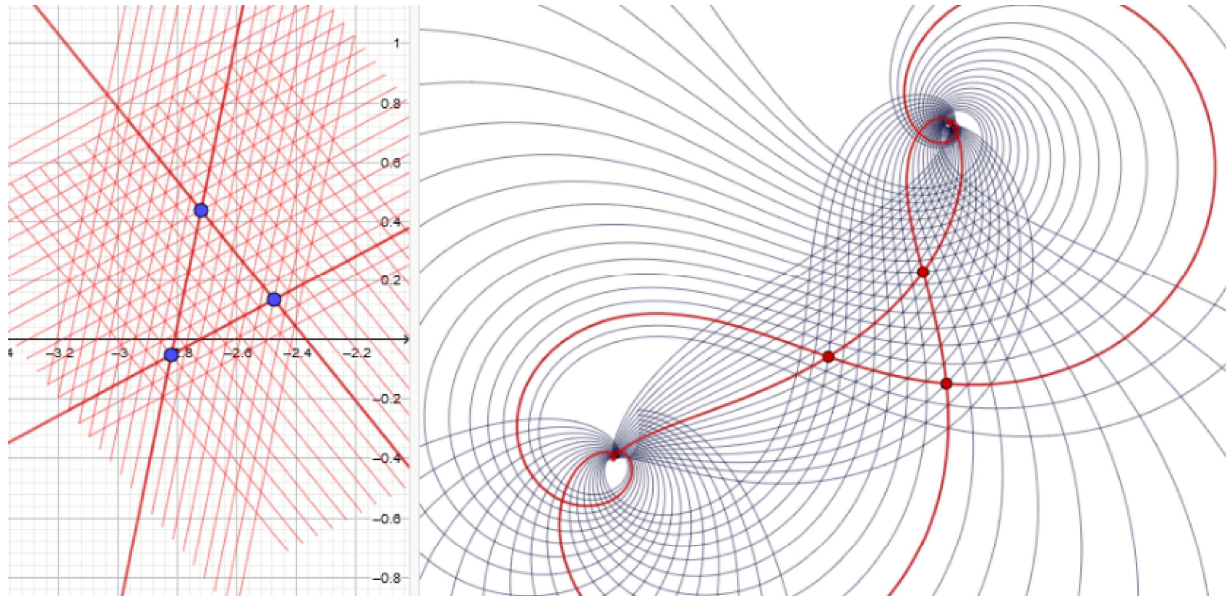


Grundlagen der Gewebelehre

*** z - Ebene $\rightarrow \rightarrow \rightarrow w = \tan(z) \rightarrow \rightarrow \rightarrow w$ - Ebene ***



Dies ist ein **Bild** des Applets auf der [vorigen Seite](#)

Diese Seite ist Teil des GeoGebra-Books [MoebiusEbene](#). (Juli 2019)

Was ist ein **Sechs-Eck-Netz** oder (synonym) ein **Sechs-Eck-Gewebe** (manchmal auch **Drei-Ecks-Netz**)?

Die folgende "Definition" ist nicht unter dem Aspekt größtmöglicher mathematischer Präzision, sondern mit dem Ziel formuliert, so weit möglich ein anschauliches Bild vom Sachverhalt zu entwerfen.

Drei Kurvenscharen in einem offenen Gebiet der Ebene sollen die folgenden Eigenschaften aufweisen:

- Durch jeden Punkt der Ebene geht aus jeder der drei Scharen genau eine Kurve.
- Jede Kurve einer Schar schneidet jede einzelne Kurve einer der anderen Scharen in genau einem Punkt. (*)

Dann bilden die drei Kurvenscharen ein **Sechs-Eck-Gewebe**, wenn folgende Schließungsbedingung erfüllt ist:

Es sei p_0 irgendein Punkt des Gebiets und es seien k_{10} , k_{20} und k_{30} die drei Kurven durch p_0 .

p_1 sei irgendein 2.ter Punkt auf einer der drei Kurven, zB. auf k_{10} .

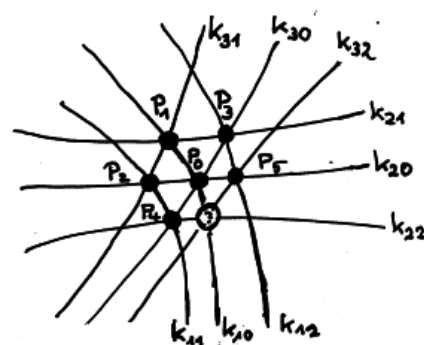
Die Kurven k_{31} und k_{21} durch p_1 schneiden k_{20} , bzw. k_{30} in den Punkten p_2 bzw. p_3 .

