Kompleksni brojevi

Algebarski oblik kompleksnog broja je

$$z = x + iy\,, \quad x, y \in \mathbb{R}\,,$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z \qquad \text{realni deo}\,, \\ y &= \operatorname{Im} z \qquad \text{imaginarni deo}\,. \end{aligned}$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja je

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\,, \quad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}\,,$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} r &= |z| \qquad \text{moduo}\,, \\ \theta &= \operatorname{Arg} z \qquad \text{argument}\,. \end{aligned}$$

Ako je $\theta \in (-\pi, \pi]$, tada je $\quad \theta = \arg z \qquad$ glavna vrednost argumenta .

Eksponencijalni oblik kompleksnog broja je

$$z = re^{i\theta}\,, \qquad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}\,,$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} r &= |z| \qquad \text{moduo}\,, \\ \theta &= \operatorname{Arg} z \qquad \text{argument}\,. \end{aligned}$$

Konjugovano komleksni broj kompleksnog broja

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

je

$$\overline{z} = x - iy = r\big(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\big) = re^{-i\theta}\,.$$

Operacije sa kompleksnim brojevima

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1e^{i\theta_1}\,,$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2e^{i\theta_2}$$

definisane su na sledeći način:

Sabiranje:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\,.$$

Oduzimanje:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)\,.$$

Množenje:

$$z_1 \cdot z_2 = z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\,,$$
$$z_1 \cdot z_2 = z_1z_2 = r_1r_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big) = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\,.$$

Deljenje ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\;\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2}\,,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big) = \frac{r_1}{r_2}\;e^{i(\theta_1-\theta_2)}\,.$$

Moavrova formula:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n \in \mathbb{Z})\,.$$

Stepenovanje kompleksnog broja $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^ne^{in\theta} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Korenovanje kompleksnog broja $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$:

$$\sqrt[n]{z} \in \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
$$u_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$
$$u_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Zadaci:

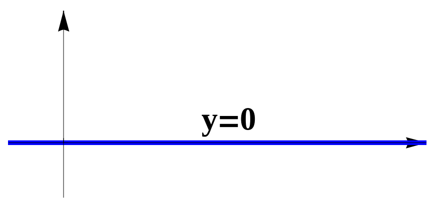
1. Predstaviti u kompleksnoj ravni skup rešenja jednačina:

a) $z - \bar{z} = 0$; **b)** Re $z = -2$; **c)** Im $z = 3$; **d)** $|z| = 5$; **e)** arg $z = -\pi/3$.

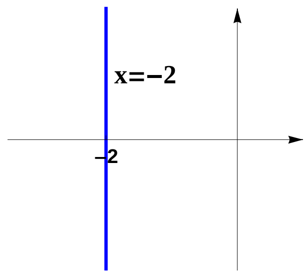
Rešenje: Neka je $z = x + iy$.

a) $z - \bar{z} = 0 \;\Leftrightarrow\; x + iy - (x - iy) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2iy = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$. Traženi skup tačaka je prava $y = 0$ – x-osa.

b) Re $z = -2 \;\Leftrightarrow x = -2$, što je prava $x = -2$ u kompleksnoj ravni.



a)

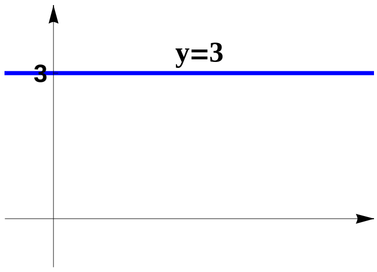


b)

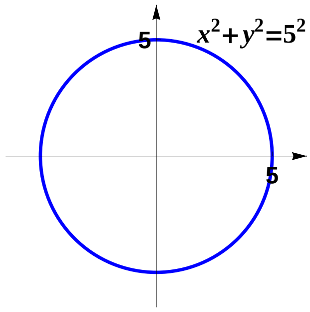
c) Im $z = 3 \;\Leftrightarrow\; y = 3$, a to je prava $y = 3$ u kompleksnoj ravni.

d) Uslov $|z| = 5 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 25$ određuje skup tačaka na kružnici sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 5.

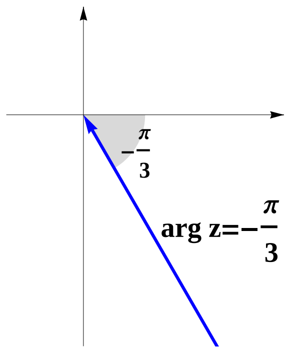
e) Tačke određene kompleksnim brojevima sa osobinom $\arg z = -\pi/3$ nalaze se na polupravoj sa početkom u koordinatnom početku koja gradi ugao od $-\pi/3$ sa pozitivnim delom x-ose i različite su od nule (jer je nula određena samo modulom, a ne i argumentom).



c)



d)



e)

2. Naći sva rešenja jednačine:

a) $z^3 = -1 - i\sqrt{3}$; **b)** $e^{i\pi/6}z = -1 - i\sqrt{3}$; **c)** $z = (-1 - i\sqrt{3})^3$

i dati geometrijsku interpretaciju tih rešenja.

Rešenje: Neka je $w = -1 - i\sqrt{3}$. Odredićemo trigonometrijski oblik kompleksnog broja w:

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2, \quad \arg w = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\frac{2\pi}{3},$$
$$w = 2\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)\Big).$$

Slučaj a): Rešenja jednačine

$$z^3 = 2\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)\Big)$$

određena su formulom

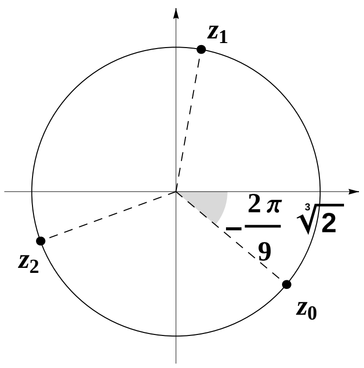
$$z_k = \sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{-2\pi/3 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi/3 + 2k\pi}{3}\Big), \quad k = 0, 1, 2,$$

odakle je

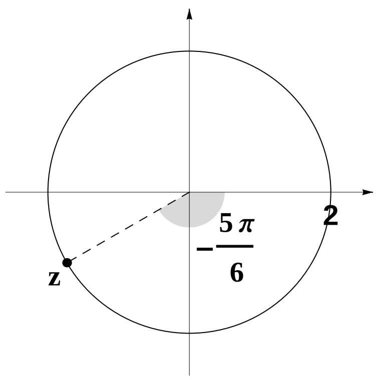
$$z_0 = \sqrt[3]{2}\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)\Big),\ z_1 = \sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\Big),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\Big).$$

Slučaj b):

$$e^{i\pi/6}z = -1 - i\sqrt{3} \ \Rightarrow\ z = (-1 - i\sqrt{3})e^{-i\pi/6} = 2e^{-2\pi i/3}e^{-i\pi/6} = 2e^{-5\pi i/6}.$$



a)



b)

c)

Slučaj c):

$$
\begin{aligned}
z = (-1 - i\sqrt{3})^3 &= \Big(2\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)\Big)\Big)^3 \\
&= 2^3\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3}3\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}3\Big)\Big) = 8\Big(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\Big) = 8.
\end{aligned}
$$

3. Odrediti geometrijsko mesto tačaka z u kompleksnoj ravni ako je:

a) $z - \overline{z} + 2i = 0\,;$ **b)** $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z-1} = 1\,;$ **c)** $\arg\overline{z} = \arg\,(-3 + i\sqrt{3})\,.$

Rešenje: a) Posmatrajmo kompleksni broj z u algebarskom obliku $z = x + iy$. Tada je $\overline{z} = x - iy$, pa je

$$
z - \overline{z} + 2i = x + iy - (x - iy) + 2i = 2i(y+1) = 0 \qquad \text{za} \qquad y = -1\,.
$$

U kompleksnoj ravni ovo predstavlja pravu $\operatorname{Im} z = -1$ koja prolazi kroz tačku $-i$ i koja je paralelna realnoj osi.

b) Kako je

$$
\frac{1}{z-1} = \frac{1}{x+iy-1} = \frac{1}{(x-1)+iy}\,\frac{(x-1)-iy}{(x-1)-iy} = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + i\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}\,,
$$

uslov $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z-1} = 1$ je ispunjen za $\dfrac{-y}{(x-1)^2+y^2} = 1$, tj.

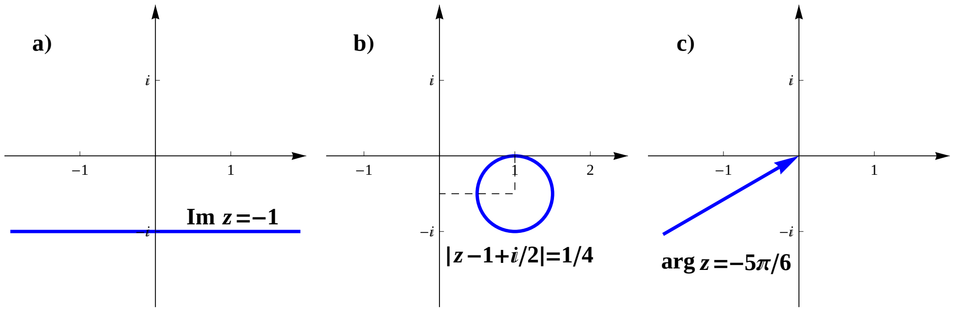
$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 + y^2 &= -y\,, \\
(x-1)^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} &= \frac{1}{4}\,, \\
(x-1)^2 + \Big(y + \frac{1}{2}\Big)^2 &= \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}
$$

U kompleksnoj ravni ovo predstavlja krug $|z - (1 - i/2)| = 1/4$ sa centrom u tački $1 - i/2$ i poluprečnikom $1/2$.

c) Ako kompleksni broj predstavimo u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, tada je $\overline{z} = r\,(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, tj. $\arg\overline{z} = -\theta$. Kako je

$$
\arg\big(-3 + i\sqrt{3}\big) = \arctan\frac{\sqrt{3}}{-3} + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}\,,
$$

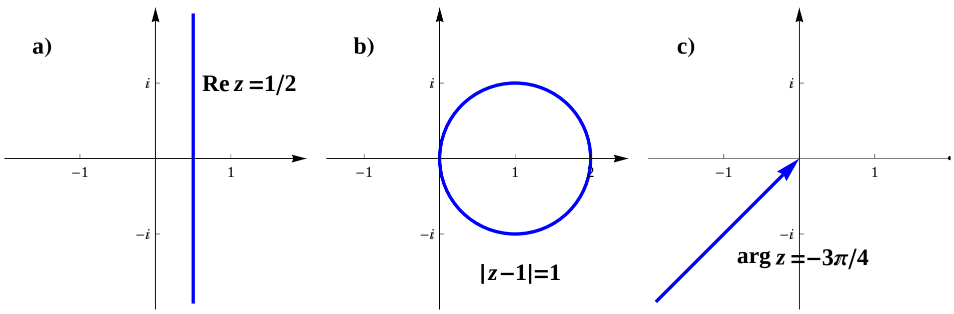
važi: $-\theta = 5\pi/6$, tj. $\theta = -5\pi/6$. U kompleksnoj ravni ovo predstavlja polupravu $\arg z = -5\pi/6$ sa početkom u tački 0 koja sa realnom osom zaklapa ugao $-5\pi/6$, a iz koje je isključena početna tačka. Tačka $z = 0$ ne zadovoljava navedeni uslov jer $\arg 0$ nije definisan.



4. Odrediti geometrijsko mesto tačaka z u kompleksnoj ravni ako je:

$$\textbf{a)}\quad z = -\overline{z} + 1\,; \qquad \textbf{b)}\quad \operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\,; \qquad \textbf{c)}\quad \arg\overline{z} = \arg\left(-2+2i\right).$$

Rezultat: a) $z = x + iy,\ \ x = 1/2.$
b) $z = x + iy$, $(x-1)^2 + y^2 = 1.$
c) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ \ \theta = -3\pi/4.$



5. U kompleksnoj ravni predstaviti sve kompleksne brojeve za koje važi:

a) $|z-1+5i| = 2$; **b)** $\arg z = -\pi/3$; **c)** $\operatorname{Re}(z+1) = -2$; **d)** $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = 1.$

Rešenje: a) Uvođenjem algebarskog oblika kompleksnog broja

$$z = x + iy,\ \ x, y \in \mathbb{R},$$

jednačina $|z-1+5i| = 2$ postaje

$$|x+iy-1+5i| = 2 \ \Leftrightarrow\ |x-1+i(y+5)| = 2 \ \Leftrightarrow\ (x-1)^2 + (y+5)^2 = 2^2,$$

što predstavlja jednačinu kružnice u $\mathbb{R}^2$ sa centrom $(1,-5)$ i poluprečnikom 2.

b) S obzirom na eksponencijalni oblik kompleksnog broja

$$z = |z|e^{i\arg z} = re^{i\varphi}, \ r \geq 0,$$

jednačinu $\arg z = -\pi/3$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi $z = re^{-i\pi/3}, \ r > 0$. Svi takvi brojevi leže na polupravoj sa početkom u koordinatnom početku (različiti su od koordinatnog početka) i pod uglom $-\pi/3$ u odnosu na pozitivni deo $x-$ose.

c) Smenom $z = x + iy$ jednačina $\mathrm{Re}\,(z+1) = -2$ postaje $x + 1 = -2$, tj. $x = -3$. Rešenja jednačine predstavljaju svi kompleksni brojevi oblika $z = -3 + iy, \ y \in \mathbb{R}$. U $xOy-$ravni, jednačina $x = -3$ je jednačina prave paralelne $y-$osi koja seče $x-$osu u tački $(-3,0)$.

