Bei Testverfahren werden häufig zwei Wahrscheinlichkeiten angegeben. Die Sensitivität gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein infizierte Testperson als infiziert erkannt wird. Die Spezifizität gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine nicht infizierte Person als nicht infiziert erkannt wird.

Da man mit möglichst hoher Sicherheit Infizierte erkennen will, ist die Sensitivität bei Test in der Regel sehr hoch – auf „Kosten" der Spezifizität.

Beim Corona Test beträgt die Sensitivität 99% und die Spezifizität 95%.

Eine Person aus einer Testgruppe wird zufällig ausgewählt.

I: Die Person ist infiziert

pos: Der Test liefert ein positives Ergebnis.

a) *Begründen Sie, dass man schreiben kann:*

$$P_I(pos) = 0{,}99$$
$$P_{\bar{I}}(\overline{pos}) = 0{,}95$$

b) Es gibt unterschiedliche Teststrategien.

i. Entweder testet man nur Personen, die Kontakt zu Infizierten hatten oder Symptome der Krankheit zeigen.

ii. Man testet Menschen vorsorglich, ohne Anlass, wie zum Beispiel die Lehrer.

Bei der ersten Strategie ist der Anteil der Infizierten mit $P(I)$ =5% recht hoch, bei der zweiten Strategie gilt $P(I) \approx 0{,}02\%$

Berechnen Sie $P_{pos}(I)$ und $P_{\overline{pos}}(\bar{I})$ für die 1. Strategie und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

[Zur Kontrolle und für die Interpretation: $P_{pos}(I) = 51\%, P_{\overline{pos}}(\bar{I}) \approx 99{,}94\%$]

Vergleichen sie mit den Ergebnissen für die 2. Strategie: $P_{pos}(I) = 41\%, P_{\overline{pos}}(\bar{I}) \approx 99{,}74\%$ und erläutern Sie mögliche Probleme bei der zweiten Strategie.

c) Von 587000 Einwohnern in Dortmund wurden in den letzten 7 Tagen 11.6 ansteckend positiv getestet. Geht man davon aus, dass die tatsächliche Zahl bei 116 liegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit infiziert zu sein

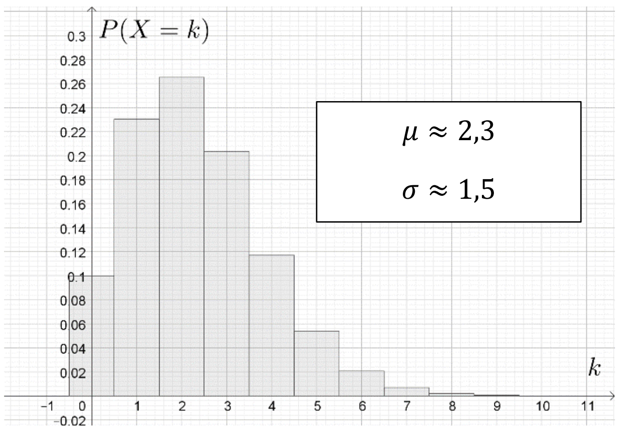
$$P(I) = \frac{116}{587000} \approx 0{,}0198\%$$

Im Lehrerkollegium unserer Schule gibt es 100 Lehrer.

i. *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Lehrer der Schule infiziert ist.*

ii. *Erläutern Sie, wie man die Anzahl der Personen bestimmen kann, die man mindestens anlasslos testen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%, mindestens 1 positives Testergebnis erhält.*
(Die Lösung beträgt 11651 Personen. Das müssen Sie aber nicht berechnen.)

iii. Das Diagramm zeigt die Binomialverteilung für diese Testung.
Interpretieren Sie das Diagramm im Sachkontext.



Bei Testverfahren werden häufig zwei Wahrscheinlichkeiten angegeben. Die Sensitivität gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein infizierte Testperson als infiziert erkannt wird. Die Spezifizität gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine nicht infizierte Person als nicht infiziert erkannt wird.

