10.3.10 Určitý integrál

Předpoklady: 100309

V několika minulých hodinách jsme se učili integrovat - hledali jsme primitivní funkce.

Krátké shrnutí:
Pro hezké funkce $F(x)$ dokážeme postupem, který nazýváme derivování, najít zcela přesně funkci $f(x)$, které říkáme derivace funkce $F(x)$ (píšeme $f(x)=F'(x)$).
Funkce $f(x)$:

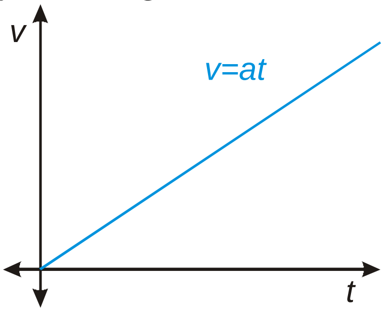
- říká, jak rychle se v libovolném bodě mění hodnoty původní funkce $F(x)$,
- určuje hodnotu směrnice tečny grafu v libovolném bodě,
- umožňuje v základní fyzikální situaci, kdy je jedna veličina přímo úměrná změně jiné veličiny ($v=\frac{ds}{dt}$) vypočítat veličinu, která udává změnu $v=\frac{ds}{dt}$.

Pro hezké funkce $f(x)$ dokážeme postupem, který nazýváme integrování, najít zcela přesně funkci $F(x)$, které říkáme primitivní funkce k funkci $f(x)$ (píšeme $F(x)=\int f(x)\,dx$).
Funkce $f(x)$:

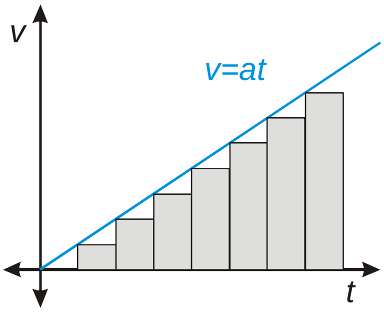
- umožňuje v základní fyzikální situaci, kdy je jedna veličina přímo úměrná změně jiné veličiny ($v=\frac{ds}{dt}$) vypočítat veličinu, která je určena změnou druhé $s=\int v\,dt$.

Zatím jsme neprobrali žádné matematické aplikace primitivní funkce. Z fyzikální aplikace je zřejmé, že **integrování nám zachycuje "přibývání hodnot" funkce** $F(x)$**, které je dané hodnotami funkce** $f(x)$.

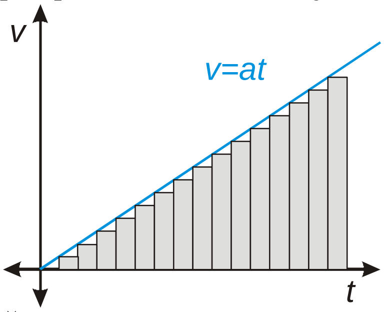
Jak jsme získali vzorce pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu v prvním ročníku, když jsme o integrování a derivování neměli ani potuchu?



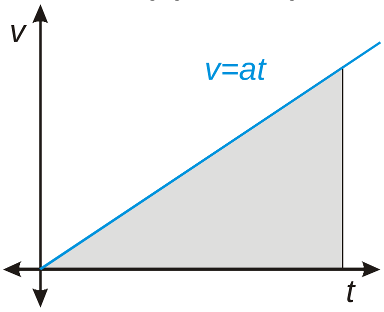
Rychlost auta se měnila (rovnoměrně zvětšovala) $\Rightarrow$ nemohli jsme použít vzorec $s=vt$.



Rozdělili jsme si pohyb na jednotlivé části, ve kterých jsme předpokládali rovnoměrný pohyb rychlostí v_i (pak je možné pro každou takovou část použít vzorec $s_i = v_i \Delta t$). Celkovou dráhu pak představoval součet jednotlivých schodů.



Čím tenčí byly schůdky, tím menší byla chyba, kterou jsme při výpočtu dráhy udělali.



Kdybychom dokázali počítat s nekonečně tenkými schůdky, získali bychom dráhu zcela přesně jako plochu pod grafem rychlosti $s = S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{t \cdot v}{2} = \frac{t \cdot at}{2} = \frac{at^2}{2} = \frac{1}{2}at^2$.

