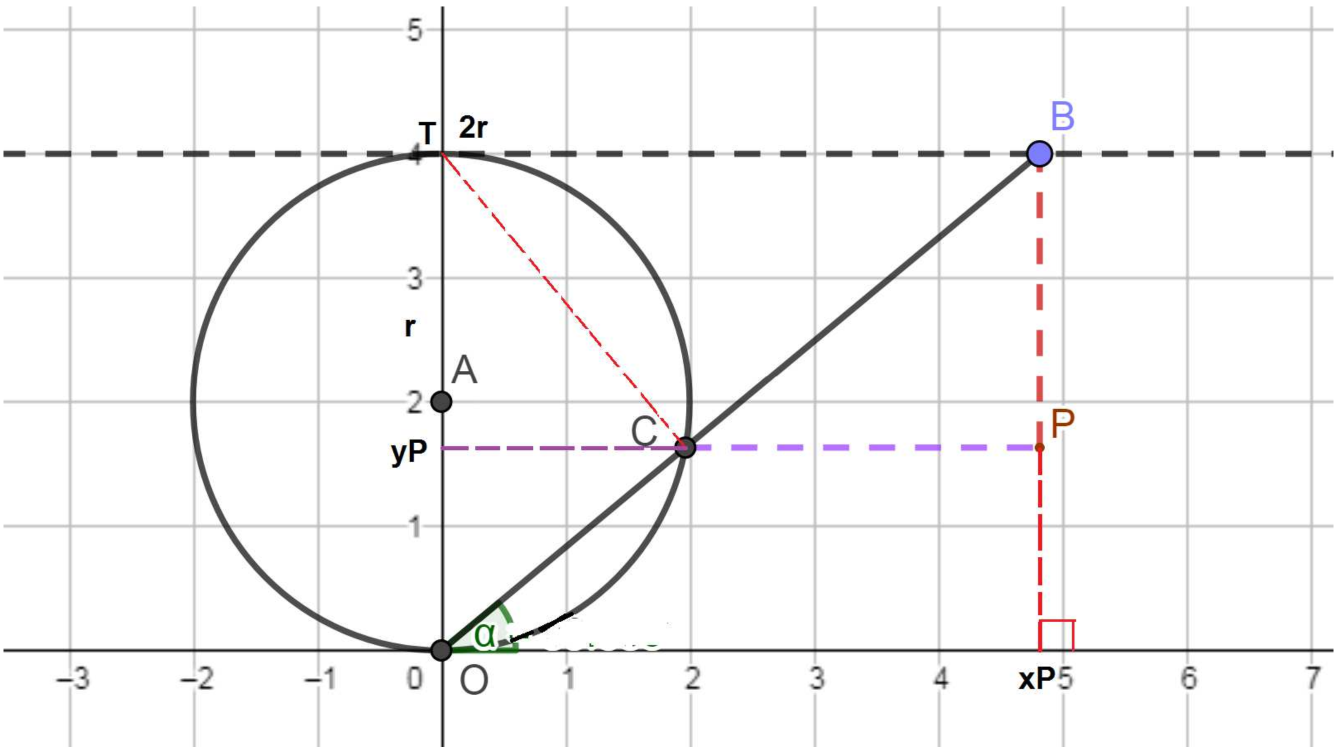
Noel Enrique Llanos Almunia.

Curva de María Agnesi (Bruja de María Agnesi). Ecuación paramétrica. Cálculo de longitud de arco.

- Se analizan y definen las coordenadas x_P e y_P que toma el punto P a medida que el ángulo α toma valores de 0 a π.