d) Prelaskom na algebarski oblik kompleksnog broja $z = x+iy$, jednačina $\mathrm{Im}\,\frac{1}{z} = 1$ se može napisati:

$$1 = \mathrm{Im}\,\frac{1}{x+iy} = \mathrm{Im}\,\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

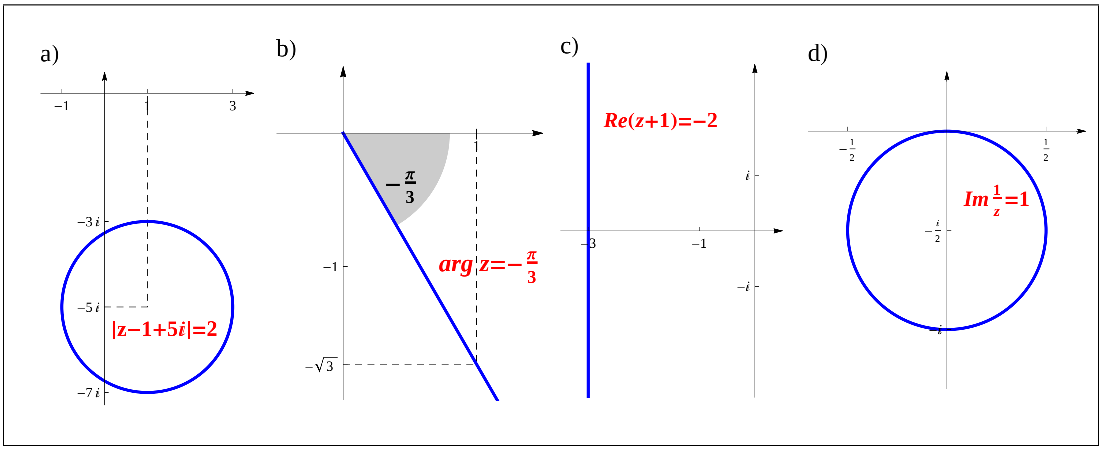
odnosno,

$$x^2 + y^2 + y = 0.$$

Dopunom do potpunog kvadrata $y^2 + y = (y+1/2)^2 - 1/4$, prethodni izraz dobija prepoznatljivi oblik jednačine kružnice

$$x^2 + (y+1/2)^2 = (1/2)^2$$

sa centrom u $(0,-1/2)$ i poluprečnikom $1/2$.



6. U kompleksnoj ravni odrediti skup tačaka određenih kompleksnim brojevima z koji zadovoljavaju:

a) jednačinu $z \cdot \bar{z} + 1 = -i\big(z - \bar{z}\big)$;
b) nejednačinu $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1$.

Rešenje: a) Uvođenjem algebarskog oblika kompleksnog broja $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, polazna jednačina $z \cdot \bar{z} + 1 = -i\big(z - \bar{z}\big)$, se transformiše u

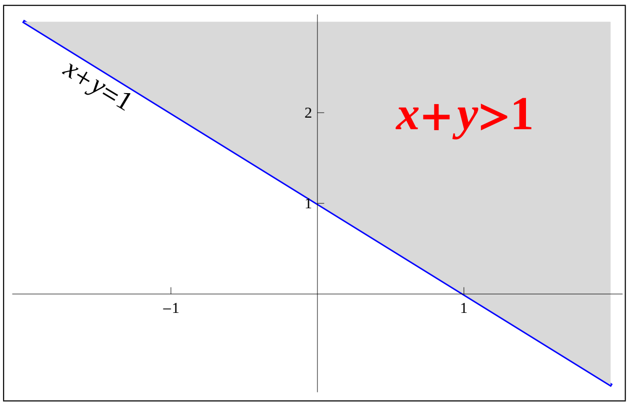
$$\begin{aligned}&(x+iy)(x-iy)+1 = -i(x+iy-x+iy)\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+1 = 2y\\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 0\\ &\Rightarrow x=0,\ y=1 \ \Leftrightarrow \ z=i.\end{aligned}$$

Traženi skup tačaka je tačka $z = i$.

b) Za $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nejednakost glasi

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 1\\ &\Leftrightarrow x + y > 1.\end{aligned}$$

Traženi skup tačaka je poluravan iznad prave $x + y = 1$.



7. U kompleksnoj ravni predstaviti brojeve z koji zadovoljavaju uslove:

a) $\operatorname{Re}(z+2\bar{z}) = 3$; **b)** $\operatorname{Im}(z+2\bar{z}) = 2$; **c)** $\operatorname{Re}(z+2\bar{z}) = \operatorname{Im}(z+2\bar{z})$.

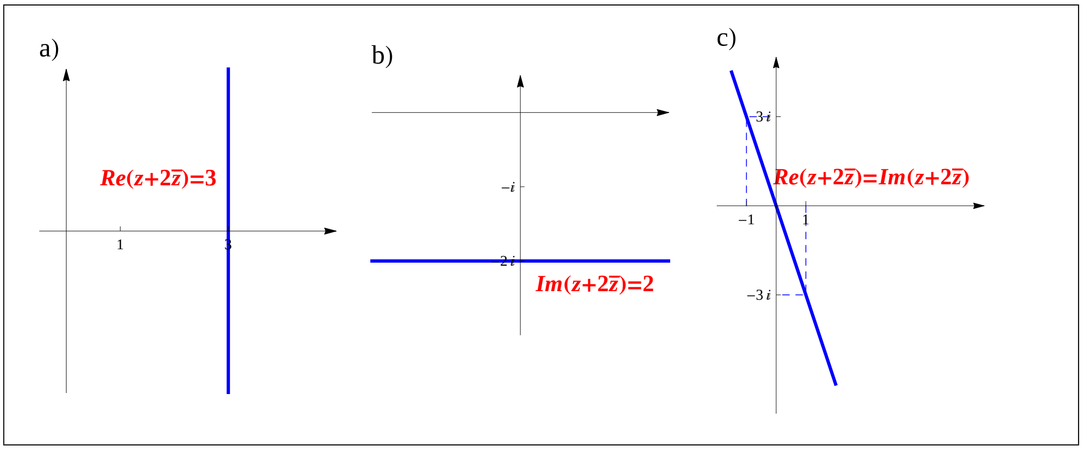
Rešenje: Za rešavanje zadatih jednačina pogodan je algebarski oblik kompleksnog broja $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, s obzirom da sve tri jednačine sadrže izraze za realni ili imaginarni deo kompleksnog izraza. Takođe se u sve tri jednačine pojavljuje izraz $z + 2\bar{z}$, te najpre treba njega transformisati navedenom smenom:

$$z + 2\bar{z} = x + iy + 2(x - iy) = 3x - iy,$$
$$\operatorname{Re}(z+2\bar{z}) = 3x, \qquad \operatorname{Im}(z+2\bar{z}) = -y.$$

a) $\operatorname{Re}(z+2\bar{z})=3$
$\Leftrightarrow 3x=3$
$\Leftrightarrow x=1.$

b) $\operatorname{Im}(z+2\bar{z})=2$
$\Leftrightarrow -y=2$
$\Leftrightarrow y=-2.$

c) $\operatorname{Re}(z+2\bar{z})=\operatorname{Im}(z+2\bar{z})$
$\Leftrightarrow 3x=-y$
$\Leftrightarrow y+3x=0.$



8. U kompleksnoj ravni predstaviti brojeve z koji zadovoljavaju uslove:

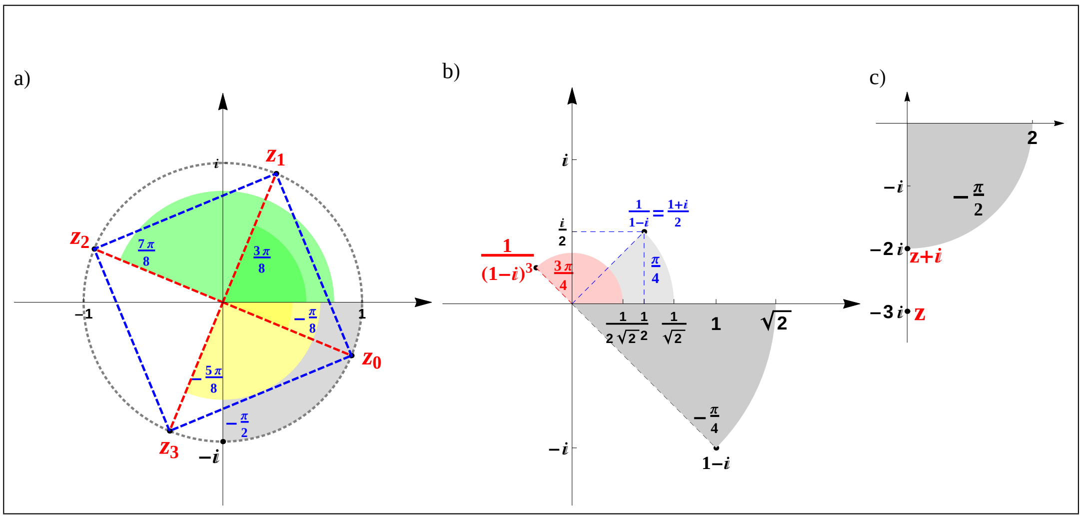
a) $\dfrac{1}{z^4}=i;$ **b)** $(1-i)^3 z=1;$ **c)** $|z+i|=2,\ \arg(z+i)=-\dfrac{\pi}{2}.$

Rešenje:

a) $\dfrac{1}{z^4}=i$
$\Leftrightarrow z^4=1/i=-i=e^{-i\pi/2}$
$\Leftrightarrow z_k=\sqrt[4]{-i}$
$\Leftrightarrow z_k=e^{i\frac{-\pi/2+2k\pi}{4}},k=\overline{0,3}.$

b) $(1-i)^3 z=1$
$\Leftrightarrow z=\dfrac{1}{(1-i)^3}$
$\Leftrightarrow z=\left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^{-3}$
$\Leftrightarrow z=2^{-3/2}e^{i3\pi/4}.$

c) $|z+i|=2,\ \arg(z+i)=-\dfrac{\pi}{2}$
$\Leftrightarrow z+i=2e^{-i\pi/2}$
$\Leftrightarrow z=2e^{-i\pi/2}-i$
$\Leftrightarrow z=-2i-i=-3i.$



9. Odrediti geometrijsko mesto tačaka z u kompleksnoj ravni ako je:

$$\textbf{a)}\ \ z=(-3+i\sqrt{3})^{10};\qquad \textbf{b)}\ \ z^4=-1+i;\qquad \textbf{c)}\ \ z+\bar{z}=5.$$

Rešenje: a) Kako je

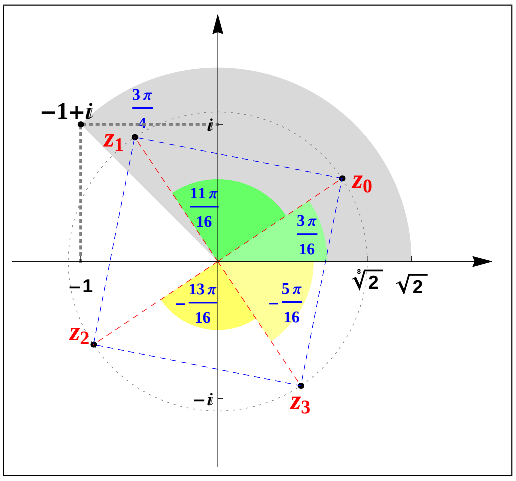
$$\begin{aligned}\text{a)}\ \ & z=(-3+i\sqrt{3})^{10}\Leftrightarrow z=\big(2\sqrt{3}(-\sqrt{3}/2+i/2)\big)^{10}\\ &\Leftrightarrow z=2^{10}3^5(e^{i5\pi/6})^{10}\Leftrightarrow z=12^5e^{i50\pi/6}\\ &\Leftrightarrow z=12^5e^{i\pi/3},\end{aligned}$$

traženo geometrijsko mesto je tačka.

$$\begin{aligned}\text{b)}\ \ & z^4=-1+i\ \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{-1+i}\ \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{\sqrt{2}\Big(\frac{-1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)}\\ &\Rightarrow z_k=\sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{3\pi/4+2k\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi/4+2k\pi}{4}\Big),\ k=0,1,2,3.\end{aligned}$$

Traženo geometrijsko mesto predstavljaju temena kvadrata

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\Big),\\
z_1 &= \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16}\Big),\\
z_2 &= \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16}\Big),\\
z_3 &= \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16}\Big).
\end{aligned}
$$



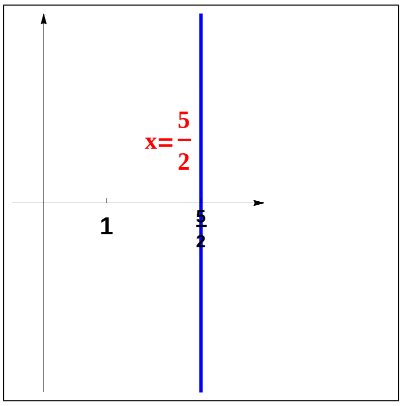
c) $z + \bar{z} = 5$

$\Leftrightarrow x + iy + x - iy = 5$

$\Leftrightarrow 2x = 5,\ \ y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5}{2} + iy, y \in \mathbb{R}.$

Traženo geometrijsko mesto tačaka je prava $x = \frac{5}{2}$.