Da man mit möglichst hoher Sicherheit Infizierte erkennen will, ist die Sensitivität bei Test in der Regel sehr hoch – auf „Kosten" der Spezifizität.

Beim Corona Test beträgt die Sensitivität 99% und die Spezifizität 95%.

Eine Person aus einer Testgruppe wird zufällig ausgewählt.

I: Die Person ist infiziert

pos: Der Test liefert ein positives Ergebnis.

a) *Begründen Sie, dass man schreiben kann:*

$$P_I(pos) = 0{,}99$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit eines positiven Testergebnisses unter der Bedingung, dass man infiziert ist. Das entspricht genau der Definition des Begriffes der Sensitivität.

$$P_{\bar{I}}(\overline{pos}) = 0{,}95$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit eines negativen Testergebnisses unter der Bedingung, dass man nicht infiziert ist. Das entspricht der Definition der Spezifizität.

b) Es gibt unterschiedliche Teststrategien.

i. Entweder testet man nur Personen, die Kontakt zu Infizierten hatten oder Symptome der Krankheit zeigen.

ii. Man testet Menschen vorsorglich, ohne Anlass, wie zum Beispiel die Lehrer.

Bei der ersten Strategie ist der Anteil der Infizierten mit $P(I) =5\%$ recht hoch, bei der zweiten Strategie gilt $P(I) \approx 0{,}02\%$

Berechnen Sie $P_{pos}(I)$ für die erste Strategie

$$\frac{P(I \cap pos)}{P(I)} = 0{,}99 | P(I) = 0{,}05$$

$$P(I \cap pos) = 0{,}99 \cdot 0{,}05 = 0{,}0495$$

$$\frac{P(\bar{I} \cap \overline{pos})}{P(\bar{I})} = 0{,}95 | P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 0{,}95$$

$$P(\bar{I} \cap \overline{pos}) = 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9025$$

	I	$\bar{I}$	
pos	0,0495	0,0475	0,097
$\overline{pos}$	0,0005	0,9025	0,903
	0,05	0,95	1

$$P_{pos}(I) = \frac{P(I \cap pos)}{P(pos)} = \frac{0{,}0495}{0{,}097} = 0{,}5103 \approx 51\%$$

$$P_{\overline{pos}}(\bar{I}) = \frac{P(\bar{I} \cap \overline{pos})}{P(\overline{pos})} = \frac{0{,}9025}{0{,}903} = 0{,}9994 \approx 99{,}94\%$$

Bei einem negativen Testergebnis kann man also mit 99,94% Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass man nicht infiziert ist.

Bei einem positiven Testergebnis ist aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 51% sicher, dass man tatsächlich infiziert ist.

Die folgende Rechnung wurde nicht verlangt. Nur für Sie zur Übung

$$\frac{P(I \cap pos)}{P(I)} = 0{,}99 | P(I) = 0{,}0002$$
$$P(I \cap pos) = 0{,}99 \cdot 0{,}0005 = 0{,}000198$$

$$\frac{P(\bar{I} \cap \overline{pos})}{P(\bar{I})} = 0{,}95 | P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 0{,}9998$$
$$P(\bar{I} \cap \overline{pos}) = 0{,}95 \cdot 0{,}9998 = 0{,}94981$$

	I	$\bar{I}$	
pos	0,000198	0,0475	0,0047698
$\overline{pos}$	0,0005	0,94981	0,952302
	0,05	0,95	1

$$P_{pos}(I) = \frac{P(I \cap pos)}{P(pos)} = \frac{0{,}000198}{0{,}0047698} = 0{,}415 \approx 41{,}5\%$$
$$P_{\overline{pos}}(\bar{I}) = \frac{P(\bar{I} \cap \overline{pos})}{P(\overline{pos})} = \frac{0{,}94981}{0{,}952302} = 0{,}9974 \approx 99{,}74\%$$