De la figura se deduce que:

$x_P = \overline{OB} \cdot \cos(\propto) \qquad \overline{OB} = 2r/\sin(\alpha)$

$x_P = 2r \cdot \cot(\alpha)$

$y_P = \overline{OC} \cdot \sin(\alpha) \qquad \overline{OC} = 2r \cdot \sin(\alpha)$

$y_P = 2r \cdot \text{sen}^2(\alpha)$

❖ Estimación de la longitud de la curva en el intervalo $(\pi/4 \le \alpha \le \pi/2)$ a partir de su expresión paramétrica.

$$L = \int \sqrt{(\partial x/\partial \alpha)^2 + (\partial y/\partial \alpha)^2} \cdot d\alpha \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = -2r \cdot \csc^2(\alpha)\ , \ \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 2r\sin(2\alpha)$$

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{4r^2}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} + 16r^2\operatorname{sen}^2(\alpha)\cos^2(\alpha)} \cdot d\alpha$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4r^2 + 16r^2\operatorname{sen}^6(\alpha)\cos^2(\alpha)}}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} \cdot d\alpha$$

$$L = 2r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + 4\operatorname{sen}^6(\alpha)\cos^2(\alpha)}}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} \cdot d\alpha$$

La anti derivada de la función sub-integral no es una función elemental, por lo que el cálculo de la integral no es posible por métodos convencionales de integración. Es conveniente determinar su serie de potencias y luego integrar término a término.

$$L = 2r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + 4\operatorname{sen}^6(\alpha)\cos^2(\alpha)}}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} \cdot d\alpha$$

$$= 2r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{0.5}{n} \left[\frac{4^n\operatorname{sen}^{6n}(\alpha)\cos^{2n}(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}\right] d\alpha$$

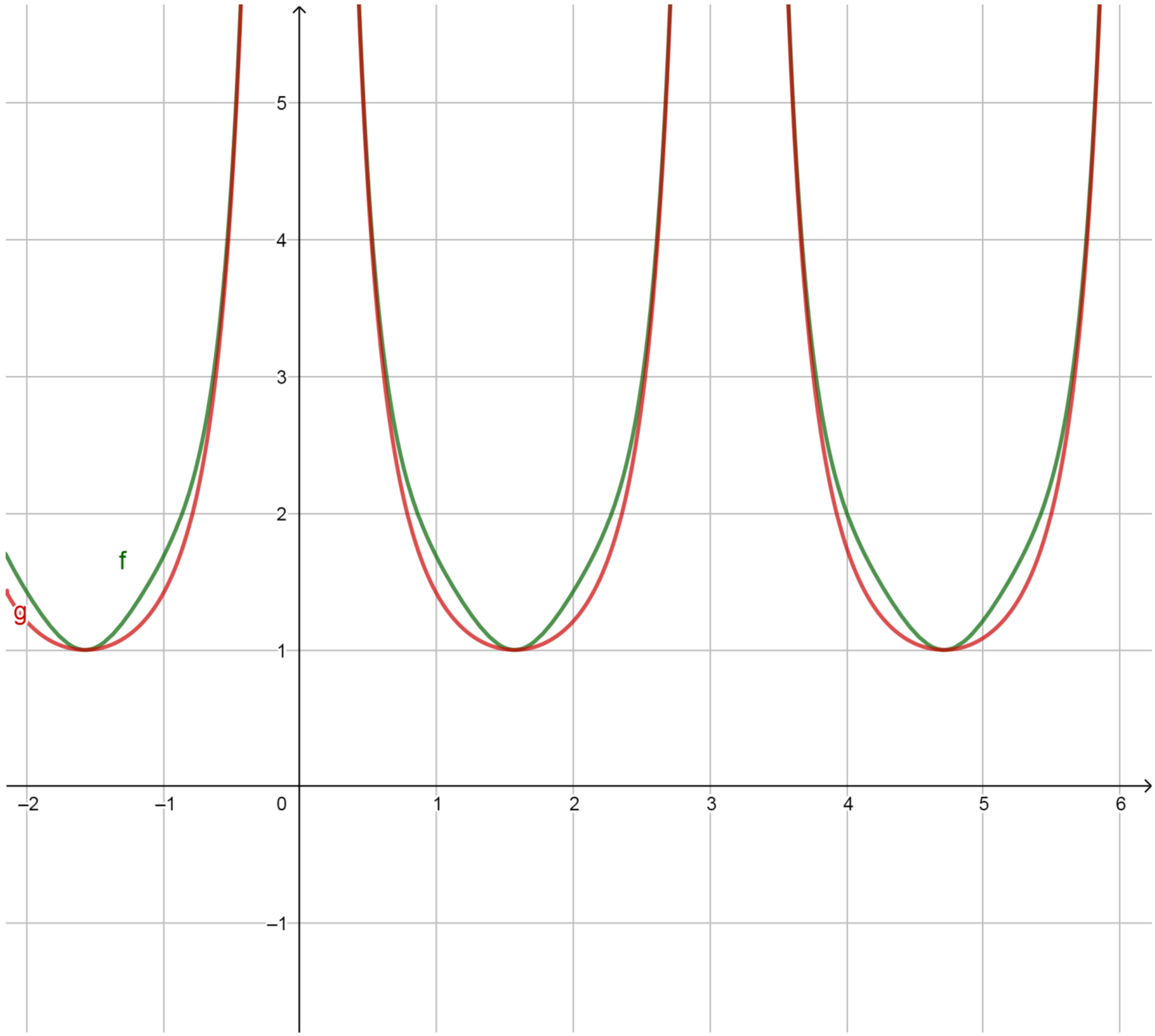
$$L = 2r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\csc^2(\alpha) + 2\operatorname{sen}^4(\alpha)\cos^2(\alpha) - 2\operatorname{sen}^{10}(\alpha)\cos^4(\alpha) + 4\operatorname{sen}^{16}(\alpha)\cos^6(\alpha)$$
$$+ \cdots]d\alpha$$

