# Problemas – Tema 4

# CCSS problemas resueltos - 2 - producto de matrices - cuándo conmutan dos matrices

**1. Hallar todas las matrices que conmutan con:**

**a)** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para hallar una matriz que conmute con $A$ se tiene que cumplir que $A \cdot X = X \cdot A$ . Es decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+z & y+t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices.

$$\begin{pmatrix} x+z=x \\ y+t=x+y \\ z=z \\ t=z+t \end{pmatrix} \rightarrow z=0 \ , \ x=t \ , \ y= \text{ parámetro libre } \rightarrow X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Para hallar una matriz que conmute con $B$ se tiene que cumplir que $B \cdot X = X \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-2z & y-2t \\ -3x-4z & -3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y & -2x+4y \\ z-3t & -2z+4t \end{pmatrix}$$

Igualando término a término, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$x-2z=x-3y \rightarrow 2z=3y$

$y-2t=-2x+4y$

$-3x+4z=z-3t$

$-3y+4t=-2z+4t \rightarrow -3y=-2z$

Tomamos como parámetros libre las incógnitas $z, t$ .

$$x=z+t \quad , \quad y=\frac{2}{3}z \rightarrow X=\begin{pmatrix} z+t & \frac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix}$$

c) $C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Para hallar una matriz que conmute con $C$ se tiene que cumplir que $C\cdot X=X\cdot C$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x-z & -y-t \\ 2x+3z & 2y+3t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+2y & -x+3y \\ -z+2t & -z+3t \end{pmatrix}$$

Igualando términos tenemos un sistema cuatro por cuatro:

$-x-z=-x+2y \rightarrow -z=2y$

$-y-t=-x+3y \rightarrow -t=-x+4y$

$2x+3z=-z+2t \rightarrow 2x=-4z+2t \rightarrow x=-2z+t$

$2y+3t=-z+3t \rightarrow -z=2y$

Tomamos $y$ como parámetro libre:

$z=-2y$

$t=x-4y \rightarrow x=4y+t$

$x=-2z+t \rightarrow x=4y+t$

Tomamos $t$ como parámetro libre → $X=\begin{pmatrix} 4y+t & y \\ -2y & t \end{pmatrix}$

**2. Sean las matrices** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix}$ **. Hallar** $a, b, c$ **para que conmuten.**

Dos matrices conmutan si y solo si se cumple:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Aplicado a nuestro problema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 & b+c \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ 1+c & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando término a término obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas:

$$a+1=a+b$$

$$b+c=a$$

$$a=1+c$$

$$b=1$$

Por lo tanto, $b=1$ y $a=1+c$ , quedando $c$ como parámetro libre.

Es decir:

$$B=\begin{pmatrix} c+1 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$