10. Ako je $z = 1 - i$, odrediti kompleksne brojeve

$$-z, \quad \bar{z}, \quad \frac{1}{z}, \quad z^3, \quad ze^{i\pi/2}, \quad z + e^{i\pi/2}.$$

Rešenje: Imajući u vidu da je $e^{i\pi/2} = i$ i $z = 1 - i$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&-z = -1 + i, \quad \bar{z} = 1 + i, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2},\\
&z^3 = (1-i)^3 = (1-i)(-2i) = -2 - 2i,\\
&ze^{i\pi/2} = (1-i)i = 1 + i, \quad z + e^{i\pi/2} = 1 - i + i = 1.
\end{aligned}
$$

11. U kompleksnoj ravni predstaviti:

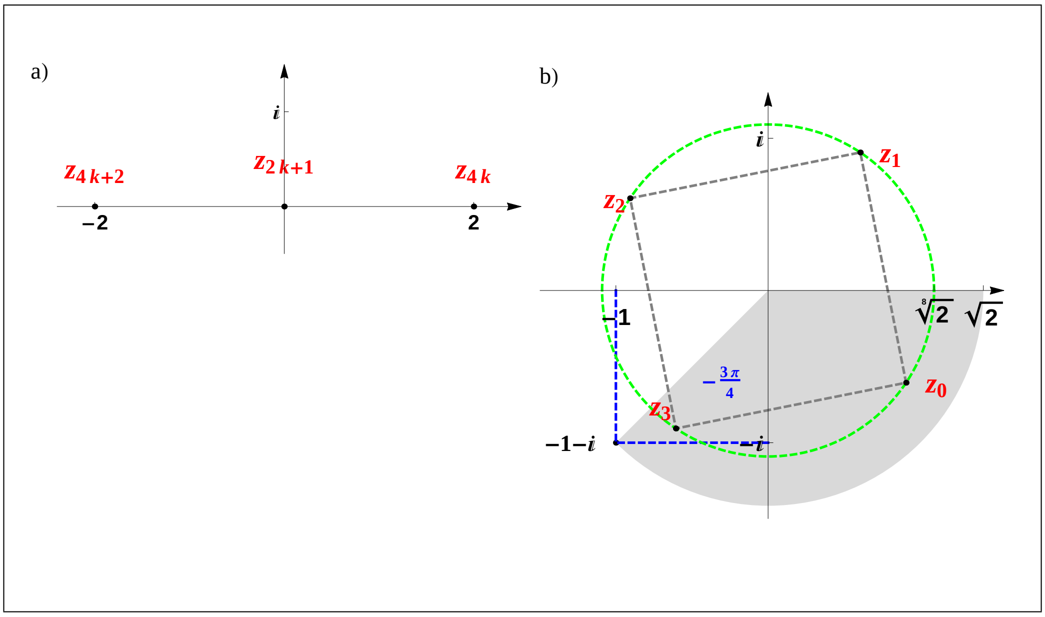
a) sve brojeve $z_n = i^n + i^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$;
b) sva rešenja jednačine $z^4 = -1 - i$.

Rešenje: a) Celobrojni stepeni broja i glase

$$\begin{array}{cccc} i^{4k} = 1, & i^{4k+1} = i, & i^{4k+2} = -1, & i^{4k+3} = i^{4k-1} = -i, \\ i^{-4k} = 1, & i^{-(4k+1)} = -i, & i^{-(4k+2)} = -1, & i^{-(4k+3)} = i^{-(4k-1)} = i, \end{array}$$

za $k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$z_{4k} = i^{4k} + i^{-4k} = 1 + 1 = 2, \quad z_{4k+2} = i^{4k+2} + i^{-(4k+2)} = -1 - 1 = -2,$$
$$z_{4k\pm1} = i^{4k\pm1} + i^{-(4k\pm1)} = \pm i + (\mp i) = 0,$$



b) Tražena rešenja jednačine $z^4 = -1 - i$ predstavljaju sve vrednosti četvrtog korena kompleksnog broja $-1-i$. Zbog formule za $n-$ti koren kompleksnog broja, neophodno je $-1-i$ prevesti iz algebarskog u trigonometrijski oblik. Kako je

$$-1 - i = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\big(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)\big),$$

to su

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{\sqrt{2}\big(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)\big)} \\ &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{16} + i\sin\frac{-3\pi}{16}\right), \; z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right), \\ z_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right), \quad z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right). \end{aligned}$$

12. Odrediti $|z|$ i $\arg z$, ako je:

a) $z = \dfrac{\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)}{-1+i}$; **b)** $z = (\sqrt{3} - i)(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))$.

Rešenje: S obzirom da se traži $|z|$ i $\arg z$, kompleksne brojeve $-1+i$ i $\sqrt{3}-i$ koji su dati u algebarskom obliku prebacićemo u trigonometrijski oblik, a zatim izvršiti zadato deljenje, odnosno množenje.

Slučaj a): Kompleksan broj $-1+i$ se nalazi u drugom kvadrantu, pa je

$$|-1+i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \arg(-1+i) = \arctan(1/(-1)) + \pi = 3\pi/4.$$

Kako je $-1+i = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$, broj z je jednak

$$\begin{aligned} z &= \frac{\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)}{-1+i} = \frac{\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)}{\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

odakle je $|z| = \sqrt{2}/2$ i $\arg z = -\pi/2$.

Slučaj b): Kompleksan broj $\sqrt{3} - i$ se nalazi u četvrtom kvadrantu i važi

$$\begin{aligned} &|\sqrt{3} - i| = 2, \quad \arg(\sqrt{3} - i) = \arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6, \\ &\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)). \end{aligned}$$

Računamo broj z:

$$\begin{aligned} z &= (\sqrt{3} - i)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

i dobijamo $|z| = 2$ i $\arg z = \pi/6$.

13. Ako je $z=-3+i\sqrt{3}$, odrediti:

a) $\operatorname{Re} w$, $\operatorname{Im} w$, $|w|$ i $\arg w$ za $w=z^{2012}$; **b)** sve vrednosti $\sqrt[3]{z}$.

Rešenje: Odredimo najpre $|z|$ i $\arg z$:

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=2\sqrt{3}\,,$$
$$\arg z=\arctan\frac{\sqrt{3}}{-3}+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}\,.$$

Trigonometrijski i eksponencijalni oblik broja z je

$$z=2\sqrt{3}\Big(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)=2\sqrt{3}\;e^{5\pi i/6}\,.$$

<u>*Napomena.*</u> Trigonometrijski oblik broja z može se dobiti na drugi način. Znajući da je $|z|=2\sqrt{3}$ i da je $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, uz prepoznavanje trigonometrijskih funkcija karakterističnih uglova imamo

$$z=-3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\Big)=2\sqrt{3}\Big(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)\,.$$

a) Prema Moavrovoj formuli važi

$$\begin{aligned}
w=z^{2012}&=\left(2\sqrt{3}\Big(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\Big)\right)^{2012}\\
&=(2\sqrt{3})^{2012}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{2012}\\
&=2^{2012}\big(3^{1/2}\big)^{2012}\left(\cos\frac{2012\cdot 5\pi}{6}+i\sin\frac{2012\cdot 5\pi}{6}\right)\\
&=2^{2012}3^{1006}\left(\cos\frac{10060\pi}{6}+i\sin\frac{10060\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Za određivanje glavne vrednosti argumenta broja w potrebno je izvršiti transformaciju

$$\frac{10060\pi}{6}=\frac{4\pi+10056\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2\cdot 838\pi\,.$$

Kako je, zbog periodičnosti funkcija $t\mapsto\cos t$ i $t\mapsto\sin t$,

$$\cos\frac{10060\pi}{6}=\cos\Big(\frac{2\pi}{3}+2\cdot 838\pi\Big)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\,,$$
$$\sin\frac{10060\pi}{6}=\sin\Big(\frac{2\pi}{3}+2\cdot 838\pi\Big)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

dobijamo

$$w = 2^{2012}3^{1006}\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = 2^{2011}3^{1006}\big(-1+i\sqrt{3}\big)\,.$$

Konačno je

$$\operatorname{Re} w = -2^{2011}3^{1006}\,, \quad \operatorname{Im} w = 2^{2011}3^{1006+1/2}\,, \quad |w| = 2^{2012}3^{1006}\,, \quad \arg w = \frac{2\pi}{3}\,.$$

b) Tražene vrednosti $\sqrt[3]{z}$ su u_1, u_2, u_3 , gde je:

$$\begin{aligned} u_k &= \sqrt[3]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{3}\right) \\ &= 2^{1/3}3^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi+12k\pi}{18} + i\sin\frac{5\pi+12k\pi}{18}\right), \quad k=0,1,2\,. \end{aligned}$$

14. Ako je

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}\,,$$

odrediti $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$, z^{12} i sve vrednosti $\sqrt[12]{z}$.

Rešenje: Označimo: $z_1 = \sqrt{3}-i$, $z_2 = -1+i$, $z = z_1/z_2$. Trigonometrijski oblik brojeva z_1 i z_2 je

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{3}-i = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\Big) = 2\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\right)\,, \\ z_2 &= -1+i = \sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big)\,. \end{aligned}$$

Prema pravilu za deljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku dobijamo

$$\begin{aligned} z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}\Big)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\Big(-\frac{11\pi}{12}\Big) + i\sin\Big(-\frac{11\pi}{12}\Big)\right)\,. \end{aligned}$$

Zato je

$$\operatorname{Re} z = \sqrt{2}\ \cos\Bigl(-\frac{11\pi}{12}\Bigr)\,, \quad \operatorname{Im} z = \sqrt{2}\ \sin\Bigl(-\frac{11\pi}{12}\Bigr)\,, \quad |z| = \sqrt{2}\,, \quad \arg z = -\frac{11\pi}{12}\,,$$

$$\begin{aligned} z^{12} &= 2^6\left(\cos\Bigl(-\frac{12\cdot 11\pi}{12}\Bigr) + i\sin\Bigl(-\frac{12\cdot 11\pi}{12}\Bigr)\right) \\ &= 2^6\,(\cos(-11\pi) + i\sin(-11\pi)) = 2^6\,(\cos(-12\pi+\pi) + i\sin(-12\pi+\pi)) \\ &= 2^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^6\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[12]{z} &= u_k\,, \qquad k = 0,1,2,\ldots,11\,, \\ u_k &= \sqrt[12]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{11\pi}{12}+2k\pi}{12} + i\sin\frac{-\frac{11\pi}{12}+2k\pi}{12}\right) \\ &= 2^{1/24}\left(\cos\frac{-11\pi+24k\pi}{144} + i\sin\frac{-11\pi+24k\pi}{144}\right)\,, \quad k = 0,1,2,\ldots,11\,. \end{aligned}$$

15. Neka je

$$z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}\,.$$

Odrediti z^{2012} i sve vrednosti $\sqrt[2012]{z}$.

Rezultat:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2\sqrt{2}\ e^{-\pi i/6}}{2\sqrt{2}\ e^{-\pi i/4}} = e^{\pi i/12}\,, \\ z^{2012} &= e^{-\pi i/3}\,, \\ \sqrt[2012]{z} &\in \{e^{i(\pi+24k\pi)/(12\cdot 2012)}\ \bigm|\ k = 0,1,2,\ldots,2011\}\,. \end{aligned}$$

16. Ako je $z = \dfrac{-1+i}{1+i}$, odrediti $\operatorname{Re}(z^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje: Najpre ćemo odrediti kompleksan broj z:

$$z = \frac{-1+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i.$$

Sada je, za $k \in \mathbb{N}_0$

$$z^n = i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k, \\ i, & n = 4k+1, \\ -1, & n = 4k+2, \\ -i, & n = 4k+3, \end{cases}$$

i odavde imamo

$$\mathrm{Re}\ (z^n) = \begin{cases} 1, & n = 4k, \\ 0, & n = 4k+1, \\ -1, & n = 4k+2, \\ 0, & n = 4k+3. \end{cases}$$

Ovaj zadatak je mogao da se reši i preko trigonometrijskog ili eksponencijalnog oblika kompleksnog broja z. Na primer,

$$\begin{aligned} z &= \frac{-1+i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}\big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\big)}{\sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)} = \cos\Big(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\Big) \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Sada imamo

$$z^n = \Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2},$$

odakle je $\mathrm{Re}\ (z^n) = \cos(n\pi/2)$. Za neparne brojeve n imaćemo $\mathrm{Re}\ (z^n) = 0$, a za $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ imamo $\mathrm{Re}\ (z^n) = (-1)^k$.