Veamos gráficamente la coincidencia de la función sub-integral con su representación en serie de potencias con un término y dos términos de la serie respectivamente.

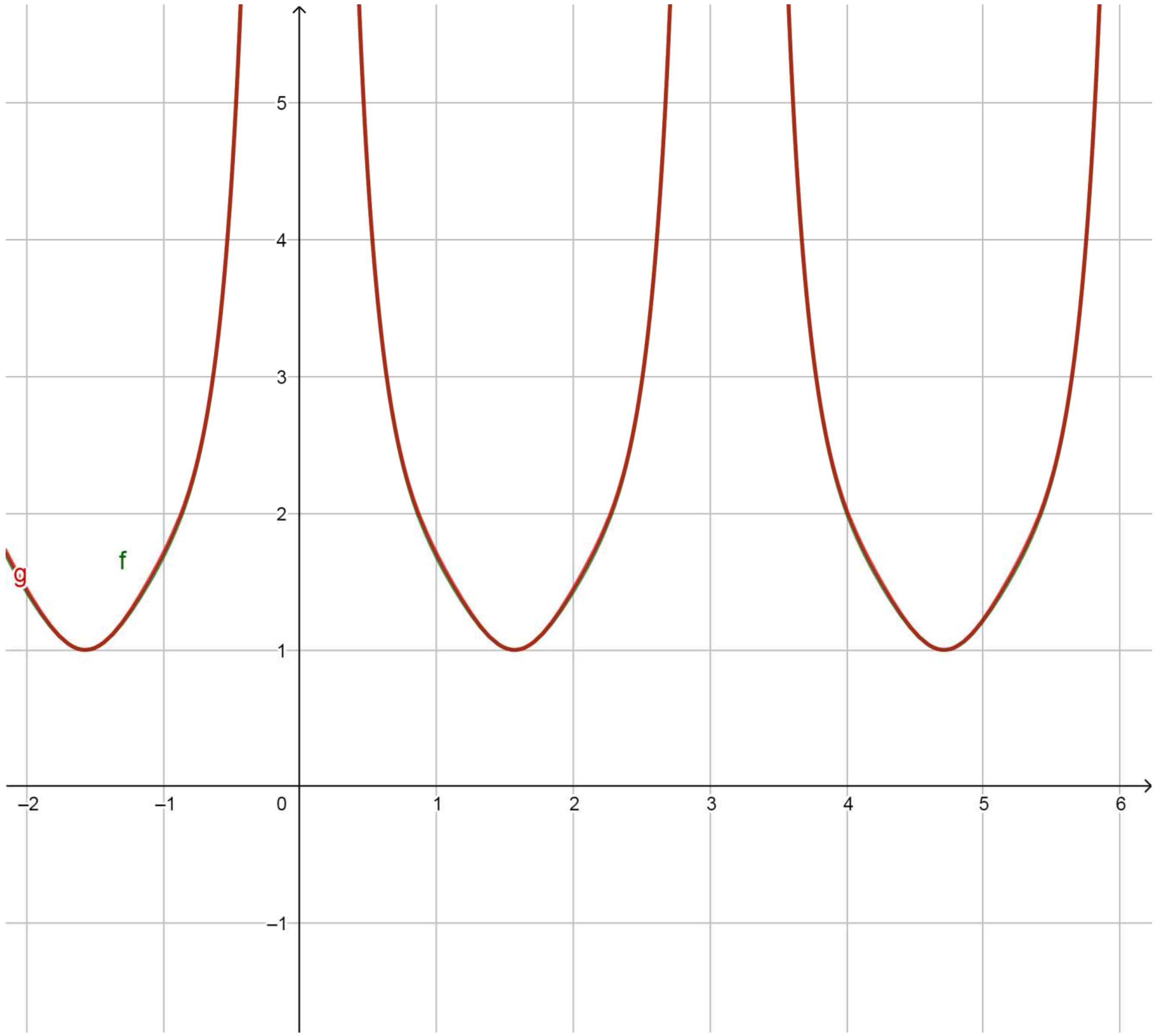
$$f_{(x)} = \frac{\sqrt{1 + 4\operatorname{sen}^6(\alpha)\cos^2(\alpha)}}{\operatorname{sen}^2(\alpha)}$$