Die Kurve k_{11} durch p_2 schneidet k_{30} in p_4 .

Die Kurve k_{12} durch p_3 schneidet k_{20} in p_5 .

Die Kurven k_{22} durch p_4 und k_{32} durch p_5 schneiden sich auf k_{10} .

Das **Sechs-Eck** schließt sich in diesem Schnitt-Punkt p_6 !



Die Frage, ob 3 Kurvenscharen in der Ebene ein **Sechs-Eck-Gewebe** bilden, ist einfach zu beantworten: **Meistens nicht!**

Welche Methoden gibt es, Sechs-Eck-Gewebe zu erkennen?

Die Methoden zum Nachweis für das Vorliegen eines Sechs-Eck-Gewebe sind erstaunlich vielfältig.

Wir wollen sie hier aufzählen, teilweise ohne exakten Beweis.

(*) Diese Bedingung ist für Netze aus Kreisen zu streng: Zwei Kreise können sich in 2 Punkten schneiden, sie können sich berühren (1 Schnittpunkt) oder sie können sich überhaupt nicht schneiden. Diese 3 Fälle liegen oft nahe beieinander! Die auf den folgenden Seiten angezeigten Beispiele von Sechseck-Netzen aus Kreisen lassen die genannten 3 Fälle an den Rändern des Gültigkeitsbereiches gut erkennen.

Drei Parallelenscharen in drei verschiedenen Richtungen bilden stets ein **Sechseck-Gewebe**.

Dies sieht man leicht mit Hilfe der Vektorrechnung ein: Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{P_0 P_1}$ eine der drei Parallelenscharen. Die beiden anderen Richtungsvektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ kann man so normieren, dass $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ gilt. Dann wird das Sechseck-Gewebe punktwise durch $P_0 + k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b}$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ erzeugt. Die Parallelenscharen kann man beschreiben durch Funktionen $\varphi_1(x, y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \text{const}$, $\varphi_2(x, y) = \gamma \cdot x + \delta \cdot y = \text{const}$ und $\varphi_3(x, y) = \sigma \cdot x + \tau \cdot y = \text{const}$ mit reellen Koeffizienten, die man so wählen kann, dass $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0$ gilt.

Wir nennen diese Netze aus 3 Parallelenscharen im Folgenden öfters "Standard-Netze".

Methode I: Bildet man die Parallelen eines Standard-Netzes in einem Gebiet der Ebene ab mit einem **Diffeomorphismus**, so bilden die Bildkurven ein **Sechseck-Netz**.

Besonders schön werden die Bilder mit **konformen** Abbildungen in der **GAUSS**schen Zahlenebene.

Konforme Abbildungen sind komplex-differenzierbare oder meromorphe Funktionen, ohne Nullstellen der Ableitung in dem fraglichen Bereich; sie sind **winkeltreu**, d.h. die Winkel in einem Netz aus 3 Parallelenscharen bleiben unter der Abbildung erhalten.

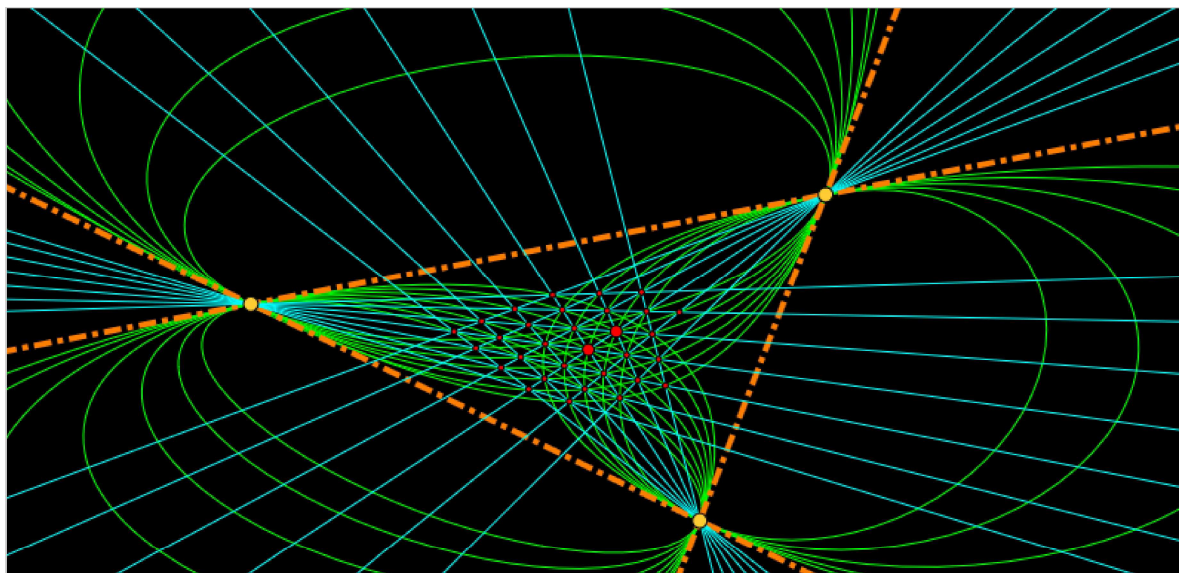
Die Abbildung eines **Standard-Netzes** mit solchen komplex-differenzierbaren Funktionen ist unserer Meinung nach ein besonders nützliches und schönes Hilfsmittel, um die geometrischen Eigenschaften dieser Funktionen zu erkunden.

