

Trabajo Final Integrador Curso: “Animación en GeoGebra”

INFORME: PROTOCOLOS DE CONSTRUCCIÓN

En el siguiente informe se establecerá la secuencia de pasos realizados para la construcción de cuatro recursos didácticos que abarcan contenidos de Álgebra Lineal como: Suma y resta de vectores; Cómo generar un plano; Ortogonalización de una base; Proyección y Reflexión de un vector sobre un plano. Además, se aclarará algunas herramientas y comandos utilizados para cada recurso.

1. SUMA Y RESTA DE VECTORES:

Herramientas utilizadas: vectores, casillas de entradas, botones, puntos, cuadriláteros, textos y formato simbólico en las casillas de entradas.

Comandos: Valor(); TextoFracción(); EstáDefinido(); Esquina(); Segmento[]

Descripción: El recurso es interactivo, es decir, el usuario ingresa los vectores que querrá sumar o restar. Luego utilizando los botones correspondientes podrá visualizar el resultado analítica y geoméricamente de sumar o restar los vectores ingresados. Por último, con el botón “Borrar” podrá borrar los vectores ingresados y

PROTOCOLO:

- 1) Se crean los vectores $\vec{v} = (?, ?)$ y $\vec{u} = (?, ?)$.
- 2) Se incorporan dos casillas de entrada para que el usuario ingrese los vectores \vec{v} y \vec{u} . Se configuran en “Simbólico” para que pueda ingresar cualquier número real.
- 3) Se crean dos segmentos que muestran la traslación de los vectores \vec{v} y \vec{u} . El segmento $f = \text{Segmento}[(x(v), y(v)), (x(v + u), y(v + u))]$ y $g = \text{Segmento}[(x(u), y(u)), (x(v + u), y(v + u))]$. Se visualizará el paralelogramo formado por \vec{v} y \vec{u} .
- 4) Se crean los vectores resultados al hacer la suma y resta: $\vec{b} = \vec{v} + \vec{u}$ y $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$.
- 5) Se crea el vector resultado de realizar la resta y que se visualizará en el gráfico el : $\vec{a} = \text{Vector}((x(u), y(u)), (x(v), y(v)))$.
- 6) Se crean puntos con los extremos finales de los vectores \vec{v} , \vec{u} , \vec{b} y \vec{w} . Luego, se utiliza el comando “TextoFracción(PUNTO)” y se crean textos. Esto permite que si se trabaja con número reales no se visualicen números redondeados.
- 7) Se crean dos textos donde se ven las operaciones con los resultados correspondientes. Ambos textos tienen como condición para mostrar: EstáDefinido(b), EstáDefinido(w).
- 8) Se crean dos botones: “SUMAR” y “RESTAR”. Al hacer clic, el primer botón, define al vector \vec{b} como $\text{Valor}(b, u + v)$ y el segundo botón redefine a \vec{b} para que vuelva a estar indefinido y define a \vec{w} como $\text{Valor}(w, a)$.
- 9) Se crea el botón “BORRAR” para poder volver a ingresar nuevos vectores. Este botón lo que hace es volver a indefinir a \vec{v} y \vec{u} .
- 10) Se crean cuatro vértices con el comando Esquina() y el cuadrilátero con éstos 4 puntos. De esta manera se crea una sección en la vista gráfica donde estén las casillas y botones.

- 11) Se modifican los colores de los vectores, botones, cuadrilátero, etc. para que sea más clara la visualización.
- 12) Se crea el texto “Ingresá dos vectores” para indiciar al usuario cómo comenzar.
- 13) Se configura a los botones, textos y casilla de entrada su posición absoluta para que al mover la vista gráfica sigan en la misma posición.

2. PLANO GENERADO:

Herramientas utilizadas: vectores, deslizadores, casillas de control, botones, puntos, cuadriláteros, textos, segmentos y polígono.

Comandos: Valor(); Segmento[]; IniciaAnimación[]; ZoomAcerca[]

Descripción: El recurso tiene como objetivo que el usuario pueda visualizar por qué un plano se genera a partir de dos vectores linealmente independientes y la importancia del concepto de combinación lineal.