17. Odrediti $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $|z|$ i $\arg z$, ako je

$$z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-2010} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2010}.$$

Rešenje: Uvedimo oznake:

$$u_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad v_1 = u_1^{-2010}, \quad v_2 = u_2^{2010}, \quad z = v_1 + v_2\,.$$

Trigonometrijski oblik brojeva u_1 i u_2 je

$$u_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \qquad u_2 = \cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big).$$

Primenom Moavrove formule, a s obzirom na periodičnost funkcija $t \mapsto \cos t$ i $t \mapsto \sin t$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{-2010} = \cos\frac{-2010\pi}{3} + i\sin\frac{-2010\pi}{3} \\
&= \cos(-670\pi) + i\sin(-670\pi) = \cos\big(2(-335)\pi\big) + i\sin\big(2(-335)\pi\big) \\
&= \cos 0 + i\sin 0 = 1\,.
\end{aligned}
$$

Slično je

$$
\begin{aligned}
v_2 &= \left(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\right)^{2010} = \cos\frac{-2010\pi}{4} + i\sin\frac{-2010\pi}{4} \\
&= \cos\frac{-2008\pi - 2\pi}{4} + i\sin\frac{-2008\pi - 2\pi}{4} \\
&= \cos\Big(-\frac{\pi}{2} + 2(-251)\pi\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2} + 2(-251)\pi\Big) \\
&= \cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -i\,.
\end{aligned}
$$

Konačno dobijamo:

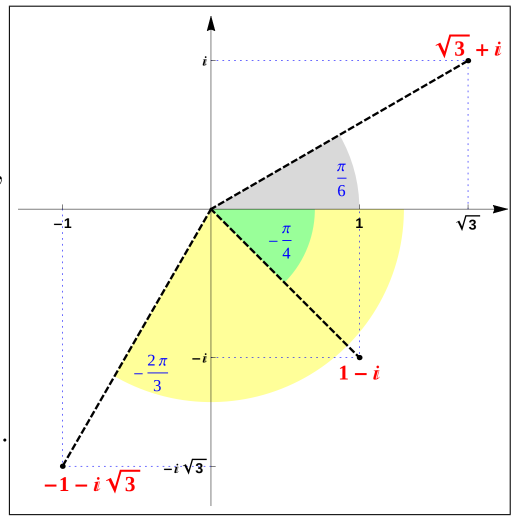
$$
z = v_1 + v_2 = 1 - i\,, \qquad \operatorname{Re} z = 1\,, \quad \operatorname{Im} z = -1\,, \quad |z| = \sqrt{2}\,, \quad \arg z = -\frac{\pi}{4}\,.
$$

18. Naći $1 - i - z$ ako je

$$
z = \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}}.
$$

Rešenje: Odredimo najpre vrednosti stepena binoma koji učestvuju u izrazu za z. Za izračunavanje vrednosti stepena pogodan je trigonometrijski ili eksponencijalni oblik kompleksnog broja.

$$
\begin{aligned}
1 - i &= \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big) \\
&= \sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big), \\
\sqrt{3} + i &= 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big) \\
&= 2\big(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\big), \\
-1 - i\sqrt{3} &= 2\Big(\frac{-1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\Big) \\
&= 2\big(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\big).
\end{aligned}
$$



Na osnovu Moavrove formule

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

i svođenjem argumenta na interval $(-\pi, \pi]$, dobijamo sledeće rezultate u trigonometrijskom i eksponencijalnom obliku

$$\begin{aligned}
(1-i)^{10} &= \Big(\sqrt{2}\big(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\big)\Big)^{10} \\
&= 2^5\big(\cos(-10\pi/4) + i\sin(-10\pi/4)\big) \\
&= 2^5\big(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\big) = 2^5 e^{-i\pi/2}, \\
(\sqrt{3}+i)^5 &= \Big(2\big(\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)\big)\Big)^5 \\
&= 2^5\big(\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)\big) = 2^5 e^{5i\pi/6}, \\
(-1-i\sqrt{3})^{10} &= \Big(2\big(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\big)\Big)^{10} \\
&= 2^{10}\big(\cos(-20\pi/3) + i\sin(-20\pi/3)\big) \\
&= 2^{10}\big(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\big) = 2^{10} e^{-2i\pi/3}.
\end{aligned}$$

Zamenom dobijenih vrednosti u izraz za z, on postaje

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(1-i)^{10}(\sqrt{3}+i)^5}{(-1-i\sqrt{3})^{10}} = \frac{e^{-i\pi/2}e^{5i\pi/6}}{e^{-2i\pi/3}} \\
&= e^{i(-\pi/2+5\pi/6+2\pi/3)} = e^{i\pi} = -1.
\end{aligned}$$

Tada je

$$1 - i - z = 1 - i - (-1) = 2 - i.$$

19. Odrediti $\operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z,\ |z|$ i $\arg z$ ako je

$$z = \frac{(-1+i)^{12}}{(1-i\sqrt{3})^{13}}.$$

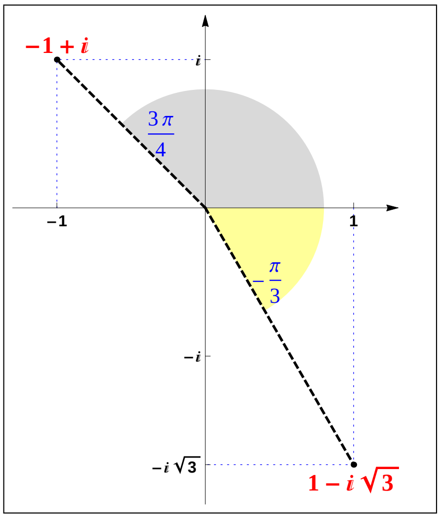
Rešenje: Koristeći trigonometrijski oblik kompleksnih brojeva

$$\begin{aligned}
-1 + i &= \sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big), \\
1 - i\sqrt{3} &= 2\big(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\big),
\end{aligned}$$

i Moavrovu formulu

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$$

izračunavamo vrednost izraza kojim je zadato z.



$$\begin{aligned}
z &= \frac{(-1+i)^{12}}{(1-i\sqrt{3})^{13}}\\
&= \frac{\Big(\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)\big)\Big)^{12}}{\Big(2\big(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\big)\Big)^{13}}\\
&= \frac{2^6\big(\cos(9\pi)+i\sin(9\pi)\big)}{2^{13}\big(\cos(-13\pi/3)+i\sin(-13\pi/3)\big)}\\
&= \frac{2^{-7}\big(\cos(\pi)+i\sin(\pi)\big)}{\big(\cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3)\big)}\\
&= 2^{-7}\big(\cos(\pi+\pi/3)+i\sin(\pi+\pi/3)\big)\\
&= 2^{-7}\big(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3)\big)\\
&= -2^{-8}\big(1+i\sqrt{3}\big).
\end{aligned}$$

Tražene vrednosti su $\operatorname{Re} z = -2^{-8}$, $\operatorname{Im} z = -2^{-8}\sqrt{3}$, $|z| = 2^{-7}$, $\arg z = \dfrac{-2\pi}{3}$.

20. Odrediti trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z = a - ai$, ako je $a \in \mathbb{R}$ i važi

a) $a > 0\,;$ **b)** $a < 0\,.$

Za $a = 1$ odrediti z^{100} i sve vrednosti $\sqrt[3]{z}$.

Rešenje: Moduo kompleksnog broja $a - ai$ jednak je

$$|a - ai| = \sqrt{a^2 + a^2} = |a|\sqrt{2}.$$

Slučaj a): Ako je $a > 0$, tada je $|a - ai| = |a|\sqrt{2} = a\sqrt{2}$. Dati kompleksan broj se nalazi u četvrtom kvadrantu i $\arg z$ računamo po formuli $\arg z = \arctan(-a/a) = -\pi/4$. Trigonometrijski oblik broja z je

$$z = a\sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big).$$

Slučaj b): Ako je $a < 0$, tada je $|a - ai| = |a|\sqrt{2} = -a\sqrt{2}$. Broj z se nalazi u drugom kvadrantu i $\arg z$ računamo po formuli $\arg z = \arctan(-a/a) + \pi = 3\pi/4$. Trigonometrijski oblik broja z je

$$z = -a\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big).$$

Ako je $a = 1$, onda je

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big).$$

Imamo

$$\begin{aligned} z^{100} &= \Big(\sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big)\Big)^{100} = 2^{50}\Big(\cos\Big(-\frac{100\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{100\pi}{4}\Big)\Big) \\ &= 2^{50}\Big(\cos(-25\pi) + i\sin(-25\pi)\Big) = 2^{50}\Big(\cos\pi + i\sin\pi\Big) = -2^{50}. \end{aligned}$$

Sve vrednosti $\sqrt[3]{z}$ date su formulom

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{3}\Big), \quad k = 0, 1, 2.$$

21. Neka je $z = \dfrac{1}{a - ai}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Odrediti $|z|$ i $\arg z$ ako je:

a) $a > 0$; **b)** $a < 0$.

Rešenje: S obzirom na to da je

$$z = \frac{1}{a(1-i)}\,\frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i}{2a},$$

važi sledeće:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2a}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2a}, \qquad |z| = \frac{\sqrt{2}}{2|a|}.$$

a) Za $a > 0$ je $\operatorname{Re} z > 0$, pa je:

$$|z| = \frac{\sqrt{2}}{2a}, \qquad \arg z = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

b) Za $a < 0$ je $\operatorname{Re} z < 0$ i $\operatorname{Im} z < 0$, pa je:

$$|z| = -\frac{\sqrt{2}}{2a}, \qquad \arg z = \arctan 1 - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

22. Neka je

$$z_1 = a + 1 + i(a-1), \qquad z_2 = 2a - ia, \qquad w = \frac{z_1}{z_2}.$$

Odrediti $a \in \mathbb{R}$ tako da je:

a) w realan broj; **b)** w imaginaran broj; **c)** $|w| = 2/\sqrt{5}$.

Rešenje: Odredimo najpre algebarski oblik broja w:

$$w = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia} = \frac{a+1+i(a-1)}{2a-ia}\,\frac{2+i}{2+i} = \frac{a+3+i(3a-1)}{5a}\,.$$

a) Broj w je realan ako je $\operatorname{Im} w = 0$, tj. $a = 1/3$.
b) Broj w je imaginaran ako je $\operatorname{Re} w = 0$, tj. $a = -3$.
c) Kako je

$$|w| = \frac{\sqrt{(a+3)^2 + (3a-1)^2}}{5|a|} = \frac{\sqrt{10a^2+10}}{5|a|}\,,$$

uslov je ispunjen ako $a \in \mathbb{R}$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\sqrt{10a^2+10}}{5|a|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Rešavanjem navedene jednačine dobijamo:

$$\begin{gathered}
\frac{10a^2+10}{25a^2} = \frac{4}{5}\,, \\
10a^2 + 10 = 20a^2\,, \\
a^2 = 1\,, \\
a = 1 \quad \vee \quad a = -1\,.
\end{gathered}$$

23. Neka je $z = \dfrac{\lambda - i\sqrt{3}}{1-\lambda i}$. Odrediti vrednost parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da važi:

a) $\operatorname{Re} z = 0$; **b)** $\operatorname{Im} z = 0$; **c)** $|z| = \sqrt{2}$.

Rešenje: Algebarski oblik kompleksnog broja z je

$$z = \frac{\lambda - i\sqrt{3}}{1-\lambda i} = \frac{\lambda - i\sqrt{3}}{1-\lambda i}\,\frac{1+\lambda i}{1+\lambda i} = \frac{\lambda(1+\sqrt{3})}{1+\lambda^2} + i\frac{\lambda^2-\sqrt{3}}{1+\lambda^2}\,.$$

a) $\operatorname{Re} z = 0$ za $\lambda = 0$.
b) $\operatorname{Im} z = 0$ za $\lambda^2 - \sqrt{3} = 0$, tj. za $\lambda = \sqrt[4]{3}$ ili $\lambda = -\sqrt[4]{3}$.
c) Kako je

$$|z| = \sqrt{\frac{\lambda^2(1+\sqrt{3})^2 + (\lambda^2 - \sqrt{3})^2}{(1+\lambda^2)^2}} = \frac{\sqrt{\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3}}{1+\lambda^2},$$

uslov $|z| = \sqrt{2}$ je ispunjen za

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 2(1+\lambda^2)^2,$$
$$\lambda^4 - 1 = 0,$$

tj. za $\lambda = 1$ ili $\lambda = -1$.

24. Odrediti brojeve $z \in \mathbb{C}$ za koje važi

$$z - \overline{z} = 4 - 2i - |z - i|$$

i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

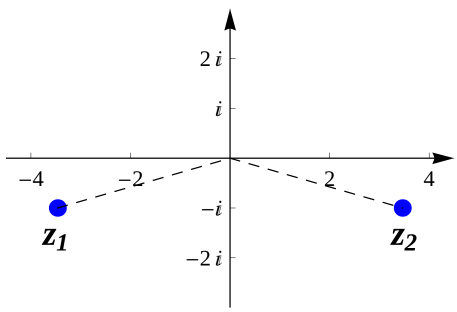
Rešenje: Ako brojeve z i $\overline{z}$ predstavimo u algebarskom obliku, jednačina postaje

$$x + iy - (x - iy) = 4 - 2i - |x + iy - i|,$$
$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 4 + i(2y + 2) = 0.$$

Kompleksni broj je jednak 0 ako su i realni i imaginarni deo jednaki 0. Tako, jednačina je zadovoljena ako je

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} - 4 = 0 \quad \wedge \quad 2y + 2 = 0,$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 16 \quad \wedge \quad y = -1,$$
$$x^2 = 12 \quad \wedge \quad y = -1,$$

pa su traženi kompleksni brojevi $z_1 = -2\sqrt{3} - i$ i $z_2 = 2\sqrt{3} - i$.



25. Odrediti trigonometrijski oblik svih rešenja jednačina

a) $(-1-i)z = \sqrt{3} - i$; **b)** $z^3 = -1$; **c)** $z = (-4+4i)^{40}$.

Rešenje: Slučaj a): Imamo

$$z = \frac{\sqrt{3}-i}{-1-i} = \frac{2\big(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)\big)}{\sqrt{2}\big(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)\big)} = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\Big).$$

Slučaj b): Određujemo trigonometrijski oblik broja $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ i za $k = 0, 1, 2$ računamo

$$z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}.$$

Rešenja su (dovoljno je predstaviti ih u jednom od datih oblika)

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3},\\
z_1 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1 = e^{i\pi},\\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}.
\end{aligned}$$

Slučaj c): Imamo da je trigonometrijski oblik broja $-4+4i = 4\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big)$. Na osnovu Moavrove formule određujemo

$$z = (-4+4i)^{40} = \Big(4\sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\Big)\Big)^{40} = 4^{40}2^{20}\Big(\cos(30\pi) + i\sin(30\pi)\Big) = 2^{100}.$$

26. Rešiti jednačine:

a) $e^{i\pi/7} \cdot z = -2+2i$; **b)** $(z+1)^3 = -i$; **c)** $z = (\sqrt{3} - i)^7$.

