Teoría – Tema 9

Teoría - 18 - Punto simétrico a una recta

Punto simétrico de un punto respecto a una recta

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y la recta r . Deseamos encontrar el punto $P'(x_2, y_2, z_2)$ simétrico a P respecto a la recta r . La forma de proceder es la siguiente:

1. Por el punto P debemos trazar una recta s que sea perpendicular a la recta r . El vector director de la recta s será perpendicular al vector director de la recta r , por lo que el producto escalar de ambos se anulará.

2. La intersección de r con s será el punto M . Este punto M se conoce como **proyección ortogonal del punto P sobre la recta r** .

3. Y este punto M será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, de donde podremos obtener las coordenadas del punto P' .

Ejemplo 1 resuelto

Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,0)$ respecto la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

Un vector director de r es $\vec{u}_r=(2,-3,4)$.

Pasamos la recta a paramétrica para obtener un punto $M \in r$ que cumpla $\vec{u}_r \cdot \vec{AM}=0$.

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4} \rightarrow r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{cases} \rightarrow M(1+2\lambda, -3\lambda, -1+4\lambda)$$

$$\vec{AM}=(2\lambda, -2-3\lambda, -1+4\lambda)$$

Realizamos producto escalar y lo anulamos:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{AM}=0 \rightarrow (2,-3,4)\cdot(2\lambda, -2-3\lambda, -1+4\lambda)=0 \rightarrow 4\lambda+6+9\lambda-4+16\lambda=0$$

$$\lambda=\frac{-2}{29}$$

Con este valor podemos obtener el punto M que es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

$$M\left(\frac{25}{29}, \frac{6}{29}, \frac{-37}{29}\right)$$

Si el punto simétrico es $A'=(x,y,z) \rightarrow \left(\frac{25}{29}, \frac{6}{29}, \frac{-37}{29}\right)=\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z}{2}\right)$

$$x=\frac{21}{29} \quad , \quad y=\frac{-46}{29} \quad , \quad z=\frac{21}{29} \rightarrow A'=\left(\frac{21}{29}, \frac{-46}{29}, \frac{-74}{29}\right)$$