Bei einem negativen Testergebnis kann man also mit 99,74% Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass man nicht infiziert ist.
Bei einem positiven Testergebnis ist aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 41% sicher, dass man tatsächlich infiziert ist.
Bei der zweiten Strategie bekommen fast 60% der getesteten Personen ein positives Testergebnis, obwohl sie gar nicht infiziert sind.

c) Von 587000 Einwohnern in Dortmund wurden in den letzten 7 Tagen 11.6 ansteckend positiv getestet. Geht man davon aus, dass die tatsächliche Zahl bei 116 liegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit infiziert zu sein

$$P(I) = \frac{116}{587000} \approx 0{,}0198\%$$

Im Lehrerkollegium unserer Schule gibt es 100 Lehrer.

i. *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 1 Lehrer der Schule infiziert ist.*

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{100}{0} \cdot 0{,}000198^0 \cdot (1 - 0{,}000198)^n$$
$$= 1 - 0{,}999802^{100} \approx 0{,}0196 = 1{,}96\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 1,96% ist ein Lehrer der Schule infiziert.

ii. *Erläutern Sie, wie man die Anzahl der Personen bestimmen kann, die man mindestens anlasslos testen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90%, mindestens 1 positives Testergebnis erhält.*

(Die Lösung beträgt 11651 Personen. Das müssen Sie aber nicht berechnen.)

Hier die Rechnung, die Sie nicht ausführen müssen:

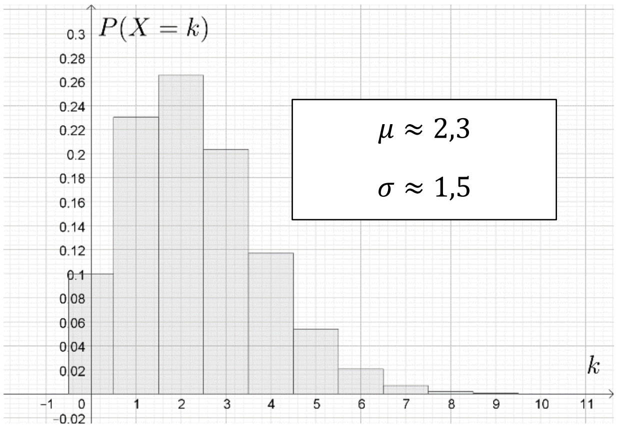
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}000198^0$$
$$\cdot (1 - 0{,}000198)^n \geq 0{,}9$$

$$1 - 0{,}999802^n \geq 0{,}9$$
$$-0{,}999802^n \geq -0{,}1$$
$$0{,}999802^n \leq 0{,}1$$
$$n \geq 11651$$

Löse((1-116/587000)^n=0.1)

$\approx$ **{n = 11650.72324108}**

iii. Das Diagramm zeigt die Binomialverteilung für diese Testung.
Interpretieren Sie das Diagramm im Sachkontext.



Das Diagramm zeigt die Wahrscheinlichkeiten für 0,1,2,.. infizierte Menschen innerhalb der Gruppe von 11651 Personen. Man erkennt, dass die Wahrscheinlichkeit für 0 Infizierte 10% beträgt und damit die Wahrscheinlichkeit mindestens einen Infizierten zu haben 90% beträgt. Am Wahrscheinlichsten ist es, dass es 2 Infizierte in der Gruppe gibt. Im Mittel wird man bei dieser Anzahl an Personen 2,3 positive Testergebnisse haben. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68% wird die Anzahl der positiv getesteten Personen zwischen $2{,}3 - 1{,}5 = 1{,}8$ und $2{,}3 + 1{,}5 = 3{,}8$ Personen liegen.

Sigma-Regeln
Bei einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p, Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ gilt:

$P(\mu - \sigma \leqq X \leqq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$

$P(\mu - 2\sigma \leqq X \leqq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$

$P(\mu - 3\sigma \leqq X \leqq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$