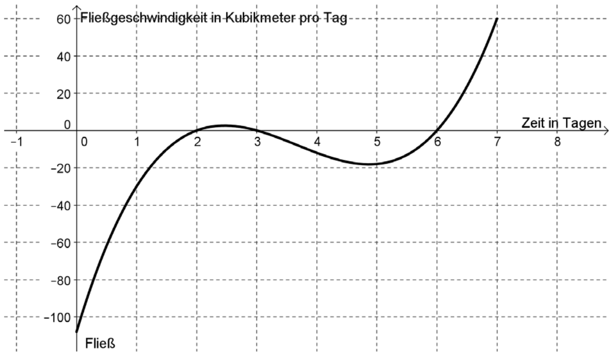
Aufgabe

Die Funktion f modelliert die Geschwindigkeit des zu- und abfließenden Wassers eines kleinen Sees, d.h., die Funktion f ordnet jedem Zeitpunkt x in Tagen die Fließgeschwindigkeit $f(x)$ in $\frac{m^3}{Tag}$ zu.



$$f(x) = 3x^3 - 33x^2 + 108x - 108$$

a) *Geben Sie die Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = 1\,Tag$ an und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

b) *Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an (Ablesen am Graphen reicht!).*

c) *Zeigen Sie, dass die Fließgeschwindigkeit etwa zum Zeitpunkt $x \approx 2{,}46\,Tage$ lokal maximal ist.*

d) *Zeigen Sie, dass die Fließgeschwindigkeit etwa zum Zeitpunkt $x \approx 3{,}667\,Tage$ am schnellsten abnimmt!*

e) *Begründen Sie, warum die Wassermenge zum Zeitpunkt $x = 2\,Tage$ und zum Zeitpunkt $x = 6\,Tage$ lokal minimal war.*

f) *Begründen Sie, dass innerhalb der 7 Tage, die Wassermenge im See niemals mehr so groß ist, wie zu Beginn.*

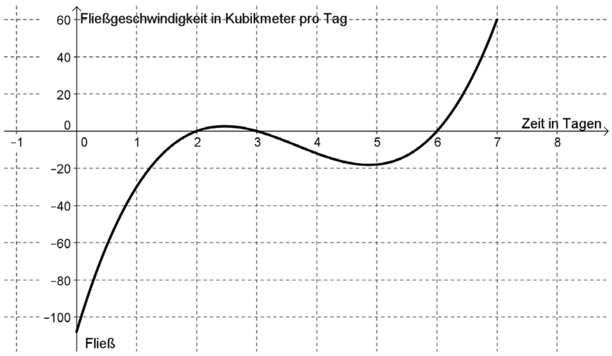
g) *Interpretieren Sie die folgenden Ausdrücke im Sachkontext und erläutern Sie kurz die Berechnung:*

$$\int_0^7 f(x)dx = -82{,}25$$

$$\frac{1}{7-0}\int_0^7 f(x)dx \approx -11{,}75$$

Aufgabe

Die Funktion f modelliert die Geschwindigkeit des zu- und abfließenden Wassers eines kleinen Sees, d.h., die Funktion f ordnet jedem Zeitpunkt x in Tagen die Fließgeschwindigkeit $f(x)$ in $\frac{m^3}{Tag}$ zu.



$$f(x) = 3x^3 - 33x^2 + 108x - 108$$

a) *Geben Sie die Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = 1\,Tag$ an und interpretieren Sie den Wert im Sachkontext.*

$$f(1) = -30$$

Zu Zeitpunkt $x = 1\,Tag$ beträgt die Fließgeschwindigkeit -30 Kubikmeter Wasser pro Tag.