Rešenje: Slučaj a): Imamo

$$e^{i\pi/7}z = -2+2i \iff z = e^{-i\pi/7}(-2+2i) = e^{-i\pi/7} \cdot 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i17\pi/28}.$$

Slučaj b): Neka je $w = z+1$. Tada je $w^3 = -i$, a kako je $-i = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)$ to imamo za $k = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
&w_k = \cos\frac{-\pi/2+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2+2k\pi}{3}\\
&\Rightarrow\ z_k = w_k - 1 = \cos\frac{-\pi/2+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2+2k\pi}{3} - 1.
\end{aligned}$$

Rešenja su

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - i\frac{1}{2}\ ,\\
z_1 &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - 1 = -1 + i,\\
z_2 &= \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - i\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

Slučaj c): Određujemo trigonometrijski oblik kompleksnog broja

$$\sqrt{3} - i = 2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big).$$

Sada je

$$\begin{aligned}
z &= (\sqrt{3}-i)^7 = \Big(2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big)\Big)^7 = 2^7\Big(\cos\Big(-\frac{7\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{7\pi}{6}\Big)\Big)\\
&= 2^7\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\Big) = 2^7\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

27. Rešiti jednačinu

$$(z-3)^3 = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} + i^{24} + i^{49}.$$

Rešenje: Odrediti najpre vrednost izraza na desnoj strani jednačine

$$\begin{aligned}
(z-3)^3 &= \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} + i^{24} + i^{49}\\
&= \frac{(1+i)^2 + (1-i)^2}{(1-i)(1+i)} + 1 + i\\
&= \frac{2i - 2i}{2} + 1 + i = 1 + i.
\end{aligned}$$

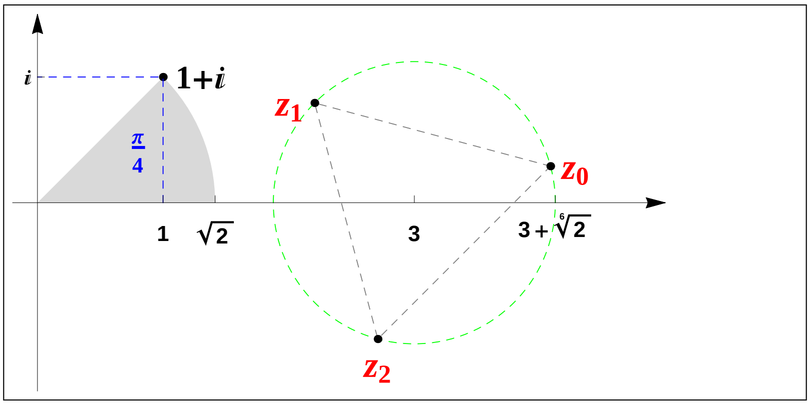
Odatle je

$$z-3=\sqrt[3]{1+i}\ \Rightarrow\ z=3+\sqrt[3]{\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\big)}.$$

Tražena rešenja su

$$z_k=3+\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{3}\right),\quad k=0,1,2.$$

$$z_0=3+\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$z_1=3+\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$z_2=3+\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$



28. Naći sva rešenja jednačine

$$z^3=\frac{1-3i}{1+i}-\frac{2i}{1-i}$$

i dati geometrijsku interpretaciju tih rešenja.

Rešenje: Odredićemo vrednost kompleksnog broja z^3:

$$z^3=\frac{1-3i}{1+i}-\frac{2i}{1-i}=\frac{(1-3i)(1-i)-2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-6i}{2}=-3i.$$

Trigonometrijski oblik kompleksnog broja $-3i$ je

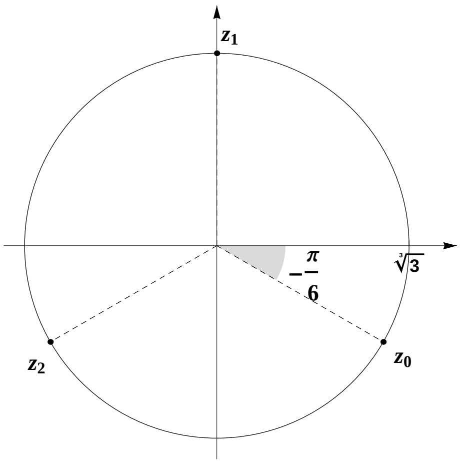
$$-3i=3\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big),$$

pa su rešenja jednačine $z^3 = 3\Big(\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)\Big)$ data sa

$$z_k = \sqrt[3]{3}\Big(\cos\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\Big), \quad k = 0, 1, 2.$$

Tražena rešenja su

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{3}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big) = \sqrt[3]{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\Big),\\
z_1 &= \sqrt[3]{3}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = i\sqrt[3]{3},\\
z_2 &= \sqrt[3]{3}\Big(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\Big) = \sqrt[3]{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\Big).
\end{aligned}$$



29. Odrediti sva rešenja jednačine

$$3(z - i)^3 = \frac{1 - 3i}{1 + i} - \frac{2i}{1 - i}$$

i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Kako je

$$\frac{1 - 3i}{1 + i} - \frac{2i}{1 - i} = \frac{(1 - 3i)(1 - i) - 2i(1 + i)}{(1 + i)(1 - i)} = -3i\,,$$

jednačina je zadovoljena ako je

$$(z - i)^3 = -i\,.$$

Uvođenjem smene $z - i = w$ jednačina postaje

$$w^3 = -i\,,$$

a njena rešenja su vrednosti trećeg korena broja $-i$. Za određivanje korena kompleksnog broja potrebno je predstaviti ga u trigonometrijskom ili eksponencijalnom obliku. Tako je

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

a rešenja jednačine su

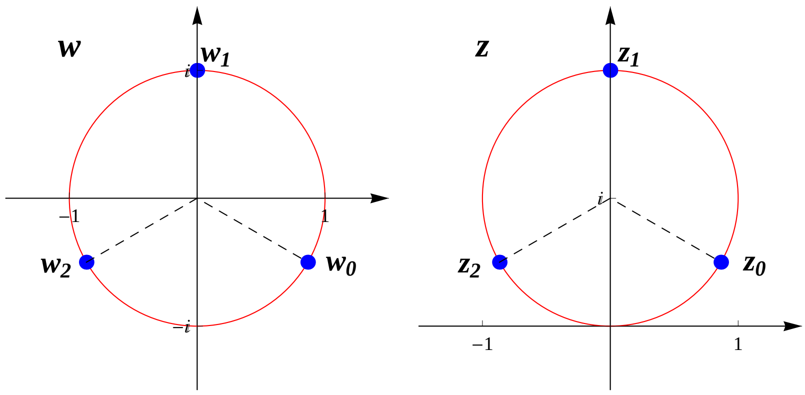
$$w_k = \cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \cos\frac{-\pi + 4k\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi + 4k\pi}{6}\,,\ k = 0, 1, 2,$$

tj.

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\,, \qquad w_1 = i\,, \qquad w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\,.$$

Vraćanjem na promenljivu $z = w + i$ dobijaju se tri rešenja polazne jednačine:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\,, \qquad z_1 = 2i\,, \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i\,.$$



30. Odrediti z^3 i sve vrednosti $\sqrt[3]{z}$ ako je z rešenje jednačine

$$z(4 - 2i) + 3\sqrt{3} = -3i\big(1 + 2\sqrt{3} + 2i\big)\,.$$

Rešenje: Odredimo najpre rešenje jednačine:

$$\begin{aligned}
z(4-2i)+3\sqrt{3} &= -3i\big(1+2\sqrt{3}+2i\big)\,,\\
z(4-2i) &= -3\sqrt{3}-3i-6i\sqrt{3}+6\,,\\
z &= \frac{-3\sqrt{3}+6-3i-6i\sqrt{3}}{4-2i}\,,\\
z &= \frac{-3\sqrt{3}+6-3i-6i\sqrt{3}}{4-2i}\;\frac{4+2i}{4+2i}\,,\\
z &= \frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}\,,\\
z &= 3\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\right)\,.
\end{aligned}$$

Zato je

$$z^3=3^3\left(\cos\Big(-\frac{3\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{3\pi}{3}\Big)\right)=27\,(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=-27\,,$$

a vrednosti $\sqrt[3]{z}$ su

$$\begin{aligned}
u_k &= \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9}+i\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9}\right)\,,\qquad k=0,1,2\,.
\end{aligned}$$

31. Naći sva rešenja jednačine:

a) $z^3=\left(\dfrac{8}{\sqrt{3}}\big(-\sqrt{3}+3i\big)\right)^{50}$; **b)** $z^3=\left(\dfrac{8}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^{50}$.

Rešenje: a) Označimo:

$$u=\frac{8}{\sqrt{3}}\big(-\sqrt{3}+3i\big)\,,\qquad v=u^{50}\,,\qquad z^3=v\,.$$

Kako je

$$|u|=\frac{8}{\sqrt{3}}\sqrt{(-\sqrt{3})^2+3^2}=\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}=16\,,$$

to je

$$u=16\Big(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=16\Big(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\Big)=2^4e^{2\pi i/3}\,.$$

Zato je

$$v = u^{50} = \left(2^4 e^{2\pi i/3}\right)^{50} = 2^{200} e^{100\pi i/3} = 2^{200}\Big(\cos\frac{100\pi}{3} + i\sin\frac{100\pi}{3}\Big)\,.$$

Za određivanje glavne vrednosti argumenta broja v uočimo transformaciju

$$\frac{100\pi}{3} = \frac{102\pi - 2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 17\pi\,,$$

koja, zbog periodičnosti funkcija $t \mapsto \sin t$ i $t \mapsto \cos t$, daje

$$\begin{aligned} v &= 2^{200}\left(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 17\pi\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3} + 2\cdot 17\pi\Big)\right) \\ &= 2^{200}\left(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)\right) = 2^{200} e^{-2\pi i/3}\,. \end{aligned}$$

Konačno, rešenja jednačine $z^3 = v$ su

$$z_k = 2^{200/3} e^{(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi)i/3} = 2^{200/3} e^{(-2\pi + 6k\pi)i/9}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

b) Zadatak može da se reši na isti način kao u delu pod **a)**. Ovde dajemo nešto drugačije rešenje koje je uslovljeno specifičnošću brojeva koji se pojavljuju.

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^{50} &= \left(2^{5/2}(-1+i)\right)^{50} = \left(2^5(-1+i)^2\right)^{25} = 2^{125}(-2i)^{25} \\ &= 2^{125}(-1)^{25} 2^{25} i^{25} = -2^{150} i (i^4)^6 = -2^{150} i\,. \end{aligned}$$

Kako je

$$-2^{150} i = 2^{150} e^{-i\pi/2}\,,$$

rešenja jednačine su

$$z_k = 2^{50} e^{(-\pi + 4k\pi)i/6}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,,$$

tj.

$$z_0 = 2^{49}\big(\sqrt{3} - i\big)\,, \qquad z_1 = 2^{50} i\,, \qquad z_2 = -2^{49}\big(\sqrt{3} + i\big)\,.$$

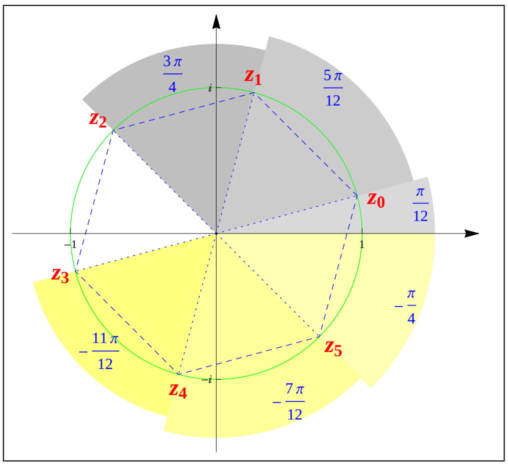
32. Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednačinu

$$2\big(z^6 - i\big) = -5\big(1 + iz^6\big)$$

i predstaviti ih u kompleksnoj ravni.

Rešenje: Najpre dovesti jednačinu na oblik pogodan za izračunavanje:

$$
\begin{aligned}
& 2\big(z^6 - i\big) = -5\big(1 + iz^6\big) \\
\Leftrightarrow\ & 2\big(z^6 - i\big) = -5i\big(-i + z^6\big) \\
\Leftrightarrow\ & (2+5i)\big(z^6 - i\big) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & z^6 = i \ \Rightarrow\ z = \sqrt[6]{i} = \sqrt[6]{e^{i\pi/2}} \\
& z_k = e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{6}},\ k = 0, 1, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$



Dobijene vrednosti traženih rešenja glase:

$$
\begin{aligned}
& z_0 = e^{i\pi/12},\quad z_1 = e^{i5\pi/12},\quad z_2 = e^{i3\pi/4}, \\
& z_3 = e^{i13\pi/12},\ z_4 = e^{i17\pi/12},\ z_5 = e^{i7\pi/4}.
\end{aligned}
$$

33. Naći sva rešenja jednačine

$$(2+5i)(z-1)^4 = -3+7i.$$

Rešenje: Odredićemo vrednost izraza $(z-1)^4$:

$$(z-1)^4 = \frac{-3+7i}{2+5i} \cdot \frac{2-5i}{2-5i} = \frac{29+29i}{29} = 1+i.$$

Neka je $w = z-1$. Tada imamo $w^4 = 1+i$, pa ćemo, da bismo odredili vrednosti w, odrediti trigonometrijski oblik broja $1+i$

$$|1+i| = \sqrt{2} \quad \wedge \quad \arg\,(1+i) = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} \ \Rightarrow\ 1+i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big).$$

Sada je

$$w_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{4}\Big), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

i $z_k = 1 + w_k$. Imamo

$$
\begin{aligned}
& z_0 = 1 + \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\Big), \quad z_1 = 1 + \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\Big), \\
& z_2 = 1 + \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\Big), \quad z_3 = 1 + \sqrt[8]{2}\Big(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\Big).
\end{aligned}
$$

34. Naći sva rešenja jednačine

$$(\sqrt{3}-i)(z-i)^3-\sqrt{2}-i\sqrt{2}=0.$$

Rešenje: Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(z-i)^3=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}-i}.$$

Ako bismo, kao u prethodnom zadatku, prvo izvršili racionalizaciju dobijenog izraza dobili bismo kompleksan broj