El recurso es interactivo, es decir, el usuario puede iniciar, pausar y reiniciar los deslizadores por separado o en conjunto. Estos valores son los escalares correspondientes de la combinación lineal. De esta manera, podrá visualizar el efecto geométrico de multiplicar a un vector por un escalar y la suma.

Por otra parte, con las casillas de control se puede visualizar, si se desea, el plano generado y cómo a partir de la combinación lineal de sus generadores se va “rellenando” el plano de vectores. Además, se podrá pedir de ver su ecuación vectorial.

PROTOCOLO:

- 1) Se crean dos vectores aleatorios $\vec{v} = (2,0,-2)$ y $\vec{u} = (2,2,0)$.
- 2) Se crean los dos deslizadores α y λ que serán los escalares de la combinación lineal.
- 3) Se crean los vectores $\vec{w} = \alpha \cdot u + \lambda \cdot v$, $\vec{a} = \alpha \cdot u$ y $\vec{b} = \lambda \cdot v$ que son los que se visualizan en la vista gráfica 3D.
- 4) Se crean los textos de las expresiones de los vectores para visualizar en la vista gráfica 3D.
- 5) Se crean los puntos que serán los extremos de los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{w} .
- 6) Se crean dos Segmentos con el comando “segmento[punto,punto]” para visualizar la los vectores \vec{u} y \vec{v} trasladados y formar el paralelogramo.
- 7) Se crean los 9 botones. Los primeros 3 son para trabajar solamente con λ y visualizar el efecto geométrico de multiplicar al vector v por el escalar λ . Los segundos 3 botones son para trabajar solamente con α y visualizar el efecto geométrico de multiplicar al vector u por el escalar α . Los 3 botones finales permiten visualizar la combinación lineal final. En los botones de “Iniciar” se usa el comando IniciaAnimación[,true]. Para los de “Parar” el de IniciaAnimación[,false]. Por último, para el de “Reiniciar” se usa el comando Valor() para reiniciar los deslizadores en el valor 1.
- 8) Se crea un polígono con el paralelogramo que será el plano generado.
- 9) Se crea el texto de la ecuación vectorial del plano.

- 10) Se crean las casillas de control para visualizar, si se requiere, el plano que sería el polígono y la ecuación vectorial del plano.
- 11) Se utiliza la gráfica 2D para insertar los botones, deslizadores y las casillas de control.
- 12) Se cambia de color: los ejes, los vectores visibles, el polígono, los textos y el fondo de la gráfica 2D para una mejor visualización del recurso.

3. ORTOGONALIZACIÓN DE UNA BASE CON GRAM SCHMIDT:

Herramientas utilizadas: vectores, deslizadores, botones, casillas de entradas, matriz, listas, puntos y textos.

Comandos: Valor(); IniciaAnimación[]; Textolrracional(); Si(); SonIguales(); Determinante(); Longitud(); Elemento(); Vector(); Lista{}; EstáDefinido()

Descripción: El recurso es interactivo y de verificación, es decir, el usuario debe ingresar la base de R^3 que quiere ortogonalizar y luego ingresar el resultado (la base ortogonal) al utilizar el procedimiento de Gram Schmidt. Si hay algún error se visualizarán textos que indiquen esto y un botón de “borrar” para que vuelva a cargar la base.

Una vez cargadas las bases, y si no se registra un error, el usuario podrá seleccionar el botón “verificar” que le permitirá visualizar en la vista gráfica el proceso de ortogonalización y la retroalimentación de la respuesta: primero diciendo si lo ingresado por el usuario es correcto y luego mostrando la respuesta correcta.

