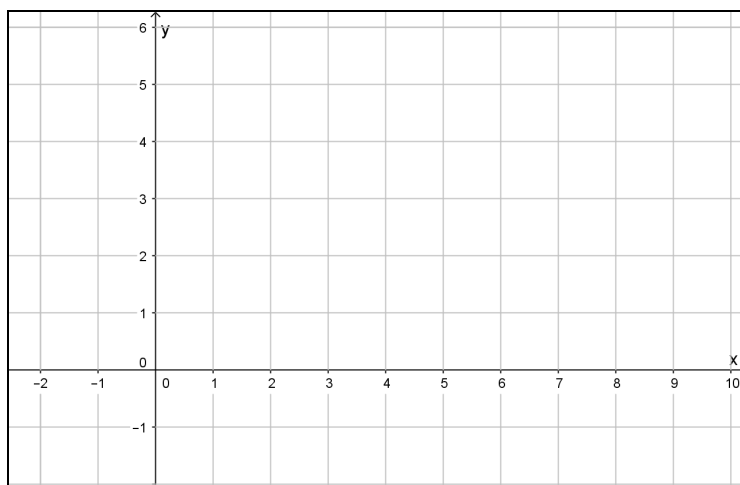
12. Ανοίξτε το διακόπτη $[q(x)]$: Εμφανίζεται η γραφική παράσταση της παραβολής:
 $q(x) = x^2 - \tau x + p$.

Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές των R και δ , καθώς και για διάφορες θέσεις του σημείου B .

- Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τη σχετική θέση της παραβολής με τον άξονα xx' ;
- Πώς μεταφράζεται αυτό αλγεβρικά;

13. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις σας να αποδείξετε τον ισχυρισμό που διατυπώσατε στην 9^η ερώτηση.

14. Τί παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) σε ένα σύστημα συντεταγμένων xOy ;
Να τις αναπαραστήσετε προσεγγιστικά παρακάτω.



15. Πλησιάστε αρκούντως κοντά τα σημεία B και A.

A. Τι φαίνεται να ισχύει για τη σχετική θέση των γραμμών που περιγράψατε στο προηγούμενο ερώτημα;

B. Τι φαίνεται να ισχύει για τη γωνία $\widehat{O\hat{E}Z}$; Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

16. A. Όταν το σημείο P είναι εξωτερικό του κύκλου, ανοίξτε το διακόπτη $[\tau(\max)]$ και δώστε κίνηση στο σημείο B (διακόπτης [κίνηση B]). Εμφανίζεται το ίχνος του σημείου T που έχει συντεταγμένες $(x, x + \frac{p}{x})$ όπου $x = PA$ και $p = PA \cdot PB$.

- Έχει ακρότατα αυτή η συνάρτηση;
- Αν ναι, τι είδους ακρότατα έχει και σε ποιες θέσεις του σημείου B εμφανίζονται;

B. Να δικαιολογήσετε αλγεβρικά τα προηγούμενα ευρήματα.

3^η Φάση – Άσκηση²

1. Ορίζουμε το σημείο M_1 με συντεταγμένες $(\delta, f(\delta))$ με $f(\delta) = \delta^2 - R^2$ (³) (διακόπτης M_1).

Πειραματιστείτε για διάφορες θέσεις του σημείου P και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1 .

- Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

2. Εξετάστε για ποιες θέσεις του σημείου P συμβαίνουν οι περιπτώσεις: $f(\delta) > 0$, $f(\delta) = 0$ και $f(\delta) < 0$. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο Γεωμετρίας σχετικό εδάφιο, που να δικαιολογεί γεωμετρικά, τα ευρήματά σας.

3. Κλείστε το διακόπτη M_1 . Ορίζουμε τώρα το σημείο M_2 με συντεταγμένες $(R, g(R))$ όπου $g(R) = \delta^2 - R^2$.

Πειραματιστείτε για διάφορες τιμές του R (διακόπτης \rightarrow Μεταβολή R) και παρατηρήστε τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_2 .

- Ποιο τμήμα γνωστής γραφικής παράστασης, φαίνεται να είναι αυτή η γραμμή; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

² Μπορεί να δοθεί ως άσκηση για υλοποίηση στο σπίτι ανάλογα με τον προσφερόμενο χρόνο.

³ Η παράσταση $\delta^2 - R^2$ καλείται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται με:

$\mathcal{D}_{(O,R)}^P$

4. Εξετάστε τα σημεία της 2^{ης} ερώτησης και για την περίπτωση του σημείου M_2 .

5. Με ανοικτό το διακόπτη M_2 ανοίξτε και το διακόπτη M_1 και δώστε πάλι [Μεταβολή του R].

- Τι παρατηρείτε τώρα για τη γραμμή που διαγράφουν τα ίχνη του σημείου M_1 ;
- Είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;
- Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την 1^η Ερώτηση;

6. Επαναλάβετε τον προηγούμενο πειραματισμό μεταβάλλοντας το δ . Τι παρατηρείτε για τη γραμμή που διαγράφει τώρα το σημείο M_2 ; Πού οφείλεται αυτή η αλλαγή σε σχέση με την 3^η ερώτηση;

7. Βρείτε στο σχολικό σας βιβλίο (Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου – Κεφ. 3^ο Κωνικές Τομές) σχετικό εδάφιο που να ερμηνεύει αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας στην ερώτηση 15.Α.

Παράρτημα

Η σχέση (I), στο 16^ο ερώτημα λαμβάνει υπόψη την άσκηση 4 (σελ. 64) του σχολικού βιβλίου στην οποία ουσιαστικά ορίζεται η **απόσταση ενός (εξωτερικού) σημείου από έναν κύκλο**.

$$i) \quad M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma,$$

$$ii) \quad \frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_a < \frac{\beta + \gamma}{2},$$

$$iii) \quad \mu_a + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2r.$$

4. Έστω κύκλος (O, R) διαμέτρου AB και σημείο Σ της ημιευθείας OA . Για κάθε σημείο M του κύκλου να αποδειχθεί ότι $\Sigma A \leq \Sigma M \leq \Sigma B$. (Το τμήμα ΣA λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).

5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν η διχοτόμος δ_a τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β να αποδείξετε ότι:

3

4