Oben und auf der Seite zuvor ist das Bild eines **Standard-Netzes** unter der komplexen **tan**-Funktion dargestellt.

Es gilt auch die Umkehrung der obigen Aussage:

Jedes **Sechseck-Gewebe** ist das **diffeomorphe Bild** eines **Standard-Sechseck-Gewebes** aus drei **Parallelenscharen**, zumindest in einem geeigneten offenen Bereich der Ebene und sofern naheliegende Differenzierbarkeits- und Regularitätsbedingungen erfüllt sind.

Sechseck-6-Netz



Methode II: Sind drei Kurvenscharen implizit gegeben als Niveaulinien dreier reellwertigen Funktionen:

- $\varphi_1(x, y) = \text{const}$, $\varphi_2(x, y) = \text{const}$ und $\varphi_3(x, y) = \text{const}$ mit $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 0$

so bilden die 3 Kurvenscharen ein **Sechseck-Gewebe**, sofern die nötigen Differenzierbarkeits- und Regularitätsbedingungen erfüllt sind.

Für **drei Parallelenscharen** haben wir solche Funktionen angegeben (siehe vor **Methode I**).

Im **Applet** oben ist ein ganz besonderes **Sechseck-Netz** zu sehen: **Drei Geradenbüschel** erzeugen stets ein **Sechseck-Netz**.

Dies ist für sich schon bemerkenswert: die **euklidischen Streckungen** der Ebene mit verschiedenen Zentren sind **nicht** vertauschbar, während Verschiebungen es sind (Vektoraddition!). Die **Sechseck-Bedingung** muss also für 3 Geradenbüschel mit verschiedenen Zentren anders als für 3

Parallelenscharen begründet werden.

Oben wird das **Sechs-Eck-Netz** obendrein ergänzt durch 3 Kegelschnittbüschel: die Kegelschnitte durch 2 der Zentren mit den Verbindungsgeraden zum 3. Zentrum als Tangenten.

Je drei diese 6 Kurvenscharen bilden ein **Sechs-Eck-Gewebe**, die anderen 3 Kurvenscharen liefern die Diagonalen des Netzes.

Ein Gewebe aus n Kurvenscharen, von denen je 3 ein **Sechs-Eck-Gewebe** bilden, wird **Sechseck-n-Gewebe** genannt, siehe dazu das Buch [BLA_BO] "Geometrie der Gewebe" von W. BLASCHKE und G. BOL (1938) (Literaturverzeichnis).

