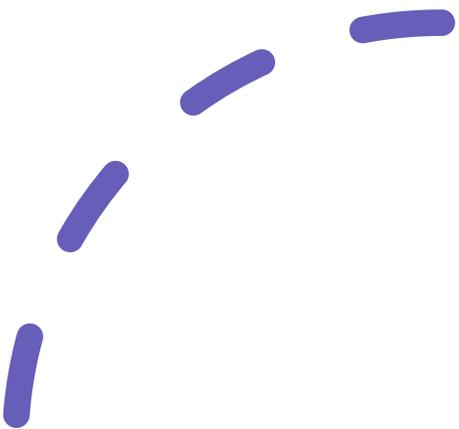
The background is a dark gray field filled with various geometric shapes. There are several plus signs in different colors: orange, purple, and dark gray. Some are solid, while others are dashed. There are also various rectangular shapes, some solid and some with a 3D effect. A large white circle is centered on the page, containing the title text. A small purple circle is positioned at the bottom right edge of the white circle.

Räuber-Beute- Modell



Wachstumsmodelle

Wachstumsmodelle können das Verhalten **einer** Population beschreiben.

Welche Wachstumsmodelle sind euch bekannt?

Wachstumsmodelle

- Lineares Wachstum
- Exponentielles Wachstum
- Beschränktes Wachstum
- Logistisches Wachstum



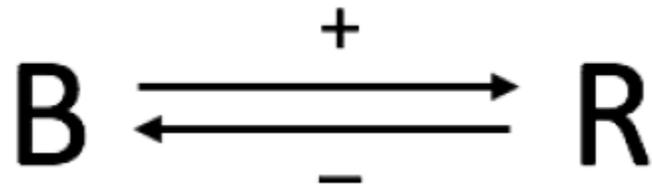
Wechselwirkende Populationen

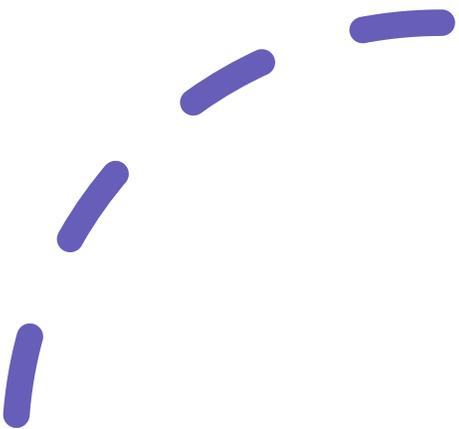
Wir betrachten nun zwei voneinander abhängige Populationen, zum Beispiel Haie und Sardinen. Die Haie sind dabei die Räuber-Fische und die Sardinen die Beute-Fische. Wie könnten solche wechselwirkenden Populationen modelliert werden?

Wechselwirkende Populationen

Die meisten Organismen müssen ihre Nährstoffe von anderen Organismen erhalten. Das Wachstum der einen Population erfolgt daher zwangsläufig auf Kosten und zum Nachteil der anderen Population, da diese beispielsweise als Nahrung dient.

Diese Beziehung zwischen Schädigern (Haie) und Geschädigten (Sardinen) wird als Räuber-Beute-System bezeichnet.





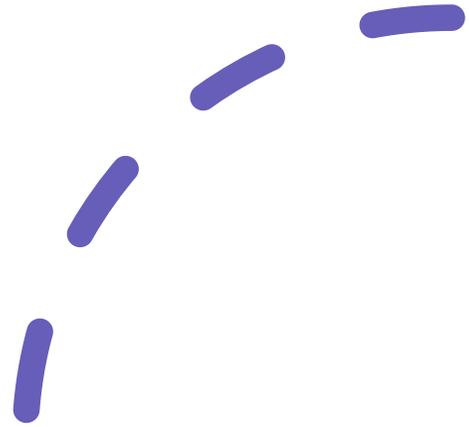
Modellannahmen

Räuber-Beute-Modell

Welche Annahmen sind für die Modellierung eines einfachen Räuber-Beute-Modells zu treffen?

Modellannahmen Räuber-Beute-Modell

- isolierte Populationen
- keine Krankheiten
- keine weiteren Raubtiere
- konstante Fortpflanzungs- und Sterberaten
- unbegrenztes Nahrungsangebot für die Beutetiere
- Begegnung von Räubern und Beute schadet der Beute und begünstigt die Räuber
- ...