b) *Geben Sie die Nullstellen der Funktion f an (Ablesen am Graphen reicht!).*

$x_1 = 2, x_2 = 3$ *und* $x_3 = 6$

c) *Zeigen Sie, dass die Fließgeschwindigkeit etwa zum Zeitpunkt $x \approx 2{,}46\,Tage$ lokal maximal ist.*

$$f'(x) = 9x^2 - 66x + 108$$

$$f'(x) = 0$$

$$\left\{x = \frac{-\sqrt{13}+11}{3}, x = \frac{\sqrt{13}+11}{3}\right\}$$

$$\{x = 2.46, x = 4.87\}$$

$$f''(2{,}46) \approx -21{,}63 < 0 \Rightarrow HP$$

d) *Zeigen Sie, dass die Fließgeschwindigkeit etwa zum Zeitpunkt $x \approx 3{,}667\,Tage$ am schnellsten abnimmt!*

$$f''(x) = 18x - 66$$

$$f''(x) = 0$$

$$x = \frac{66}{18} = \frac{11}{3} \approx 3{,}667$$

$$f'''(x) = 18 > 0 \Rightarrow TP \text{ von } f'$$

e) *Begründen Sie, warum die Wasser<u>menge</u> zum Zeitpunkt $x = 2\,Tage$ und zum Zeitpunkt $x = 6\,Tage$ lokal minimal war.*

Vorzeichenwechsel von f'.

f) *Begründen Sie, dass innerhalb der 7 Tage, die Wasser<u>menge</u> im See niemals mehr so groß ist, wie zu Beginn.*

Qualitativer Vergleich der Flächen zwischen Graph und x-Achse.

g) *Interpretieren Sie die folgenden Ausdrücke im Sachkontext und erläutern Sie kurz die Berechnung:*

$$\int_0^7 f(x)dx = -82{,}25$$

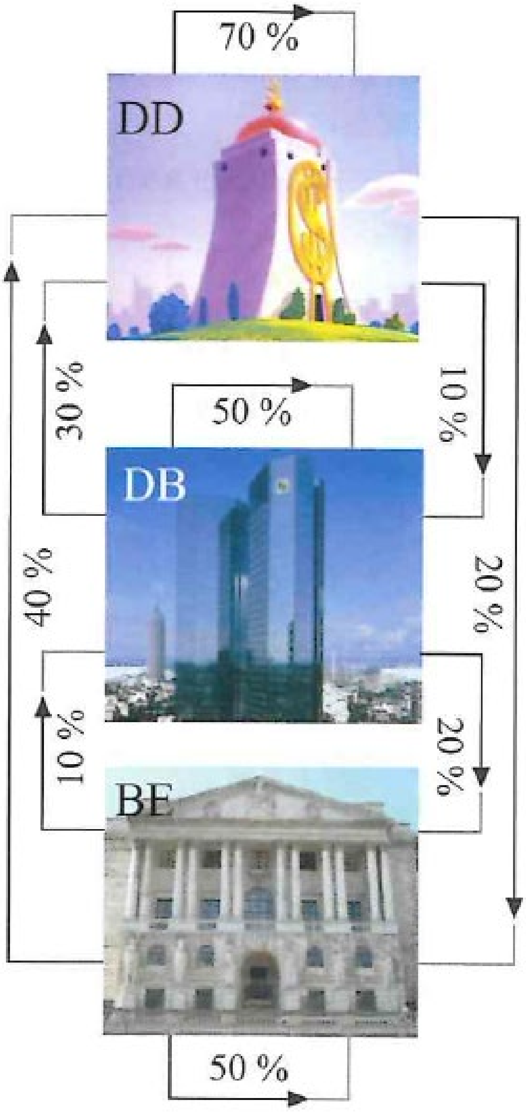
Gesamte Änderung der Wassermenge im See innerhalb der 7 Tage.