Stejný výsledek jsme získali integrováním vzorce $v = at$:

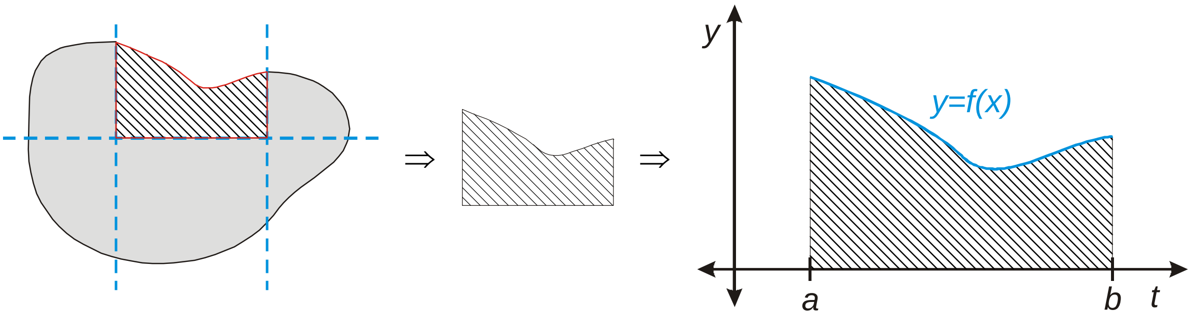
$s = \int v\,dt = s = \int at\,dt = \frac{1}{2}at^2 + C = \frac{1}{2}at^2$ (pro nulovou hodnotu počáteční rychlostí a počáteční dráhy).

Zdá se, že:

- integrování umožňuje sčítat nekonečně mnoho nekonečně malých kousků (podobně derivování umožňovalo určit podíl dvou nekonečně malých kousků),
- integrování má něco společného s počítáním ploch (které si "rozdělíme" na nekonečně mnoho nekonečně malých kousků).

Vzorec pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu jsme dokázali určit jenom díku tomu, že plocha, která ho reprezentovala, měla tvar trojúhelníku (pro který máme vzorec), s výpočtem mnoha jiných ploch jsme si nevěděli rady. Pokud integrování s výpočtem ploch opravdu souvisí, mohli bychom tyto problémy vyřešit, protože integrovat dokážeme daleko víc funkcí než jen lineární $v = at$.

Prostudujeme situaci pečlivěji. Integrování provádíme s funkcemi $\Rightarrow$ libovolnou plochu rozdělíme tak, aby jednotlivé části bylo možné považovat za plochy ohraničené částí grafu funkce.

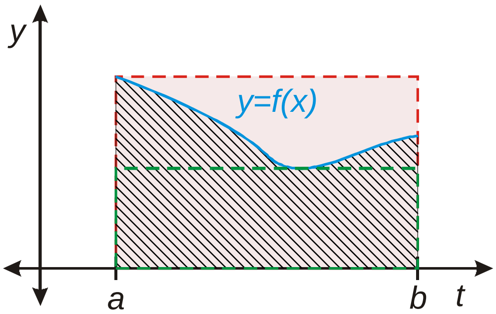


Část plochy nyní můžeme vnímat jako plochu pod grafem funkce $y = f(x)$, přesněji jako rovinný útvar omezený:

- grafem funkce $y = f(x)$ pro $\langle a;b\rangle$,
- přímkou $x = a$,
- přímkou $x = b$,
- přímkou $y = 0$ (osa *x*).

Zkoumaný útvar je určen body *a*, *b* a funkcí *f* $\Rightarrow$ označíme ho tedy $\mathrm{U} = (a, b, f)$, jeho obsah pak $S(\mathrm{U})$. Funkce *f* může být libovolná spojitá a nezáporná.

Číslo $S(\mathrm{U})$ můžeme hrubě odhadnou pomocí následujícího obrázku.



Platí:

- Číslo $S(\mathrm{U})$ je určitě větší než obsah zeleného obdélníku, jehož výška se rovná *m* (nejmenší hodnota funkce $y = f(x)$ v intervalu $\langle a;b\rangle$) $\Rightarrow$ $S(\mathrm{U}) \geq m(b-a)$.
- Číslo $S(\mathrm{U})$ je určitě menší než obsah červeného obdélníku, jehož výška se rovná *M* (největší hodnota funkce $y = f(x)$ v intervalu $\langle a;b\rangle$) $\Rightarrow$ $S(\mathrm{U}) \leq M(b-a)$.