Grenzfälle

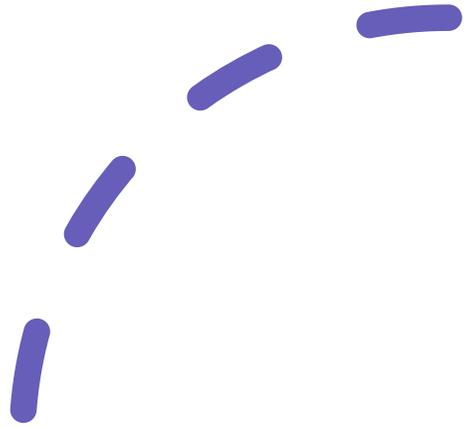
Wie entwickeln sich die Populationen, wenn es keine Räuber oder keine Beute gibt?

Grenzfälle

Grenzfall 1:
ohne Räuber wächst
die Population der
Beutetiere
exponentiell

Grenzfall 2:
ohne Beute stirbt die
Population der
Räuber exponentiell
aus

→ ohne Wechselwirkung würden sich beide Populationen exponentiell entwickeln



Variablen

Welche Variablen benötigt man für die mathematische Beschreibung der Entwicklung der Populationen?

Variablen

- $B(t)$... Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt t
- $R(t)$... Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt t
- g_b ... Geburtenrate der Beutetiere
- g_r ... Geburtenrate der Räuber
- f ... Fressfaktor
- s_r ... Sterberate der Räuber



Räuber-Beute-Modell

Wie könnten die Änderungen der beiden Populationen mit der Zeit mit Hilfe von Gleichungen mathematisch beschrieben werden?

Räuber-Beute-Modell (differentielle Form)

$$\frac{dB}{dt} = \underbrace{g_b \cdot B(t)}_{\text{Grenzfall 1}} - f \cdot B(t) \cdot R(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = g_r \cdot R(t) \cdot B(t) - \underbrace{s_r \cdot R(t)}_{\text{Grenzfall 2}}$$

→ System gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung

Räuber-Beute-Modell (differentielle Form)

$$\frac{dB}{dt} = g_b \cdot B(t) - f \cdot B(t) \cdot R(t)$$

Die zeitliche Änderung der Beute ergibt sich aus den Geburten der Beute abzüglich eines Terms, der Angibt, wie häufig die Beute von den Räubern gefressen wird.

$$\frac{dR}{dt} = g_r \cdot R(t) \cdot B(t) - s_r \cdot R(t)$$

Die zeitliche Änderung der Räuber ergibt sich aus den Geburten der Räuber, die proportional zu der Beutepopulation sind, abzüglich jener Räuber, die sterben.

Gekoppelte Differentialgleichungssysteme

Differentialgleichung:

- Gleichung, die eine Funktion mit ihren Ableitungen verknüpft
- Lösung ist eine Funktion, keine Zahl

Gekoppelte Differentialgleichungssysteme:

- mehrere Differentialgleichungen in mehreren Variablen

Geschichtlicher Hintergrund

Solche Systeme gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung sind unabhängig voneinander von dem österreichisch-amerikanischen Mathematiker Alfred James Lotka und dem italienischen Mathematiker und Physiker Vito Volterra untersucht worden.

- Lotka 1925: Schneeschuhhasen und Luchse, Kanada
- Volterra 1926: Speisefische und Haie, Adria

Räuber-Beute-Modell (diskrete Form)

$$B_{n+1} = B_n + g_b \cdot B_n - f \cdot B_n \cdot R_n$$

Die Anzahl der Beute zum Zeitpunkt $n+1$ ergibt sich aus der Anzahl der Beute zum Zeitpunkt n abzüglich eines Terms, der angibt, wie oft die Beute von den Räubern gefressen wird.

$$R_{n+1} = R_n + g_r \cdot R_n \cdot B_n - s \cdot R_n$$

Die Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt $n+1$ ergibt sich aus der Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt n zuzüglich der Räuber, die geboren werden und abzüglich der Räuber, die sterben.