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

za koji ne možemo lako da odredimo trigonometrijski oblik radi daljeg računanja. Zato ćemo odrediti trigonometrijski oblik brojioca i imenioca, a zatim izvršiti deljenje. Imamo

$$\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big),\quad \sqrt{3}-i=2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big).$$

Sada je

$$\begin{aligned}(z-i)^3&=\frac{2\big(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\big)}{2\big(\cos(-\pi/6)+i\sin(-\pi/6)\big)}=\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\Big)+i\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\Big)\\&=\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}.\end{aligned}$$

Za $k=0,1,2$ dobijamo rešenja

$$z_k-i=\cos\frac{5\pi/12+2k\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi/12+2k\pi}{3},$$

odakle je

$$z_k=i+\cos\frac{5\pi/12+2k\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi/12+2k\pi}{3}.$$

Tražena rešenja su

$$\begin{aligned}z_0&=\cos\frac{5\pi}{36}+i\Big(1+\sin\frac{5\pi}{36}\Big),\\z_1&=\cos\frac{29\pi}{36}+i\Big(1+\sin\frac{29\pi}{36}\Big),\\z_2&=\cos\frac{53\pi}{36}+i\Big(1+\sin\frac{53\pi}{36}\Big).\end{aligned}$$

35. Odrediti sva rešenja jednačine

$$(i-z)^5 = z^5.$$

Rešenje: Datu jednačinu ćemo predstaviti u ekvivalentnom obliku

$$(i-z)^5 = z^5 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{i-z}{z}\right)^5 = 1.$$

Ako uvedemo smenu

$$w = \frac{i-z}{z} \;\Rightarrow\; zw + z = i \;\Rightarrow\; z = \frac{i}{1+w},$$

jednačina postaje $w^5 = 1 \;\Leftrightarrow\; w^5 = \cos 0 + i \sin 0$ i njena rešenja su

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k,$$

gde smo označili $\varphi_k = 2k\pi/5$, $k = 0,1,2,3,4$. Kako je za svako $k = 0,1,2,3,4$, $w_k \neq -1$, tražena rešenja su

$$\begin{aligned}
z_k = \frac{i}{1+w_k} &= \frac{i}{1+\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k} \cdot \frac{1+\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k}{1+\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k} \\
&= \frac{i(1+\cos\varphi_k - i\sin\varphi_k)}{(1+\cos\varphi_k)^2 + \sin^2\varphi_k} = \frac{\sin\varphi_k + i(1+\cos\varphi_k)}{1 + 2\cos\varphi_k + \cos^2\varphi_k + \sin^2\varphi_k} \\
&= \frac{\sin\varphi_k + i(1+\cos\varphi_k)}{2(1+\cos\varphi_k)} = \frac{\sin\varphi_k}{2(1+\cos\varphi_k)} + \frac{1}{2}i \\
&= \frac{2\sin\frac{\varphi_k}{2}\cos\frac{\varphi_k}{2}}{4\cos^2\frac{\varphi_k}{2}} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\tan\frac{\varphi_k}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\tan\frac{k\pi}{5} + \frac{1}{2}i.
\end{aligned}$$

36. Naći sva rešenja jednačine

$$z^3 - i(z-2i)^3 = 0.$$

Rešenje: Do rešenja zadatka možemo doći na sličan način kao u zadatku 35. Imamo

$$z^3 - i(z-2i)^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; z^3 = i(z-2i)^3 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{z}{z-2i}\right)^3 = i.$$

Neka je $w = z/(z-2i)$. Iz uslova $w^3 = i$ imamo rešenja

$$w_k = \cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3} = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k, \quad k = 0, 1, 2.$$

Takođe, iz relacije $w_k = z_k/(z_k - 2i)$, slično kao u zadatku 35, imamo

$$z_k = \frac{2iw_k}{w_k - 1} = \frac{2i(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)}{\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k - 1} = \cdots = \cot\frac{\varphi_k}{2} + i.$$

Ovaj deo zadatka možemo rešiti na drugi način, primenom eksponencijalnog oblika kompleksnog broja $w_k = e^{i\varphi_k}$:

$$z_k = \frac{2iw_k}{w_k - 1} = \frac{2ie^{i\varphi_k}}{e^{i\varphi_k} - 1} = \frac{2ie^{i\varphi_k/2}e^{i\varphi_k/2}}{e^{i\varphi_k/2}e^{i\varphi_k/2} - e^{i\varphi_k/2}e^{-i\varphi_k/2}} = \frac{2ie^{i\varphi_k/2}e^{i\varphi_k/2}}{e^{i\varphi_k/2}\Big(e^{i\varphi_k/2} - e^{-i\varphi_k/2}\Big)}$$

$$= \frac{2ie^{i\varphi_k/2}}{e^{i\varphi_k/2} - e^{-i\varphi_k/2}} = \frac{2i\Big(\cos(\varphi_k/2) + i\sin(\varphi_k/2)\Big)}{2i\sin(\varphi_k/2)} = \cot\frac{\varphi_k}{2} + i.$$

37. Naći sva rešenja jednačine

$$(z - i)^3 = (4 - i\sqrt{48})z^3\,.$$

Rešenje: Pošto $z = 0$ nije rešenje jednačine, deljenjem sa z^3 ona dobija oblik

$$\left(\frac{z - i}{z}\right)^3 = 4 - 4i\sqrt{3}\,,$$

ili, uvođenjem smene $w = (z - i)/z$ i upotrebom eksponencijalnog oblika kompleksnih brojeva,

$$w^3 = 8e^{-\pi i/3}\,.$$

Njena rešenja su

$$w_k = \sqrt[3]{8}\,e^{(-\pi/3 + 2k\pi)i/3} = 2e^{(-\pi + 6k\pi)i/9}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

Povratkom na polaznu promenljivu

$$z = \frac{-i}{w - 1}\,, \quad w \neq 1\,,$$

dobijamo rešenja polazne jednačine:

$$z_k = \frac{-i}{w_k - 1}\,, \quad k = 0, 1, 2, \quad w_k \neq 1\,.$$

Uslov $w_k \neq 1$ je ispunjen za svako $k \in \{0, 1, 2\}$, pa su sva rešenja:

$$z_k = \frac{-i}{2e^{(-\pi+6k\pi)i/9} - 1}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

Da bismo dobili ove brojeve u jednom od prihvatljivih oblika kompleksnih brojeva, na primer u algebarskom, potrebno je izvršiti sledeće transformacije:

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{-i}{2e^{(-\pi+6k\pi)i/9} - 1} = \frac{-i}{2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} + 2i\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1} \\ &= \frac{-i}{2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} + 2i\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1}\;\frac{2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 2i\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1}{2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 2i\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1} \\ &= \frac{-i\left(2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 2i\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1\right)}{\left(2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1\right)^2 + \left(2\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9}\right)^2} \\ &= \frac{-2\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} - i\left(2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 1\right)}{4\cos^2\frac{-\pi+6k\pi}{9} - 4\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9} + 1 + 4\sin^2\frac{-\pi+6k\pi}{9}} \\ &= \frac{-2\sin\frac{-\pi+6k\pi}{9} + i\left(1 - 2\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9}\right)}{5 - 4\cos\frac{-\pi+6k\pi}{9}}\,, \qquad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

38. Rešiti jednačinu

$$z^3 + 3i(z-i)^3 = 0\,.$$

Rešenje: Pošto $z = i$ nije rešenje jednačine, deljenjem sa $(z-i)^3$ ona dobija oblik

$$\left(\frac{z}{z-i}\right)^3 = -3i\,,$$

ili, uvođenjem smene $w = z/(z-i)$,

$$w^3 = 3e^{-\pi i/2}\,.$$

Njena rešenja su

$$w_k = \sqrt[3]{3}\,e^{(-\pi+4k\pi)i/6}\,, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

Povratkom na polaznu promenljivu

$$z = \frac{iw}{w-1}\,, \quad w \neq 1\,,$$

dobijamo rešenja polazne jednačine:

$$z_k = \frac{iw_k}{w_k - 1}, \quad k = 0, 1, 2, \quad w_k \neq 1\,.$$

Uslov $w_k \neq 1$ je ispunjen za svako $k \in \{0, 1, 2\}$, pa su sva rešenja:

$$z_k = \frac{i\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6}}{\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6} - 1}, \qquad k = 0, 1, 2\,.$$

Da bismo dobili ove brojeve u jednom od prihvatljivih oblika kompleksnih brojeva, na primer u algebarskom, potrebno je izvršiti sledeće transformacije:

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{i\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6}}{\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6} - 1} \\
&= i\frac{\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6}}{\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right) - 1} \\
&= i\frac{\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6}}{\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1 + i\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}}\,\frac{\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1 - i\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}}{\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1 - i\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}} \\
&= i\frac{\sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6}\left(\sqrt[3]{3}\, e^{-(-\pi+4k\pi)i/6} - 1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)^2} \\
&= i\frac{\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\, e^{(-\pi+4k\pi)i/6}}{\left(\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)^2} \\
&= i\frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - i\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}}{\left(\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6} + i\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6} - 1\right)^2 + \left(\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt[3]{3}\sin\frac{-\pi+4k\pi}{6} + i\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)}{1 + \sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{3}\cos\frac{-\pi+4k\pi}{6}}, \qquad k = 0, 1, 2\,.
\end{aligned}$$

39. U skupu kompleksnih brojeva naći sva rešenja jednačine

$$z^{2013} = (1 - iz)^{2013}.$$

Rešenje: Prostom proverom utvrđujemo da $z = -i$ nije rešenje zadate jednačine. Zbog toga celu jednačinu možemo podeliti sa $(1 - iz)^{2013} \neq 0$:

$$\frac{z^{2013}}{(1 - iz)^{2013}} = 1 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{z}{1 - iz}\right)^{2013} = 1.$$

Korenovanjem poslednjeg izraza dobijamo

$$\frac{z}{1-iz} = \sqrt[2013]{1}.$$

Uvođenjem oznake

$$w_k = \sqrt[2013]{1} = \sqrt[2013]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{2013} + i\sin\frac{2k\pi}{2013}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2012,$$

uz napomenu da je $\overline{w_k} = 1/w_k$, dobijamo

$$\frac{z_k}{1-iz_k} = w_k \;\Leftrightarrow\; z_k = w_k(1-iz_k).$$

Tražena rešenja možemo predstaviti izrazom

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{w_k}{1+iw_k} = \frac{w_k}{1+iw_k}\cdot\frac{\overline{1+iw_k}}{\overline{1+iw_k}} = \frac{w_k}{1+iw_k}\cdot\frac{1+\overline{iw_k}}{\overline{1+iw_k}}\\
&= \frac{w_k(1-i\overline{w_k})}{|1+iw_k|^2} = \frac{w_k - i}{|1+iw_k|^2}\\
&= \frac{\cos\phi_k + i\sin\phi_k - i}{|1+i(\cos\phi_k + i\sin\phi_k)|^2} \qquad \Big(\phi_k = \frac{2k\pi}{2013}\Big),\\
&= \frac{\cos\phi_k - i(1-\sin\phi_k)}{(1-\sin\phi_k)^2 + (\cos\phi_k)^2}\\
&= \frac{\cos\phi_k - i(1-\sin\phi_k)}{2(1-\sin\phi_k)} = \frac{\cos\phi_k}{2(1-\sin\phi_k)} - \frac{i}{2}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2012.
\end{aligned}$$

Dobijeni izraz bi mogao i dalje da se sređuje, ali to ne daje lepše rezultate. Tako na primer

$$\begin{aligned}
z_k &= \frac{\cos\phi_k - i(1-\sin\phi_k)}{2(1-\sin\phi_k)} = \frac{\cos\phi_k}{2(1-\sin\phi_k)} - \frac{i}{2} = \frac{\sin(\pi/2-\phi_k)}{2\big(1-\cos(\pi/2-\phi_k)\big)} - \frac{i}{2}\\
&= \frac{2\sin\frac{\pi/2-\phi_k}{2}\cos\frac{\pi/2-\phi_k}{2}}{4\sin^2\frac{\pi/2-\phi_k}{2}} - \frac{i}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_k}{2}\Big) - \frac{i}{2}\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{ctg}(\pi/4)\cdot\mathrm{ctg}(\phi_k/2) + 1}{\mathrm{ctg}(\phi_k/2) - \mathrm{ctg}(\pi/4)} = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\Big(\frac{\phi_k}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) - \frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

40. U skupu kompleksnih brojeva odrediti rešenja jednačine

$$\frac{1}{2}z^2 - iz - 1 - \sqrt{2}i = 0.$$

Rešenje: Rešenja kvadratne jednačine $az^2 + bz + c = 0$ data su formulom

$$z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tako su tražena rešenja

$$\begin{aligned} z_{1/2} &= \frac{i \pm \sqrt{i^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{2}i)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \\ &= i \pm \sqrt{-1 + 2(1 + \sqrt{2}i)} = i \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{2}i}. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Za eksplicitne vrednosti rešenja, neophodna je jedna vrednost korena kompleksnog broja $\sqrt{1 + 2\sqrt{2}i}$. Da bismo je odredili, predstavimo $1 + 2\sqrt{2}i$ u obliku potpunog kvadrata

$$1 + 2\sqrt{2}i = (a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Poredeći realne i imaginarne delove kompleksnih brojeva sa različitih strana ove jednakosti, dolazi se do sistema jednačina

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 - b^2 \\ 2\sqrt{2} &= 2ab, \end{aligned}$$