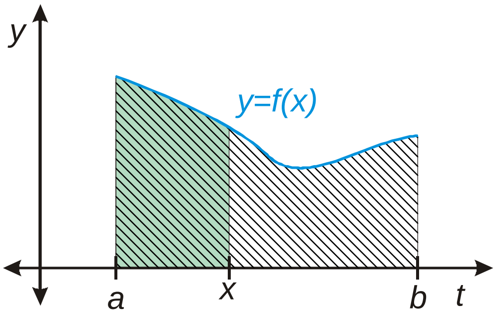
Celkově tedy platí: $m(b-a) \leq S(\mathrm{U}) \leq M(b-a)$.

Př. 1: Proč v nerovnost nezapisujeme jako $m(b-a) < S(\mathrm{U}) < M(b-a)$? Najdi příklad funkce, kvůli které musíme použít zápis $m(b-a) \leq S(\mathrm{U}) \leq M(b-a)$.

Náš postup se snažíme provádět co nejobecněji, u libovolné konstantní funkce $y = C$ by oba obdélníky splynuly s vyšrafovaným útvarem a platilo by $m(b-a) = S(\mathrm{U}) = M(b-a)$.

Protože plochu pod grafem konstantní funkce umíme spočítat i bez integrálů, měli bychom se snažit, aby postup platil i pro ní a mohli jsme již známé výsledky použít pro kontrolu.

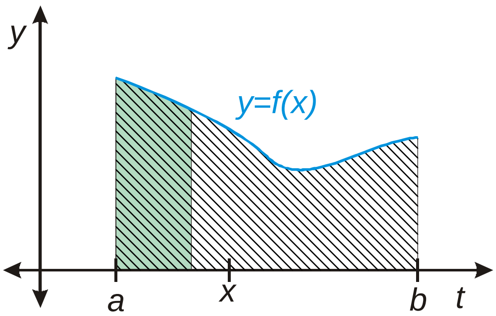
Při odvozování vzorce pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu jsme si představovali, jak je plocha složena z malých velmi tenkých nudliček $\Rightarrow$ prozkoumáme, co se děje s obsahem pod křivkou, když k němu jednu takovou nudličku přidáme.



Zvolíme $x \in \langle a;b \rangle$ a tím rozdělíme útvar $\mathrm{U} = (a,b,f)$ na dvě části, zajímá nás, jak se mění plocha zelené části $\mathrm{U} = (a,x,f)$. Obsah útvaru závisí na tom, jaké x zvolíme, proto jej můžeme považovat za funkci proměnné x a značit ho $S(x)$.

Př. 2: Jak se budou měnit hodnoty funkce $S(x)$, když se x bude z nakreslené polohy přibližovat k bodu a? Urči hodnotu $S(a)$ a $S(b)$.

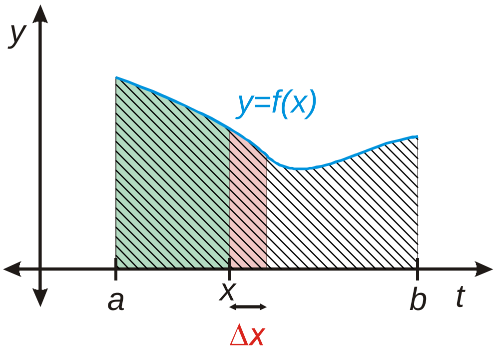
Pokud budeme hodnotu x přibližovat k bodu a, bude se plocha zeleného útvaru zmenšovat $\Rightarrow$ budou se zmenšovat hodnoty funkce $S(x)$.