$$g_{(x)} = \csc^2(\alpha) + 2\operatorname{sen}^4(\alpha)\cos^2(\alpha) - 2\operatorname{sen}^{10}(\alpha)\cos^4(\alpha) + 4\operatorname{sen}^{16}(\alpha)\cos^6(\alpha) + \cdots$$

En la misma gráfica la función $f_{(x)}$ (trazo verde) y $g_{(x)} = \csc^2(\alpha)$ (trazo rojo), con un término.



En la misma gráfica la función $f_{(x)}$ (trazo verde) y $g_{(x)} = \csc^2(\alpha) + 2\text{sen}^4(\alpha)\cos^2(\alpha)$ (trazo rojo)



El radio de convergencia de la serie de potencias es $R = \infty$, y con dos términos se obtiene buena aproximación.

$$L \approx 2r\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[\csc^2(\alpha)+2\mathrm{sen}^4(\alpha)\cos^2(\alpha)]d\alpha$$

Calculando las integrals indefinidas:

$$I_1 = \int \csc^2(\alpha)d\alpha = -\cot(\alpha)+C$$

$$I_2 = \int \mathrm{sen}^4(\alpha)\cos^2(\alpha)d\alpha = \frac{1}{4}\int \mathrm{sen}^2(2\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{1}{8}\int \mathrm{sen}^2(2\alpha)\,(1-\cos(2\alpha))d\alpha$$

$$I_2 = \frac{1}{8}\int [\mathrm{sen}^2(2\alpha)-\mathrm{sen}^2(2\alpha)\cos(2\alpha)]\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos(4\alpha))d\alpha - \frac{1}{16}\int \mathrm{sen}^2(2\alpha)\,d(\sin(2\alpha))$$

$$= \frac{1}{16}\alpha - \frac{1}{64}\sin(4\alpha) - \frac{1}{48}\mathrm{sen}^3(2\alpha)+C$$

$$I_2 = \frac{1}{16}\alpha - \frac{1}{64}\sin(4\alpha) - \frac{1}{48}\mathrm{sen}^3(2\alpha)+C$$

$$L \approx 2r\left\{\left(-\cot(\alpha)+\frac{1}{8}\alpha-\frac{1}{32}\sin(4\alpha)-\frac{1}{24}\mathrm{sen}^3(2\alpha)\right)\begin{matrix}(\pi/2)\\(\pi/4)\end{matrix}\right\} = 2r(1.14)$$

$$L \approx (2.28)r$$

Si comprobamos directamente la integral con Mathcad 15 (Geogebra no entrega resultado) arroja el resultado:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{1+4\cdot\sin(x)^6\cdot\cos(x)^2}}{\sin(x)^2}\right)dx = 1.13$$

Por lo que el cálculo a partir de la serie de potencias con dos términos arroja buena aproximación. Si utilizamos tres términos la aproximación es mucho mayor.