čije je jedno realno rešenje očigledno $a = \sqrt{2},\ b = 1$, odnosno

$$1 + 2\sqrt{2}i = (\sqrt{2} + i)^2.$$

Jasno, drugo realno rešenje $a = -\sqrt{2},\ b = -1$, daće drugu vrednost korena $\sqrt{1 + 2\sqrt{2}i}$. Zamenom u izraz za rešenja (0.1) dobijamo

$$z_{1/2} = i \pm (\sqrt{2} + i)\,, \qquad \text{tj.} \qquad z_1 = \sqrt{2} + 2i\,, \quad z_2 = -\sqrt{2}.$$

41. Rešiti jednačinu

$$z^6 + 2z^3 + 4 = 0.$$

Rešenje: Uvođenjem smene $w = z^3$ dobijamo kvadratnu jednačinu $w^2 + 2w + 4 = 0$, čija su rešenja

$$w_1 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{i} \quad w_2 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}.$$

Prva tri rešenja polazne jednačine dobijamo iz uslova $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$. Kako je

$$-1+i\sqrt{3}=2\Big(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\Big),\quad \Big(\arg\,(-1+i\sqrt{3})=\arctan(-\sqrt{3})+\pi=2\pi/3\Big),$$

to imamo

$$z_k=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{2\pi/3+2k\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi/3+2k\pi}{3}\Big),\quad k=0,1,2.$$

Druga tri rešenja polazne jednačine dobijamo iz $z^3=-1-i\sqrt{3}$. Imamo

$$-1-i\sqrt{3}=2\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)\Big),$$

jer je

$$|-1-i\sqrt{3}|=2\,,\quad \arg\,(-1-i\sqrt{3})=\arctan(\sqrt{3})-\pi=-2\pi/3,$$

pa su tražena rešenja jednaka

$$z'_k=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{-2\pi/3+2k\pi}{3}+i\sin\frac{-2\pi/3+2k\pi}{3}\Big),\quad k=0,1,2.$$

Odredili smo sva rešenja

$$\begin{aligned}
z_0&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\Big), & z'_0&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)+i\sin\Big(-\frac{2\pi}{9}\Big)\Big),\\
z_1&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\Big), & z'_1&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{4\pi}{9}+i\sin\frac{4\pi}{9}\Big),\\
z_2&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\Big), & z'_2&=\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}\Big).
\end{aligned}$$

42. Ako je $w\in\mathbb{C}$ broj za koji važi

$$4w+5\bar{w}+9i=0,$$

naći sva rešenja jednačine

$$z^3+3w=0.$$

Rešenje: U datoj jednačini $4w+5\bar{w}+9i=0$ uzmimo da je $w=x+iy$. Dobijamo

$$4(x+iy)+5(x-iy)+9i=0\ \Leftrightarrow\ 9x=0\wedge -y+9=0\ \Leftrightarrow\ x=0\wedge y=9\ \Leftrightarrow\ w=9i.$$

Sada je

$$z^3 = -3w \;\Leftrightarrow\; z^3 = -27i \;\Leftrightarrow\; z^3 = 27\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big),$$

odakle je, za $k = 0, 1, 2,$

$$z_k = 3\Big(\cos\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\Big).$$

Dobili smo rešenja:

$$\begin{aligned}
z_0 &= 3\Big(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\Big) = 3\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\Big)\,,\\
z_1 &= 3\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = 3i,\\
z_2 &= 3\Big(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\Big) = 3\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\Big)\,.
\end{aligned}$$

43. Odrediti moduo i glavnu vrednost argumenta broja z^{2013}, ako je z kompleksan broj koji zadovoljava jednačinu

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z} + z}{2}\right) + i\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z} + 2}{1 + i}\right) + z = 1 + 3i.$$

Rešenje: Zbog oblika izraza kojim je z definisano, uvodimo smenu $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Tada

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left(\frac{2\bar{z} + z}{2}\right) + i\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{z} + 2}{1 + i}\right) + z = 1 + 3i\\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{2(x - iy) + x + iy}{2}\right) + i\operatorname{Re}\left(\frac{x - iy + 2}{1 + i}\,\frac{1 - i}{1 - i}\right) + x + iy = 1 + 3i\\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{3x - iy}{2}\right) + i\operatorname{Re}\left(\frac{x - y + 2 - i(x + y + 2)}{2}\right) + x + iy = 1 + 3i\\
&\Leftrightarrow -\frac{y}{2} + i\frac{x - y + 2}{2} + x + iy = 1 + 3i\\
&\Leftrightarrow x - \frac{y}{2} + i\frac{x + y + 2}{2} = 1 + 3i.
\end{aligned}$$

Izjednačavajući realni i imaginarni deo poslednje jednakosti, dolazimo do sistema jednačina po realnim nepoznatim x i y :

$$\begin{cases} x - \dfrac{y}{2} = 1,\\ 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = 3. \end{cases}$$

Rešenje sistema $x = y = 2$ određuje $z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 2^{3/2}e^{i\pi/4}$. Tražene vrednosti modula i argumenta glase

$$\begin{aligned} \left|z^{2013}\right| &= |z|^{2013} = \left(2^{3/2}\right)^{2013} = 2^{3\cdot 2013/2} = 2^{6039/2}, \\ \operatorname{Arg}\left(z^{2013}\right) &= 2013(\arg z) = 2013\frac{\pi}{4} = \frac{251\cdot 8\pi + 5\pi}{4} \;\Rightarrow\; \arg\left(z^{2013}\right) = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

44. Neka je z kompleksan broj za koji važi

$$\arg(z+1) = -\frac{\pi}{4}\,, \quad |z+1| = \sqrt{2}.$$

Naći z^n i sve vrednosti $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje: Na osnovu modula i argumenta broja $z + 1$ određujemo

$$z + 1 = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big) = \sqrt{2}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 1 - i.$$

Važi $z = -i = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)$. Sada možemo odrediti z^n,

$$z^n = \Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)^n = \cos\Big(-\frac{n\pi}{2}\Big) + i\sin\Big(-\frac{n\pi}{2}\Big),$$

kao i n vrednosti $\sqrt[n]{z}$

$$z_k = \cos\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

45. Ako kompleksan broj z zadovoljava uslov $z^2 - z + 1 = 0$, odrediti moduo i glavnu vrednost argumenta kompleksnog broja

$$z^{2011} - z^{-2011}.$$

Rešenje: Rešenja jednačine $z^2 - z + 1 = 0$ su kompleksni brojevi

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big).$$

Odredićemo vrednost datog izraza za z_1:

$$\begin{aligned}
z_1^{2011}-z_1^{-2011} &= \Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)^{2011}-\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)^{-2011}\\
&= \cos\frac{2011\pi}{3}+i\sin\frac{2011\pi}{3}-\cos\Big(-\frac{2011\pi}{3}\Big)-i\sin\Big(-\frac{2011\pi}{3}\Big)\\
&= 2i\sin\frac{2011\pi}{3}=2i\sin\Big(335\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\Big)=2i\frac{\sqrt{3}}{2}=i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Imamo da je $|z_1^{2011}-z_1^{-2011}|=\sqrt{3}$, a glavna vrednost argumenta je $\pi/2$.

Slično, za z_2 računamo

$$\begin{aligned}
z_2^{2011}-z_2^{-2011} &= \Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)^{2011}-\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)^{-2011}\\
&= \cos\Big(-\frac{2011\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{2011\pi}{3}\Big)-\cos\frac{2011\pi}{3}-i\sin\frac{2011\pi}{3}\\
&= -2i\sin\frac{2011\pi}{3}=-2i\sin\Big(335\cdot 2\pi+\frac{\pi}{3}\Big)=-2i\frac{\sqrt{3}}{2}=-i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Imamo da je $|z_2^{2011}-z_2^{-2011}|=\sqrt{3}$, a glavna vrednost argumenta je $-\pi/2$.

46. U kompleksnoj ravni predstaviti tačke z ako je:

a) $\begin{cases} |z+i|=2\,, \\ \arg(z+i)=-\pi/3\,; \end{cases}$ **b)** $\operatorname{Re}(z+1)=-2\,;$

c) z treće teme jednakostraničnog trougla čija su dva temena $z_1=0$ i $z_2=2i$.

Rešenje: a) Po navedenim uslovima jasno je da je

$$z+i=2\Big(\cos\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{3}\Big)\Big)=2\Big(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=1-i\sqrt{3}\,,$$

pa je z samo jedna tačka

$$z=1-i\big(1+\sqrt{3}\big)\,.$$

b) Ako je $z=x+iy$, tada je

$$\operatorname{Re}(z+1)=\operatorname{Re}(x+iy+1)=x+1\,.$$

Po navedenom uslovu, $x+1=-2$, tj. $x=-3$, što u kompleksnoj ravni predstavlja pravu paralelnu imaginarnoj osi koja prolazi kroz tačku -3.

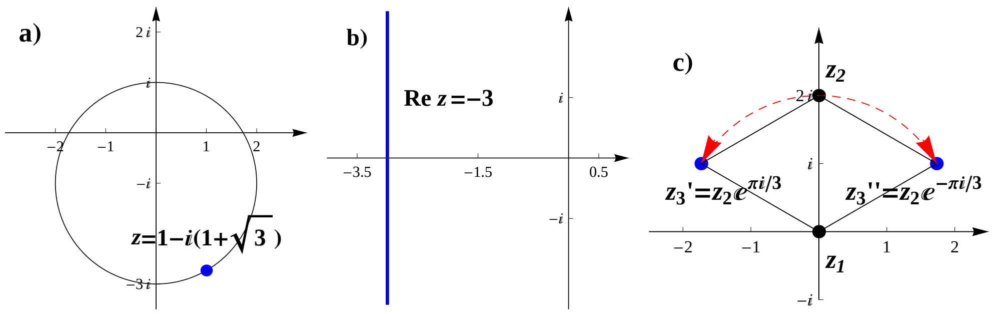
c) Kako su svi unutrašnji uglovi u jednakostraničnom trouglu jednaki $\pi/3$, treće teme može da se dobije rotacijom jednog od zadatih temena oko drugog za ugao

$\pi/3$ u jednom ili drugom smeru. Zadata temena određena su tačkama $z_1 = 0$ i $z_2 = 2i$, pa su mogućnosti za treće teme

$$z_3' = z_2 e^{\pi i/3} = 2e^{\pi i/2} e^{\pi i/3} = 2e^{5\pi i/6} = 2\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\Big) = -\sqrt{3} + i$$

ili

$$z_3'' = z_2 e^{-\pi i/3} = 2e^{\pi i/2} e^{-\pi i/3} = 2e^{\pi i/6} = 2\Big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\Big) = \sqrt{3} + i\,.$$



47. Kompleksnim brojevima

$$z_1 = 2 + i \qquad \text{i} \qquad z_3 = -2 + 3i$$

određena su naspramna temena kvadrata u kompleksnoj ravni. Odrediti preostala dva temena.

Rešenje: Podsetimo se da svaki kompleksni broj $z = x + iy$ može da se identifikuje sa uređenim parom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sa odgovarajućom tačkom u Oxy ravni ili sa vektorom položaja te tačke. Zbog toga se neki geometrijski problemi u ravni mogu rešavati algebarskim metodima u skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Na primer, rastojanje između tačaka $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ može da se izračuna kao $|z_2 - z_1|$. Takođe, broj w koji se dobija rotacijom broja $z = x + iy$ oko 0 za ugao φ može da se izračuna kao $w = ze^{\varphi i}$. Slično, za broj z_3 koji se dobija rotacijom broja z_2 oko z_1 za ugao φ važi $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\varphi i}$.

Zadatak ćemo rešiti na dva načina.

I način: Potražimo nepoznata temena kvadrata u algebarskom obliku. To su tačke koje su podjednako udaljene od temena z_1 i z_3 i nalaze se sa različitih strana dijagonale koja ih spaja. Zato za svako od nepoznatih temena $z = x + iy$ važi:

$$\begin{aligned}
|z-z_1| &= |z-z_3|\,,\\
|z-z_1|^2 &= |z-z_3|^2\,,\\
(x-2)^2+(y-1)^2 &= (x+2)^2+(y-3)^2\,,\\
8x-4y &= -8\,,\\
y &= 2x+2\,.
\end{aligned}$$

Znajući da je dužina dijagonale kvadrata d rastojanje između naspramnih temena, na primer z_1 i z_3, dužina stranice kvadrata a rastojanje između susednih temena, na primer z i z_1 i da je $d = a\sqrt{2}$, imamo:

$$\begin{aligned}
|z_3-z_1| &= \sqrt{2}\,|z-z_1|\,,\\
\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2} &= \sqrt{2}\,\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\,,\\
(x-2)^2+(y-1)^2 &= 10\,.
\end{aligned}$$

Prema tome, koordinate traženih temena zadovoljavaju sistem jednačina

$$(x-2)^2+(y-1)^2=10\,,\qquad y=2x+2\,,$$

čija su rešenja $(x_2,y_2)=(1,4)$ i $(x_4,y_4)=(-1,0)$. Dakle preostala dva temena kvadrata su $z_2=1+4i$ i $z_4=-1$.