PROTOCOLO:

$u = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_1, 1))$

- 1) Se crea una lista l_1 que contiene los vectores $\{u, v, w\}$ que son los que el usuario ingresará como base a ortogonalizar.
- 2) Se crea la casilla de entrada para que el usuario ingrese la lista l_1 .
- 3) Se crean los vectores de manera que $u = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_1, 1))$; $v = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_2, 1))$; $w = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_3, 1))$.
- 4) Se crea un deslizador a para poder visualizar la traslación de los vectores de la base ingresada en l_1 a los vectores de la base ortogonal.
- 5) Se crean los vectores que serán la solución al problema: $v_1 = u$, $v_2 = v - a \cdot \frac{(v \cdot v_1)}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1$, $v_3 = w - a \cdot \frac{(w \cdot v_1)}{v_1 \cdot v_1} \cdot v_1 - a \cdot \frac{(w \cdot v_2)}{v_2 \cdot v_2} \cdot v_2$. Donde se utiliza el procedimiento de Gram Schmidt.
- 6) Para que las componentes de los vectores de l_1 no tengan decimales redondeados se crean los puntos extremos de estos vectores $P = u + (0,0,0)$, $H = v + (0,0,0)$ y $Q = w + (0,0,0)$.
- 7) Se crean tres textos: “TextosIrracionales(P)”, “TextosIrracionales(H)”, “TextosIrracionales(Q)” en las que se visualizarán los vectores de l_1 .
- 8) Se crea otro Texto para mostrar la respuesta correcta al problema y se usan como objetos los tres textos creados en 7).

- 9) Se crea una segunda lista compuesta por los tres vectores canónicos $l_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ que serán los que ingrese luego el usuario como base ya ortogonalizada.
- 10) Se crean los vectores $j_1 = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_2, 1))$, $j_2 = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_2, 2))$, $j_3 = \text{Vector}(\text{Elemento}(l_2, 3))$ para luego poder hacer comparaciones con la respuesta correcta.
- 11) Se crea la segunda casilla de entrada para que el usuario ingrese la segunda "Base ortogonal" que será la lista l_2 .
- 12) Se crea una lista $l_3: \{\text{"Muy bien"}, \text{"Cuidado. No es base"}, \text{"No es base ortogonal"}, \text{"Intenta de nuevo"}\}$ compuesta por textos que aparecerán en el recurso en la medida que el usuario interaccione.
- 13) Se crean dos textos indicando qué hacer.
- 14) Desaparecemos la base original $\{u, v, w\}$ incorporando la condición de que estén visibles cuando el deslizador esté en $a = 0$.
- 15) Creamos matriz $A = \{\{x(u), y(u), z(u)\}, \{x(v), y(v), z(v)\}, \{x(w), y(w), z(w)\}\}$ que tiene como columnas los vectores de la base ingresada al comienzo por el usuario. La idea será analizar si efectivamente es una base.
- 16) Se calcula el Determinante $(A)=b$.
- 17) Se crea un texto condicionado: $\text{Si}(\text{Determinante}(A)=0, \text{Elemento}(L3,2))$ donde aparecerá que lo que escribió "No es base".
- 18) Se realizan los productos internos: $q_1 = j_1 \cdot j_2$, $q_2 = j_3 \cdot j_2$ y $q_3 = j_1 \cdot j_3$ para analizar si la base ortogonal ingresada por el usuario efectivamente es ortogonal.
- 19) Se crea un texto condicionado: $\text{Si}(q_1 \neq 0 \vee q_2 \neq 0 \vee q_3 \neq 0, \text{Elemento}(L3,3))$. El recurso mostrará un texto indicando que lo ingresado en la segunda casilla de entrada no es una base ortogonal.
- 20) Se crea otro texto condicionado: $\text{Si}(\text{SonIguales}(v_1, j_1) \wedge \text{SonIguales}(v_2, j_2) \wedge \text{SonIguales}(v_3, j_3))$ "Muy bien", "La respuesta es incorrecta"). Donde se analiza si la respuesta ingresada por el usuario corresponde con la solución correcta del problema.
- 21) Se crea el Botón: "Verifica" utilizando el comando $\text{IniciaAnimación}(a, \text{true})$ que permite visualizar en la vista gráfica la traslación de los vectores de la base ingresada primero a los de la base ortogonal ingresada en segundo lugar. Se le agrega la condición para mostrar de que: $\text{Determinante}(A) \neq 0 \ \&\& \ (q_1 = 0 \ \&\& \ q_2 = 0 \ \&\& \ q_3 = 0)$. Se muestra si realmente las bases son base y la segunda es ortogonal.
- 22) Si al ingresar escribe como base algo que no es base, o si ingresa una base que no es ortogonal aparecerán dos botones "BORRAR". El primero para la primera la base con el comando $\text{Valor}(l_1, \{\text{???}\})$ y el segundo para la segunda base con $\text{Valor}(l_2, \{\text{???}\})$. Permiten borrar la base correspondiente donde se produjo el error.
- 23) Se ponen condiciones para mostrar los botones borrar. El primero si $\text{Determinante}(A) \neq 0 \vee \text{Longitud}(l_1) \neq 3$ ya que significa que lo ingresado no es base así sea porque los vectores no son linealmente independientes o porque no son 3 para formar una base del espacio. Para el segundo botón que: $\text{EstáDefinido}(j_1) \wedge \text{EstáDefinido}(j_2) \wedge \text{EstáDefinido}(j_3) \wedge (q_1 \neq 0 \vee q_2 \neq 0 \vee q_3 \neq 0)$, ya que significa que lo ingresado no es base ortogonal.
- 24) Se crea la condición para mostrar el texto condicionado "La respuesta es incorrecta" cuando el deslizador sea $a = 1$.