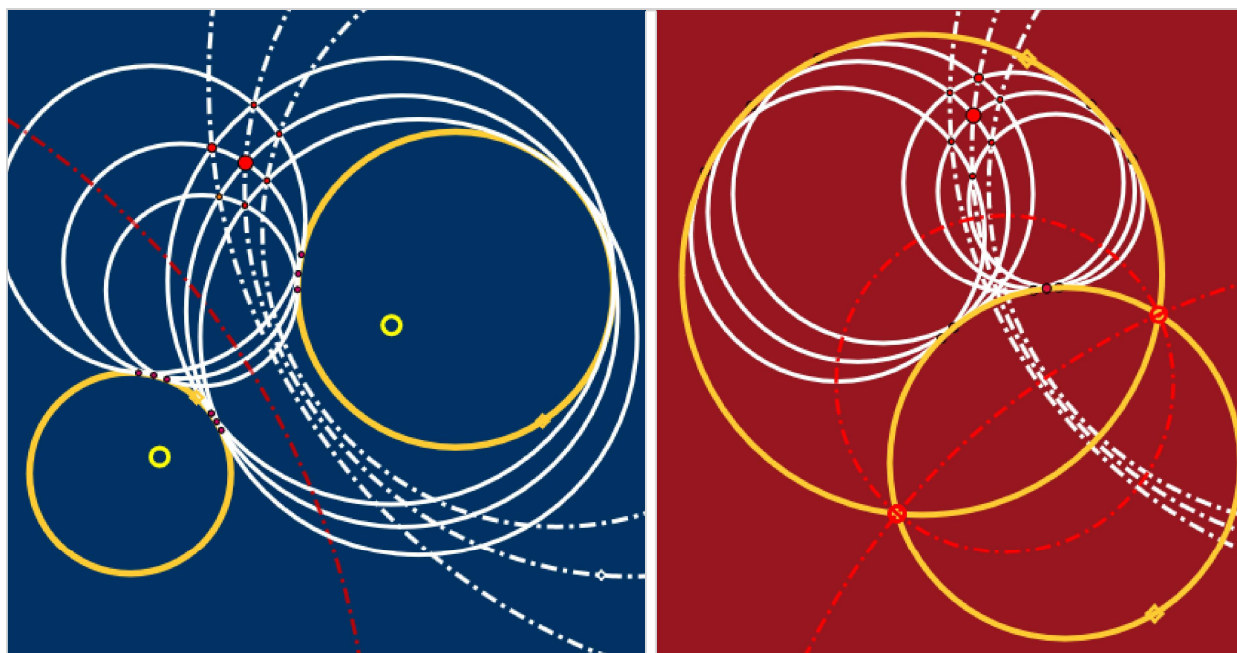
Oben liegt also ein **Sechseck-6-Gewebe** vor.

Begründung (Kurzfassung):

In geeigneten homogenen Koordinaten (u, v, w) sind diese sechs Kurvenscharen Niveaulinien der Funktionen:

- $\varphi_1 = \ln \frac{u}{v}$, $\varphi_2 = \ln \frac{v}{w}$, $\varphi_3 = \ln \frac{w}{u}$;
- und $\varphi_4 = \varphi_1 - \varphi_2 = \ln \frac{uw}{v^2}$, $\varphi_5 = \varphi_2 - \varphi_3 = \ln \frac{vu}{w^2}$, $\varphi_6 = \varphi_3 - \varphi_1 = \ln \frac{wv}{u^2}$

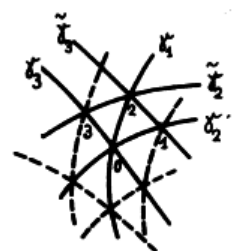
Das Verständnis von "homogenen Koordinaten" setzt ein wenig Vertrautheit mit projektiven Denkweisen voraus. Wir wollen das hier nicht vertiefen!



Methode III: Gibt es zu einem Gewebe aus drei Kurvenscharen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ eine Ein-Parameter-Gruppe $t \mapsto A(t)$ von Abbildungen, für welche die Kurven von $\mathfrak{S}_1$ Bahnkurven sind und die Kurvensysteme $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ als Ganzes festbleiben, so ist das Gewebe ein **Sechs-Eck-Gewebe**. Die oben genannten Voraussetzungen an die 3 Kurvenscharen mögen vorliegen.

Zur **Begründung** zeigen wir, dass sich jede Sechseck-Figur schließt - zumindest im Kleinen.

Es seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die 3 Kurven aus den 3 Scharen durch einen vorgegebenen Punkt p_0 , und es sei p_1 ein zweiter Punkt, etwa auf γ_2 . $\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ seien die Bildkurven unter derjenigen Abbildung A aus der Gruppe, für welche $\tilde{\gamma}_3$ durch p_1 geht. Die Kurven $\gamma_2, \gamma_3, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3$ bilden eine "Raute" mit den Schnittpunkten p_0, p_1, p_2, p_3 . Die Abbildung A^{-1} ergänzt das **Sechs-Eck**, die fehlenden 2 Kurven $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_4$ sind die Bahnkurven durch p_1 und p_3 .