Platí:

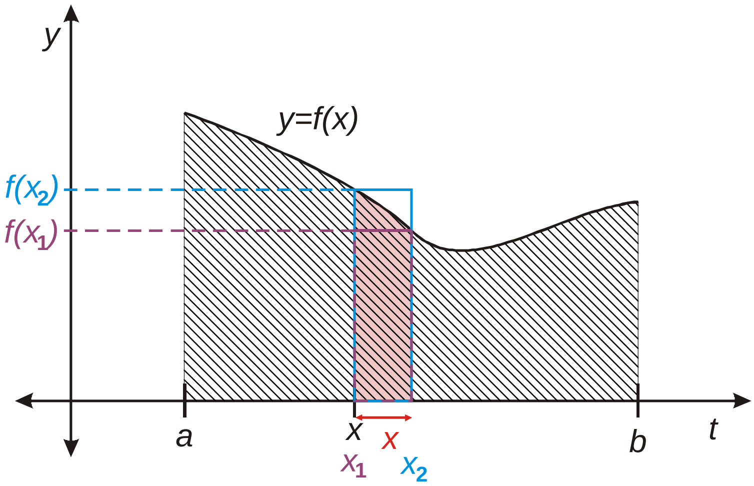
- $S(a) = 0$ (pokud bod x splyne s bodem a, zelený útvar má nulový obsah).
- $S(b) = S(\mathrm{U})$ (pokud bod x splyne s bodem b, zelený útvar splyne s útvarem $\mathrm{U} = (a,b,f)$ a jejich obsahy se budou rovnat).

Jak souvisí změny hodnoty funkce $S(x)$ s hodnotami funkce $f(x)$?



Posunutím zvětšením x o Δx se obsah útvaru zvětší o červeně vyznačenou část $\Delta S(x) = S(x+\Delta x) - S(x)$.

Př. 3: Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle x; x+\Delta x\rangle$ a proto v tomto intervalu nabývá největší hodnoty $f(x_2)$ i nejmenší hodnoty $f(x_1)$. čemu se rovnají x_2 a x_1 v předchozím obrázku? Odhadni pomocí hodnot $f(x_2)$ a $f(x_1)$ červeně vyznačený obsah $\Delta S(x)$.



V našem případě platí:

- $x_2 = x$ (funkce v intervalu $\langle x; x+\Delta x\rangle$ největší hodnotu v bodě x),
- $x_1 = x+\Delta x$ (funkce v intervalu $\langle x; x+\Delta x\rangle$ nejmenší hodnotu v bodě $x+\Delta x$).

Obsah $\Delta S(x)$ je určitě:

- menší nebo roven obsahu modrého obdélníku $f(x_2)\Delta x$,
- větší nebo roven obsahu fialového obdélníku $f(x_1)\Delta x$.

Platí tedy: $f(x_1)\Delta x \le \Delta S(x) \le f(x_2)\Delta x$

Začneme nerovnost $f(x_1)\Delta x \le \Delta S(x) \le f(x_2)\Delta x$ upravovat.

$$f(x_1)\Delta x \le \Delta S(x) \le f(x_2)\Delta x \quad / : \Delta x$$

$$f(x_1) \le \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \le f(x_2)$$

Chyba v určení $\Delta S(x)$ se bude zmenšovat s tím, jak se bude ztenčovat červená část útvaru, tedy s tím jak, se Δx bude blížit k nule. Jak se při zmenšování Δx zachová nerovnost $f(x_1) \le \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \le f(x_2)$?

Najednou platí:

- $\Delta x \to 0+$ (Δx je v našem případě větší než nula),
- $x_2 \to x$, protože funkce je spojitá také $f(x_2) \to f(x)$,
- $x_1 \to x$, protože funkce je spojitá také $f(x_1) \to f(x)$.

Získáváme nerovnost: $f(x) \le \lim_{x\to 0+} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \le f(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Stejně bychom postupovali v případě, že Δx bylo záporné a získali bychom vztah $\lim_{x\to 0-} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Spojíme obě limity dohromady: $\lim_{x\to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x)$.

Přejedeme k diferenciálnímu zápisu: $\frac{dS(x)}{dx} = f(x) \Rightarrow$ hodnoty funkce $f(x)$ udávají změnu funkce $S(x)$ (vypadalo to tak od počátku) $\Rightarrow$ funkci $S(x)$ můžeme najít integrováním.

$S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$

Př. 4: Hodnotu funkce $S(x)$ a tedy obsah útvaru $\mathrm{U} = (a, x, f)$ můžeme určit vztahem $S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + C$. *C* značí neznámou integrační konstantu, kterou hledáním primitivní funkce nemůžeme určit. Bez jejího určení by však obsah mohl nabývat libovolné hodnoty (což je zjevně nesmyslné). Hledej způsob, jak určit konkrétní velikost integrační konstanty *C*.