- 25) Se crea otro texto: “La base ya es ortogonal” con la condición de visualización que: $uw \stackrel{?}{=} 0 \wedge u \cdot v \stackrel{?}{=} 0 \wedge w \cdot v \stackrel{?}{=} 0$. Significa que si la base que ingresa al comienzo ya es ortogonal no hay más nada que hacer y aparece este cartel indicándolo.
- 26) Se cambia de colores a los ejes para que se visualicen mejor los vectores de las bases correspondientes. Luego, se agrega color para diferenciar estos vectores, el fondo de la vista gráfica 2D y los textos.

4. PROYECCIÓN Y REFLEXIÓN DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN PLANO:

Herramientas utilizadas: vectores, deslizadores, botones, casillas de entradas, casilla de control, puntos, planos y textos.

Comandos: Valor(); IniciaAnimación[]; TextoFracción(); Si(); SonIguales()

Descripción: El recurso es interactivo y da respuesta al problema, es decir, el usuario debe ingresar el vector que quiere proyectar o reflejar y el plano escribiendo sólo sus coeficientes. Luego en la vista algebraica se podrá visualizar el vector y el plano ingresado. Siguiendo a esto, podrá pedirle al recurso la proyección o la reflexión o ambas y se podrá observar cuál es el vector proyectado o reflejado con respecto al plano. Además, se establece por un texto cuál es el vector solución.

PROTOCOLO:

1. Se crea un vector aleatorio u que será el vector que se quiere proyectar y/o reflejar.
2. Se crean 3 constantes a, b, c que serán los coeficientes del plano.
3. Se crea el plano con los coeficientes ingresados por el usuario y su complemento ortogonal.
4. Se crea un texto que contiene la ecuación general del plano que tiene como condición para visualizar que estén definidos a, b, c .
5. Se crean 4 casillas de entradas. La primera para el vector que se quiere proyectar y/o reflejar y las otras 3 que corresponden a los coeficientes del plano.
6. Se crean dos deslizadores d, e para que el movimiento al proyectar y reflejar, correspondientemente, sea continuo y se pueda visualizar en la vista gráfica 3D.
7. Se crean los vectores p, w haciendo cuentas algebraicas para calcular la proyección del vector sobre el plano ingresado por el usuario. Luego, otro vector r calculando la reflexión donde se utiliza el vector p .
8. Se crean 3 botones: “Proyectar”, “Reflexión” y “Nuevo”. En los dos primeros casos se inicia la animación del deslizador correspondiente. El último se vuelven a indefinir u, a, b, c, d, e .
9. Se crean los puntos P y H que son los extremos de los vectores r, w .
10. Se crean dos TextoFracción(P), TextoFracción(H).
11. Se crean los textos indicando la respuesta correspondiente al proyectar y/o reflejar.
12. Se crea la casilla de control para visualizar, si el usuario lo desea, el complemento ortogonal del plano ingresado y su ecuación vectorial.