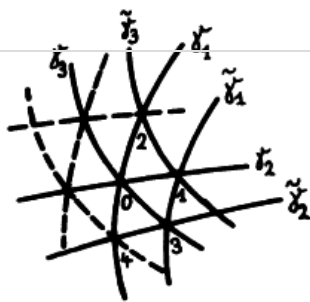


Methode IV: Wieder liege ein Gewebe aus 3 Kurvenscharen $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ mit den genannten Voraussetzungen vor.

Zu jeder Kurve $\gamma \in \mathfrak{S}_1$ möge es eine 'Spiegelung' geben, d.i. eine **involutorische** Abbildung, welche γ punktweise festläßt.

Wenn diese 'Spiegelungen' $\mathfrak{S}_1$ als Ganzes festlassen, und sie die beiden anderen Kurvenscharen $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3$ vertauschen, dann bilden die 3 Scharen ein **Sechs-Eck-Gewebe**.

Begründung: Es seien wie oben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Kurven durch einen Punkt p_0 und p_1 ein weiterer Punkt, beispielsweise auf γ_2 .



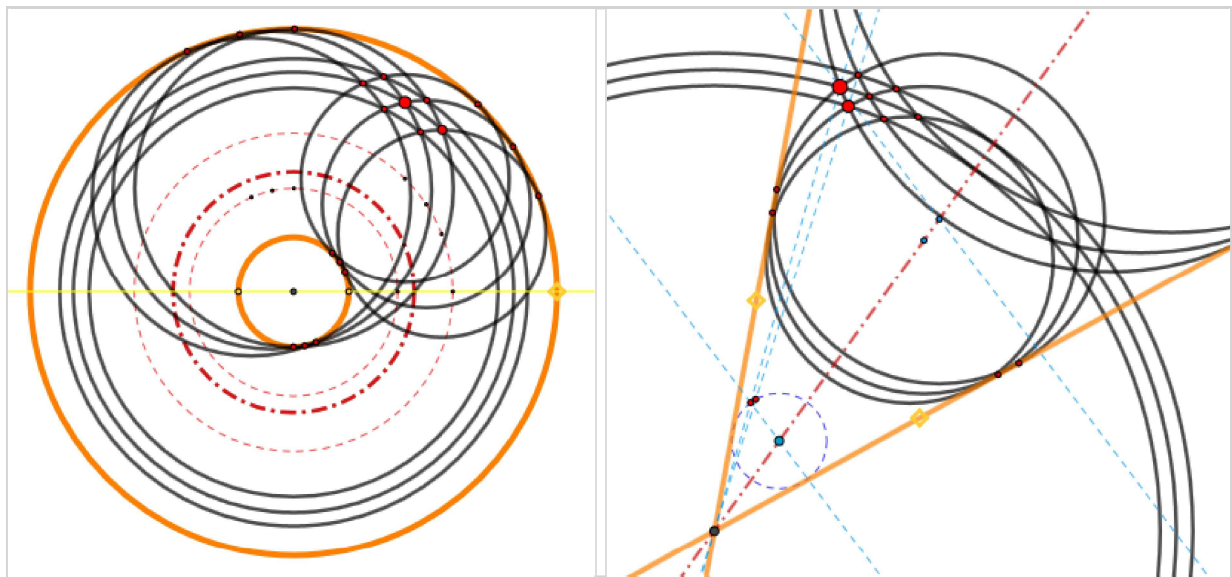
Die Kurve $\tilde{\gamma}_3$ durch p_1 schneide γ_2 in p_2 .
 Die Kurve $\tilde{\gamma}_1$ durch p_1 schneide γ_3 in p_3 .
 Die Kurve $\tilde{\gamma}_2$ durch p_3 schneide γ_1 in p_4 .
 Die Spiegelung an γ_1 ergänzt die Figur zur Sechseckfigur.

In den Applets oben und unten ist **links** ein Beispiel für die **Methode III**, und **rechts** eines für die **Methode IV** dargestellt.

Die Bahnkurven sind **links** die Kreise des elliptischen Kreisbüschel um die beiden Grundpunkte, unten sind das 0 und ∞ , die Bewegungen sind die **Drehungen** um die Grundpunkte.

Die Spiegelungen **rechts** sind die **Spiegelungen** an den elliptischen Kreisen.

Die Schar der Berührkreise bleibt bei den **Drehungen** wie bei den **Spiegelungen** erhalten!