Pro funkci $S(x)$ jsme stanovili dvě podmínky:

- $S(a) = 0$,
- $S(b) = S(U)$.

Využijme podmínku $S(a) = 0$:

$S(x) = F(x) + C$

$S(a) = F(a) + C = 0$

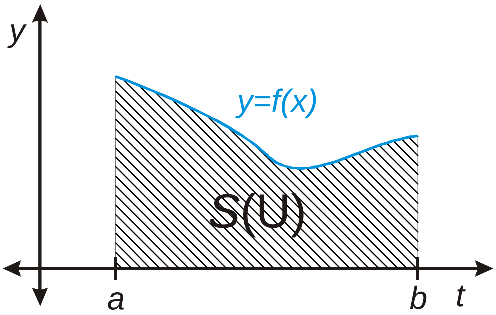
$F(a) + C = 0$

$C = -F(a)$

Pro hodnoty funkce $S(x)$ platí: $S(x) = \int f(x)\,dx = F(x) - F(a)$.

Pro obsah celého útvaru $\mathrm{U} = (a, b, f)$: $S(b) = F(b) - F(a)$.

Při určení obsahu útvaru $\mathrm{U}=(a,b,f)$ ohraničeného libovolnou na intervalu $\langle a;b\rangle$ spojitou funkcí $f(x)$ postupujeme ve dvou krocích.



- **Určíme primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x)$.**
- **Určíme rozdíl hodnot primitivní funkce $F(b)-F(a)=S(\mathrm{U})$.**

Rozdíl $F(b)-F(a)$ hraje v matematice i aplikacích velmi důležitou roli, proto má svůj název i značení.

> Nechť *F* je primitivní funkce k funkci *f* v intervalu *I*. Rozdíl $F(b)-F(a)$ funkčních hodnot funkce *F* v libovolných bodech *a*, *b* tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce *f* v mezích od *a* do *b* a značí se $\int_a^b f(x)\,dx$.

Terminologie:

- x - integrační proměnná,
- a - dolní mez integrálu,
- b - horní mez integrálu,
- f - integrand.

Při výpočtech se běžně zapisuje jako součást postupu i nalezená primitivní funkce:
$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Dodatek: Určitý integrál zavedený tímto způsobem se nazývá Newtonův určitý integrál. Kromě této klasické definice se od 19. století používá modernější součtová definice určitého integrálu. Myšlenku součtové definice jsme použili na počátku hodiny u příkladu s odvozováním vzorce pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu: rozdělíme interval na jednotlivé nudličky a dokážeme, že při zjemňování dělení, horní i dolní odhad postupně směřují k jedné hodnotě, kterou prohlásíme za určitý integrál.

Př. 5: Urči obsah útvaru, který vytyčuje graf funkce $y=x^2$, pro *x* od 1 do 3.

Plochu určíme výpočtem určitého integrálu: $\int_1^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$

Obsah plochy pod částí paraboly od 1 do 3 je $\frac{26}{3}$.

Př. 6: Primitivních funkcí *F* k funkci *f* existuje nekonečně mnoho a všechny mají tvar $F(x)+C$. Dokaž, že hodnota určitého integrálu $\int_a^b f(x)dx$ nezávisí na tom, kterou z primitivních funkcí $F(x)+C$ pro výpočet zvolíme.

Platí: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.
Zkusíme zvolit jinou z primitivních funkcí, pro kterou platí $G(x)=F(x)+C$.
$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b)-G(a) = F(b)+C-[F(a)+C] = F(b)+C-F(a)-C =$
$= F(b)-F(a)$
Získali jsme stejnou hodnotu $\Rightarrow$ při výpočtu určitého integrálu na volbě primitivní funkce nezáleží.

Naše úvahy se týkaly uzavřených intervalů. Proto bychom měli ještě uvést znění věty, která určuje existenci primitivní funkce v uzavřeném intervalu.
Ke každé funkci spojité v uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$ existuje v tomto intervalu primitivní funkce.

Shrnutí: Obsah plochy pod křivkou grafu funkce určíme pomocí rozdílu hodnot primitivní funkce - určitým integrálem.