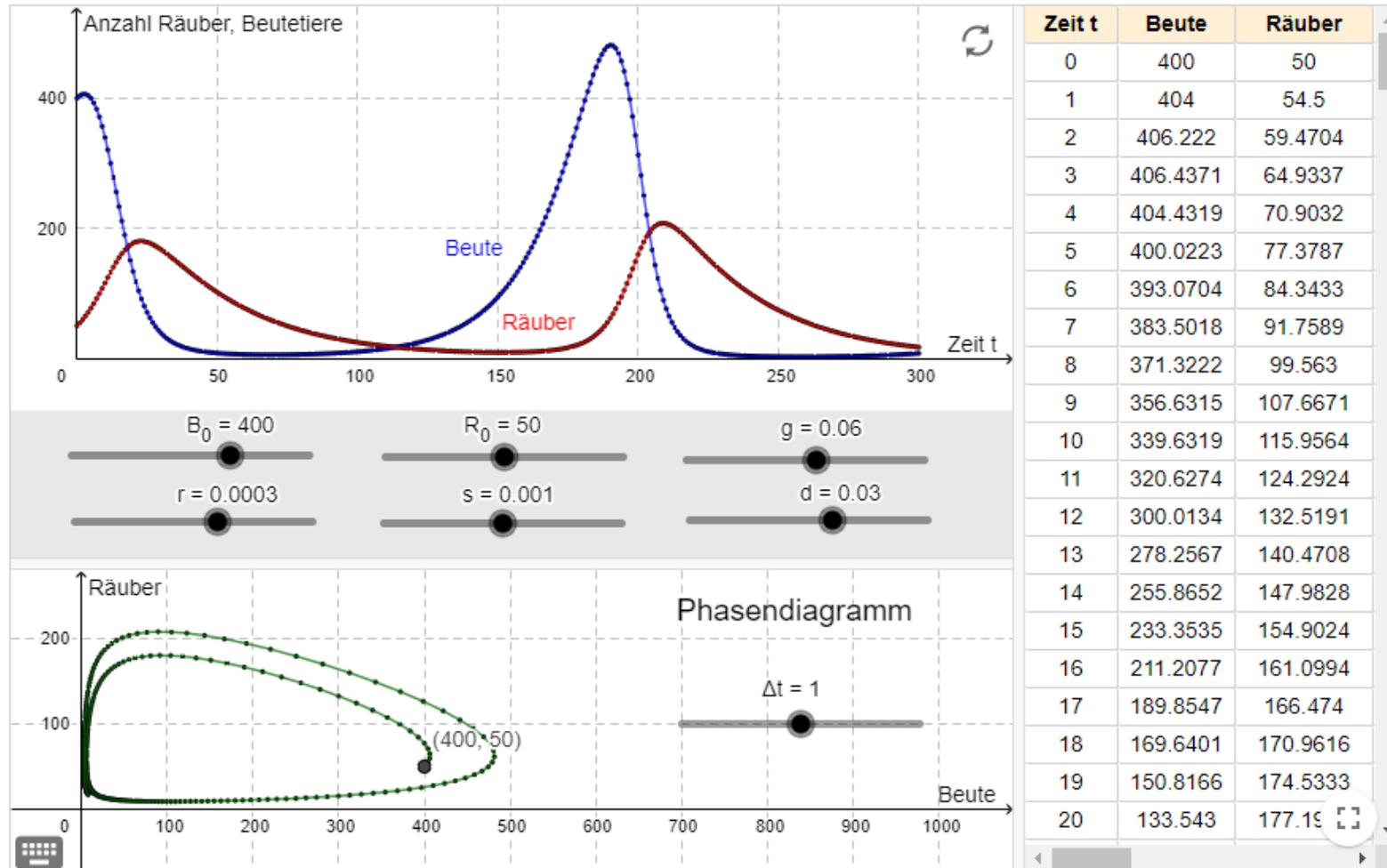
Räuber-Beute-Modell (diskrete Form)

$$B_{n+1} = B_n + g_b \cdot B_n - f \cdot B_n \cdot R_n$$

$$R_{n+1} = R_n + g_r \cdot R_n \cdot B_n - s \cdot R_n$$

→ Modellierung mit GeoGebra möglich

Veranschaulichung



<https://www.geogebra.org/m/vwethmwy>



Veranschaulichung Partnerarbeit

Was bedeuten die Variablen B_0 , R_0 , g , r , s und d ?

Welche Auswirkungen haben die Veränderungen der Variablen?

Veranschaulichung Variablen

- B_0 ... Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt 0 $\rightarrow B(0)$
- R_0 ... Anzahl der Räuber zum Zeitpunkt 0 $\rightarrow R(0)$
- g ... Geburtenrate der Beutetiere $\rightarrow g_b$
- d ... Geburtenrate der Räuber $\rightarrow g_r$
- r ... Fressfaktor $\rightarrow f$
- s ... Sterberate der Räuber $\rightarrow s_r$



Verfeinerung des Modells

Wie könnte das behandelte Räuber-Beute-Modell verbessert bzw. verfeinert werden?

Quelle

Engel, J. (2010). Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.