<u>*II način:*</u> Tražena temena kvadrata z_2 i z_4 nalaze se na dužima dobijenim rotacijom dijagonale z_1z_3 oko temena z_1 za uglove $-\pi/4$ i $\pi/4$ redom. Osim toga, zbog odnosa između dužina stranice i dijagonale kvadrata važi:

$$|z_3-z_1|=\sqrt{2}\,|z_2-z_1|\,,\qquad |z_3-z_1|=\sqrt{2}\,|z_4-z_1|\,.$$

S obzirom na geometrijsku interpretaciju množenja kompleksnih brojeva, važi

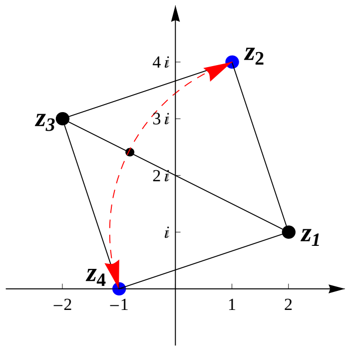
$$z_3-z_1=\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}(z_2-z_1)\,,\qquad z_3-z_1=\sqrt{2}\,e^{-\pi i/4}(z_4-z_1)\,.$$

Zbog toga imamo:

$$\begin{aligned}
z_2-z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3-z_1)e^{-\pi i/4}\,,\\
z_2 &= z_1+\frac{1}{\sqrt{2}}(z_3-z_1)\left(\cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)+i\sin\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\right)\\
&= 2+i+\frac{1}{\sqrt{2}}(-2+3i-2-i)\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\\
&= 1+4i
\end{aligned}$$

i

$$
\begin{aligned}
z_4 - z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_1)e^{\pi i/4}\,,\\
z_4 &= z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_1)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= 2 + i + \frac{1}{\sqrt{2}}(-2 + 3i - 2 - i)\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\\
&= -1\,.
\end{aligned}
$$



48. U kompleksnoj ravni označiti

a) rešenje jednačine $z^3 = -3 - 3\sqrt{3}i$;

b) treće teme jednakostraničnog trougla čija su dva temena određena kompleksnim brojevima $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = -i$.

Rešenje: a) Tražena rešenja $z = \sqrt[3]{-3 - 3\sqrt{3}i}$ predstavljaju treće korene kompleksnog broja. Da bismo ih odredili, neophodan je trigonometrijski ili eksponencijalni oblik kompleksnog broja $-3 - 3\sqrt{3}i$.

$$
\begin{aligned}
&|-3 - 3\sqrt{3}i| = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36} = 6,\\
&-3 - 3\sqrt{3}i = 6\big(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big) = 6\big(\cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\big).
\end{aligned}
$$

Formula za $n-$ti koren kompleksnog broja glasi

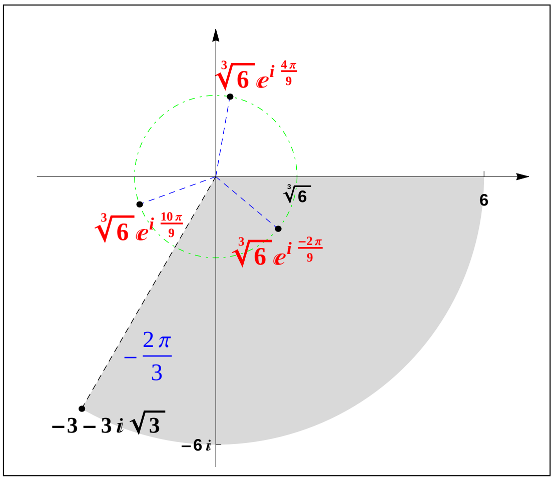
$$
z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1.
$$

Tako je

$$z_k = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{-2\pi/3 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi/3 + 2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Tražene vrednosti su

$$z_0 = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{-2\pi}{9} + i\sin\frac{-2\pi}{9}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{6}\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right).$$



b) *I način:* Primetimo da zadatak ima dva različita rešenja jer se jednakostranični trougao može konstruisati sa dve različite strane duži z_1z_2. Predstavićemo postupak određivanja jednog od rešenja, uz napomenu o promenama u analognoj proceduri za nalaženje drugog rešenja.

Kompleksni brojevi (tačke) poistovećuju se sa njihovim vektorima položaja. Tako i operacija sabiranja vektora i rotacija vektora oko koordinatnog početka, dobijaju svoju algebarsku interpretaciju:

- sabiranje/oduzimanje vektora se svodi na sabiranje/oduzimanje odgovarajućih kompleksnih brojeva,
- rotacija vektora za ugao ϕ interpretira se množenjem kompleksnog broja brojem $e^{i\phi}$.

Traženo treće teme z_3 jednakostraničnog trougla može se odrediti kao kraj vektora $\overrightarrow{z_2z_3} = z_3 - z_2$ koji je rezultat rotacije vektora $\overrightarrow{z_2z_1} = z_1 - z_2$ za ugao $\pi/3$ ($-\pi/3$ za drugo rešenje). Dajući ovim geometrijskim operacijama odgovarajuće algebarske interpretacije, postavljeni problem svodi se na rešavanje jednačine

$$z_3 - z_2 = (z_1 - z_2)e^{i\pi/3}$$

po nepoznatom temenu z_3. Sledi da je

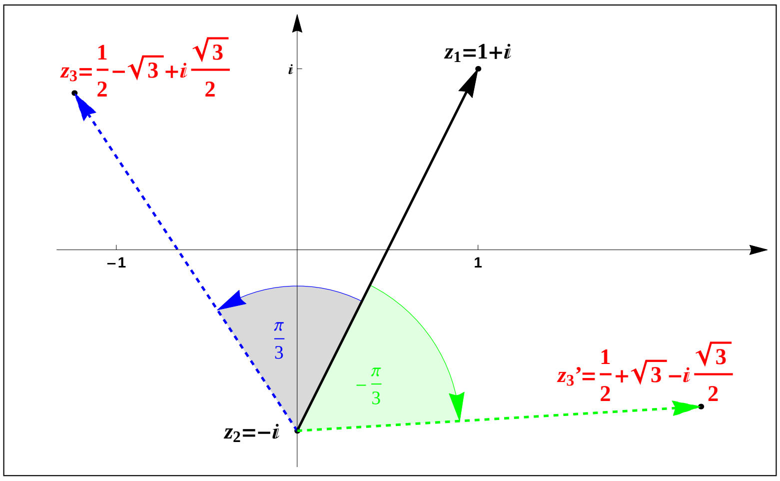
$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)e^{i\pi/3} = -i + (1+2i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

dakle

$$z_3 = \frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{0.2}$$

Drugo rešenje, analognim postupkom, dobija se da je

$$z_3' = \frac{1}{2} + \sqrt{3} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{0.3}$$



<u>*II način:*</u> Uvođenjem algebarskog oblika za traženu tačku $z_3 = x + iy$, nepoznate koordinate $x, y \in \mathbb{R}$ mogu se dobiti iz uslova jednakosti dužina stranica z_2z_3, z_1z_3 i z_2z_1 u jednakostraničnom trouglu $\Delta z_1z_2z_3$:

$$|z_3 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_1 - z_2| \;\Leftrightarrow\; |x + i(y+1)| = |x - 1 + i(y-1)| = |1 + 2i|$$
$$\Leftrightarrow\; x^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 2x + 4y = 1, \\ x^2 + (y+1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-4y}{2}, \\ 20y^2 = 15 \end{cases}$$
$$\Rightarrow\; y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2},\; x = \frac{1}{2} \mp \sqrt{3},$$

što ponovo daje vrednosti koordinata trećeg temena (0.2) i (0.3).

49. Neka $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ zadovoljavaju sistem jednačina

$$z_1 + \overline{z}_2 = 6 + 3i\,, \qquad i\overline{z}_1 + \frac{z_2}{i} = 11 - 4i\,.$$

Odrediti $z_3 \in \mathbb{C}$ tako da tačke određene brojevima z_1, z_2, z_3 budu temena jednakostraničnog trougla.

Rešenje: Ako kompleksni brojevi $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ zadovoljavaju sistem jednačina, tada važi

$$\begin{cases} x_1 + iy_1 + x_2 - iy_2 = 6 + 3i\,, \\ -(x_1 - iy_1) + x_2 + iy_2 = 4 + 11i\,, \end{cases}$$

tj.

$$\begin{cases} (x_1 + x_2 - 6) + i(y_1 - y_2 - 3) = 0\,, \\ (-x_1 + x_2 - 4) + i(y_1 + y_2 - 11) = 0\,. \end{cases}$$

Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6 = 0\,, \\ -x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \qquad \text{i} \qquad \begin{cases} y_1 - y_2 - 3 = 0\,, \\ y_1 + y_2 - 11 = 0 \end{cases}$$

dobijamo

$$x_1 = 1\,, \quad x_2 = 5\,, \quad y_1 = 7\,, \quad y_2 = 4\,,$$

što znači da je

$$z_1 = 1 + 7i\,, \qquad z_2 = 5 + 4i\,.$$

Pošto su svi unutrašnji uglovi u jednakostraničnom trouglu jednaki $\pi/3$, treće teme može da se dobije rotacijom temena z_2 oko temena z_1 za ugao $\pi/3$ ili $-\pi/3$. Zato zadatak ima dva rešenja:

$$\begin{aligned} z_3' &= z_1 + (z_2 - z_1)e^{\pi i/3} = 1 + 7i + (4 - 3i)\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ &= \Big(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big) + i\Big(\frac{11}{2} + 2\sqrt{3}\Big)\,, \\ z_3'' &= z_1 + (z_2 - z_1)e^{-\pi i/3} = 1 + 7i + (4 - 3i)\Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \\ &= \Big(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\Big) + i\Big(\frac{11}{2} - 2\sqrt{3}\Big)\,. \end{aligned}$$

50. Dokazati

$$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}\,.$$

Rešenje: Posmatrajmo kompleksni broj $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Prema Moavrovoj formuli važi

$$z^5 = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta\,.$$

Ako za određivanje z^5 primenimo binomnu formulu, dobijamo

$$
\begin{aligned}
z^5 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}(\cos\theta)^{5-k}(i\sin\theta)^k \\
&= \cos^5\theta + 5i\sin\theta\cos^4\theta - 10\sin^2\theta\cos^3\theta - 10i\sin^3\theta\cos^2\theta + 5\sin^4\theta\cos\theta + i\sin^5\theta\,.
\end{aligned}
$$

Upoređivanje realnih i imaginarnih delova različitih izraza za z^5 daje

$$
\begin{aligned}
\cos 5\theta &= \cos^5\theta - 10\sin^2\theta\cos^3\theta + 5\sin^4\theta\cos\theta\,,\\
\sin 5\theta &= 5\sin\theta\cos^4\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + \sin^5\theta\,.
\end{aligned}
$$

Zato je

$$
\begin{aligned}
\tan 5\theta = \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} &= \frac{5\sin\theta\cos^4\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta - 10\sin^2\theta\cos^3\theta + 5\sin^4\theta\cos\theta} \\
&= \frac{\dfrac{5\sin\theta\cos^4\theta - 10\sin^3\theta\cos^2\theta + \sin^5\theta}{\cos^5\theta}}{\dfrac{\cos^5\theta - 10\sin^2\theta\cos^3\theta + 5\sin^4\theta\cos\theta}{\cos^5\theta}} \\
&= \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^2\theta + 5\tan^4\theta}\,.
\end{aligned}
$$

51. Izračunati zbir

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx\,.$$

Rešenje: Pored zbira S posmatrajmo i zbir

$$C = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx\,.$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
C + iS &= 1 + (\cos x + i\sin x) + (\cos 2x + i\sin 2x) + \cdots + (\cos nx + i\sin nx) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(\cos kx + i\sin kx) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k.
\end{aligned}
$$

Poslednja suma predstavlja zbir prvih $n+1$ članova geometrijskog niza čiji je količnik $q = e^{ix}$, pa je

$$C + iS = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{\left(e^{ix}\right)^{n+1}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} .$$

Sa ciljem da se razdvoje realni i imaginarni deo poslednjeg broja izvršimo transformaciju

$$C + iS = \frac{e^{i(n+1)x/2}\left(e^{i(n+1)x/2} - e^{-i(n+1)x/2}\right)}{e^{ix/2}\left(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\right)} .$$

Imajući u vidu da je $\; z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z \;$ i

$$e^{-i(n+1)x/2} = \overline{e^{i(n+1)x/2}}, \qquad e^{-ix/2} = \overline{e^{ix/2}},$$

$$\frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} = e^{inx/2} = \cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2},$$

važi sledeće:

$$C + iS = e^{inx/2}\,\frac{2i\,\operatorname{Im} e^{i(n+1)x/2}}{2i\,\operatorname{Im} e^{ix/2}} = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right) .$$

Konačno dobijamo

$$C = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}, \qquad S = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} .$$

52.*Ako je $z = \cos(2\pi/3) - i\sin(2\pi/3)$, odrediti vrednost determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z & 1 & z \\ 1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} .$$

Rešenje: Izračunaćemo vrednost determinante D. Oduzećemo od prve kolone treću (vrednost determinante se ne menja) i dobijamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z & 1 & z \\ 1 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-z^2 & z & z^2 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & z^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-z^2)\begin{vmatrix} 1 & z \\ z^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-z^2)(1-z^3).$$

Za datu vrednost $z = \cos(2\pi/3) - i\sin(2\pi/3)$ treba odrediti z^2 i z^3. Odredićemo prvo z^3:

$$z^3 = \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)^3 = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1.$$

S obzirom na dobijeni rezultat, vrednost determinante je $D = 0$.

53.* Odrediti moduo i glavnu vrednost argumenta broja $z \in \mathbb{C}$ koji zadovoljava jednačinu

$$\begin{vmatrix} z & 1 & \bar{z} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2+i & i \end{vmatrix} = 2 - 8i.$$

Rešenje: Izračunavanje determinante trećeg reda, npr. Sarusovim pravilom, polaznu jednačinu pretvara u izraz

$$2 - (4+3i)z + \bar{z} = 2 - 8i \;\Leftrightarrow\; (4+3i)z - \bar{z} = 8i.$$

Uvođenje algebarskog oblika kompleksnog broja $z = x + iy,\; x, y \in \mathbb{R}$, je dalje transformiše u

$$(4+3i)(x+iy) - x + iy = 8i \;\Leftrightarrow\; 3x - 3y + i(3x+5y) = 8i.$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih delova izraza na levoj i desnoj strani poslednje jednakosti, polazni problem svodi se na rešavanje sistema jednačina u skupu realnih brojeva

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0, \\ 3x + 5y = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ 3x + 5x = 8. \end{cases}$$

Traženo rešenje je tada $z = 1 + i$.