24 Geometria projectiva

24.4 Còniques1

24.4.1 Definició puntual

24.4.2 Raigs projectants: Hipèrbola. Paràbola. El·lipse

24.4.1 Definició puntual

Tenim dos punts propis P i P'. Del punt P surten tres raigs projectants a, b i c. De la mateixa manera, del punt P' surten tres raigs projectants a', b', c'. La intersecció dels raigs homòlegs dona els punt A, B i C. Pels punts P, P', A, B i C passa una el·lipse i una sola. Si en lloc dels tres raigs n'haguéssim traçat molts, podríem definir l'el·lipse com el *lloc geomètric de la intersecció dels raigs homòlegs que s'han traçat des de P i P'*. Inicialment hem treballat amb l'el·lipse, però igual passa amb les altres còniques. Si des del punt P i P' tracem tangents a l'el·lipse, trobem el punt d'intersecció O. Busquem les interseccions creuades dels raigs projectius, per exemple, el punt B'A entre els raigs b' i a i, de la mateixa manera, obtenim el punt A'B. Ara observem que els punts O, A'B i B'A estan alineats i igual passa amb els altres dos (fig. 24.10).

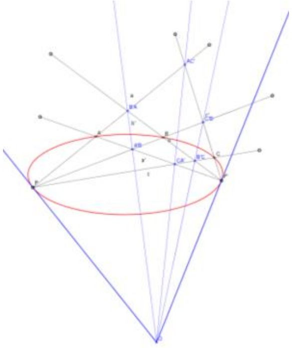

Fig. 24.10

24.4.2 Raigs projectants: Hipèrbola. Paràbola. El·lipse

<u>Hipèrbola.</u> Es tracta de traçar una hipèrbola pel mètode dels raigs projectants. El traçat es desenvolupa en el primer quadrat i, seguidament, per simetria de l'eix vertical que passa per O, es trasllada als altres tres quadrants. Es disposa de tres punts mòbils. El primer A i el seu simètric A' és l'eix segons x de la hipèrbola. El segon F i el seu simètric F' defineixen els focus de la hipèrbola. Finalment, el punt X defineix la seva amplitud. Des del punt F' es traça un cercle de radi r'= A'X i des d'F un altre de radi r= AX. La intersecció dels dos cercles ens dona el punt B, que ja és un punt de la hipèrbola. Traçant perpendiculars als eixos s'obtenen els punts C i D. Els segments C-B i B-D es divideixen en un número igual de punts. Es tracen, per ordre, raigs projectants des del punt A' al segment B-D-D i des del punt A al segment C-B. La intersecció d'aquests raigs ens donaran els punts de la hipèrbola en el primer quadrant (fig. 24.11).

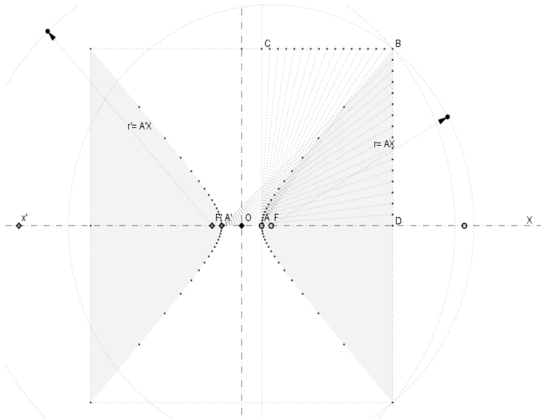

Fig. 24.11

<u>Paràbola.</u> Tenim el punt A, que es troba a la directriu, i l'eix focal A-B de la futura paràbola. Aquest eix focal és perpendicular a la directriu pel punt A. F és el focus i V el vèrtex de la paràbola. La distància A-V és la mateixa que la distància V-F. Amb centre el punt A i radi r, igual al segment A-B, es dibuixa un cercle, i amb el mateix radi r un altre cercle amb centre el focus F. Aquest últim cercle troba en el punt D la perpendicular per B a l'eix focal. El punt C es troba tal com es veu a la figura 24.12 amb dues perpendiculars per V i D. Dividint el segment V-C i el C-D amb un nombre igual de punts, les interseccions ordenades des de les perpendiculars del segment V-C amb les projeccions des de V, ens donarà els punts de la paràbola. S'ha fet servir l'eix focal com a eix de simetria.

Fig. 24.12

El·lipse. Disposem dels eixos perpendiculars de la futura el·lipse A-B i C-D que es troben en el centre O. Els semieixos O-B i O-C es divideixen en un nombre de parts iguals. El primer semieix es trasllada paral·lelament al punt C i el segon igualment al punt B. Des del punt D i C es projecten raigs als punt trobats i la seva intersecció ordenada ens dona els punts d'un quart d'el·lipse. Per simetria s'han trobat els punts dels altres quarts restants (fig. 24.13).

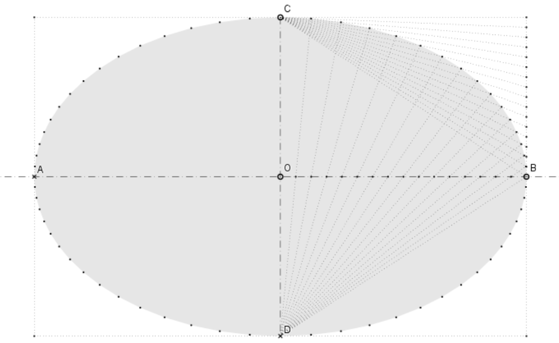

Fig. 24.13