

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B**. Indica, en la primera hoja donde resuelves el examen, la opción elegida.

c) La puntuación de cada pregunta está indicada en la misma.

d) Contesta de forma razonada y escribe a bolígrafo (no a lápiz) ordenadamente y con letra clara. Las faltas de ortografía, la mala presentación y no explicar adecuadamente las operaciones pueden restar hasta un máximo de 1 punto de la nota final.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Opción A

Ejercicio 1.- Calcula los siguientes límites:

a) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

b) [1 punto] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

c) [0,5 puntos] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^{x^2} - e^x + x^3}{x^4 + e^x - 2e^{x^2}}$

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, justifica por qué lo es. Y si es falsa pon un ejemplo concreto que demuestre que es falsa.

“Si una función $f(x)$ tiene límite por la izquierda en $x = x_0$ igual al valor del límite por la derecha en $x = x_0$, la función es continua en $x = x_0$ ”.

Ejercicio 3.- [2,5 puntos] Calcula el valor de k para que se verifique $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + kx + 1}) = 1$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Estudia la continuidad y discontinuidad de la función en toda la recta real.

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + \frac{2x}{\pi} & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 + \sin(x) & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Escribe la ecuación de una función que no sea inyectiva en el intervalo cerrado $[3,7]$. Dibuja también la forma de la función en ese intervalo cerrado.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, justifica por qué lo es. Y si es falsa pon un ejemplo concreto que demuestre que es falsa.

“Si una función $f(x)$ está definida en el punto $x=x_0$, de tal forma que $f(x_0)=k$, $k \in \mathbb{R}$, entonces el límite de la función en el punto $x=x_0$ es igual a k ”.

Ejercicio 3.- Sea el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x - y + m \cdot z = 0 \\ m \cdot x + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2m \cdot z = 0 \end{cases}$$

a) [2 puntos] Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$.

b) [0,5 puntos] Resolver el sistema, si es posible, para $m = -2$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Calcular a y b para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \frac{-x}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$