Methode V: Konstruktion mit drei **Vektorfeldern**

Eine Kurvenschar aus differenzierbaren Kurven in einem offenen Gebiet derart, dass durch jeden Punkt genau eine Kurven mit nicht-verschwindender Ableitung geht, legt ein **Vektorfeld** in diesem Gebiet fest.

Zu drei Kurvenscharen gehören, genügende Differenzierbarkeit vorausgesetzt, 3 **Vektorfelder** X_1, X_2, X_3 . Wenn man weiter voraussetzt, dass diese Kurven sich in dem offenen Gebiet nirgends berühren, so zeigen die Tangentialvektoren in jedem Punkt in 3 verschiedene Richtungen. In der Ebene sind 3 Vektoren linear abhängig, es muss daher möglich sein, durch geeignete differenzierbare Umnormierung $\tilde{X}_i = \sigma \cdot X_i$ mit differenzierbaren Funktionen $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ zu erreichen, dass gilt:

- $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \tilde{X}_3 \equiv 0$

Beschreibt man das **Standard-Sechs-Eck-Gewebe** der drei Parallelenscharen

- $x = \text{const}, y = \text{const}, y - x = \text{const}$ durch die **Vektorfelder** $X_1 = \partial_y, X_2 = \partial_y$ und $X_3 = -(\partial_x + \partial_y)$

so ist die Bedingung $X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0$ erfüllt. Überdies gilt in diesem Falle: $[X_i, X_j] \equiv 0$.

Das **LIE-Produkt** zweier **Vektorfelder** X, Y ist dabei erklärt durch: $[X, Y]\varphi := X(Y\varphi) - Y(X\varphi)$. Es gelten die Regeln:

- $X\varphi \cdot \psi = \psi(X\varphi) + \varphi(X\psi)$
- $[\psi X, \varphi Y] = \psi \cdot \varphi[X, Y] + \psi(X\varphi)Y - \varphi(Y\psi)X$

Kriterium: Ein Gewebe $\mathfrak{W}^3$ werde beschrieben durch die drei Vektorfelder X_1, X_2, X_3 mit $X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0$.

Das Gewebe ist genau dann ein Sechseck-Gewebe, wenn eine gemeinsame Umnormierung $\tilde{X}_i = \sigma \cdot X_i$, $\sigma \neq 0$ existiert, so dass das **LIE-Produkt** verschwindet:

- $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] \equiv 0, i, j = 1, 2, 3$

Wir wollen im Folgenden die **Sechs-Eck-Gewebe** aus **Kreisbüscheln** bestimmen. Dazu formulieren wir das **Kriterium** in einer uns nützlichen Form:

- Für die Vektorfelder X_1, X_2, X_3 gelte in einem Gebiet
 - $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 \equiv 0$ mit nirgends verschwindenden reellwertigen Funktionen λ_i ,
 - und es sei $[X_1, X_2] = \tau_1 X_1 - \tau_2 X_2$.

Die Integralkurven bilden genau dann ein Sechs-Eck-Gewebe, wenn gilt:

$$\circ X_1 \tau_1 - X_2 \tau_2 + \tau_1 \cdot \frac{X_1 \lambda_2}{\lambda_2} - \tau_2 \cdot \frac{X_2 \lambda_1}{\lambda_1} + X_2 \frac{X_1 \lambda_2}{\lambda_2} - X_1 \frac{X_2 \lambda_1}{\lambda_1} \equiv 0$$

Wir hatten die Infinitesimalen von Kreisbüscheln als **Vektorfelder** gedeutet. Zwei Infinitesimale sind nur dann vertauschbar, d.h. ihr **LIE-Produkt** ist 0, wenn sie zu demselben hyperbolischen, bzw. parabolischen Kreisbüschel gehören.

Es sei also z.B. $\vec{g} \in \mathcal{G}$ ein hyperbolischer Kreisbüschel. Die Vektorfelder $X_1 = a \cdot \vec{g}, X_2 = b \cdot \vec{g}, X_3 = -(a+b) \cdot \vec{g}$ erfüllen das obige Kriterium, wenn $a, b \in \mathbb{C}$ nicht reell abhängig sind.

Es handelt sich um ein Sechs-Eck-Gewebe aus Kurven, die die Kreise des **hyperbolischen Kreisbüschels** $\vec{g}$ unter 3 verschiedenen Winkeln schneiden:

das **Deckblatt** dieses **ge**  **gebra-books** zeigt ein solches **Sechs-Eck-Gewebe**.