$$\frac{1}{7-0}\int_0^7 f(x)dx \approx -11{,}75$$

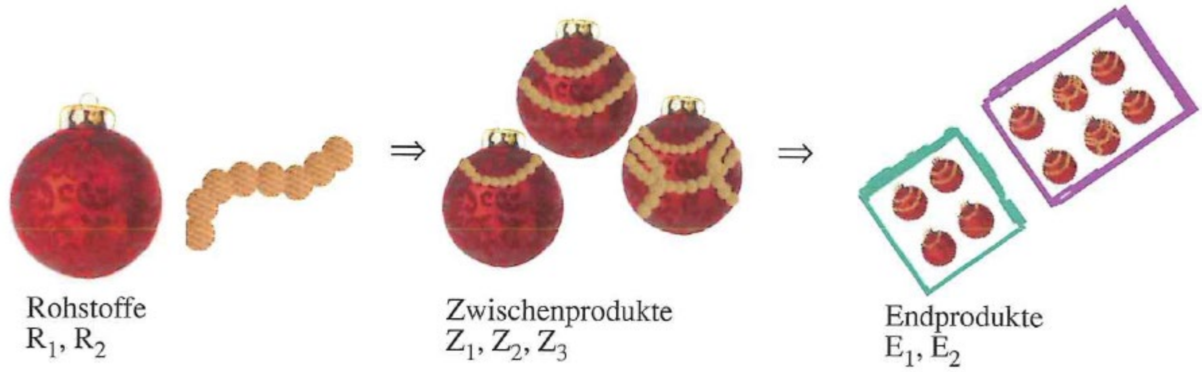
Durchschnittliche Fließgeschwindigkeit innerhalb der 7 Tage.

Kolenda

Übergang: Zeitliche Entwicklungen können nicht nur mithilfe von Funktionen mathematisch modelliert werden, sondern auch mithilfe von Matrizen.



Ein Froschweibchen legt durchschnittlich 2500 Eier und stirbt danach. Hieraus entwickeln sich zu 2 % Kaulquappen der 1. Art. Diese entwickeln sich zu 20 % weiter zu Kaulquappen der 2. Art, indem ihnen Extremitäten wachsen und sie sich auf das Leben außerhalb des Wassers vorbereiten. Aus ihnen entwickeln sich zu 10 % wieder Froschweibchen.



Die Rechnungen sollen nicht vollständig ausgeführt werden. Aufstellen der Matrix, kurze Erklärung der Matrixmultiplikation.

Fixvektor bzw. stabile Verteilung

Rückwärts in der Zeit.

nach/von	DD	DB	BE
DD	0,7	0,3	0,4
DB	0,1	0,5	0,1
BE	0,2	0,2	0,5

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50{,}7 \\ 18{,}8 \\ 30{,}5 \end{pmatrix}, \quad M^3 \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, \quad M^5 \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 22 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Nach einem Jahr lauten die Anteile: DD: 50,7% , DB: 18,8% , BE: 30,5%
Nach drei Jahren lauten die Anteile: DD: 54,2% , DB: 17,0 % BE:28,7%
Nach fünf Jahren lauten die Anteile: DD: 54,7% , DB: 16,7 % , BE: 28,6%
Vermutung:DD: 54,7%, DB: 16,7%, BE: 28,6%.

E = Ei, K_1 = Kaulquappe 1. Art, K_2 = Kaulquappe 2. Art, W = Weibchen

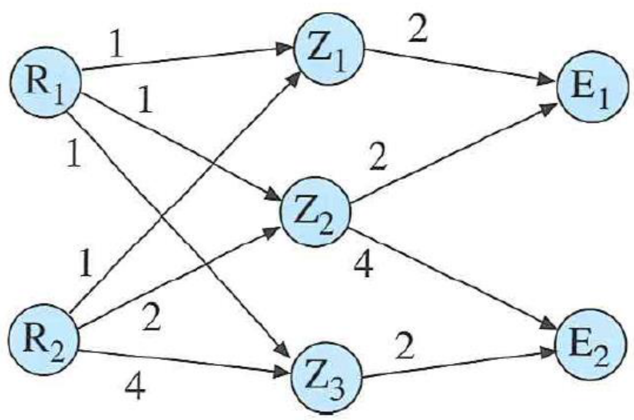
Übergangstabelle/Matrix:

	E	K_1	K_2	W
E	0	0	0	2500
K_1	0,02	0	0	0
K_2	0	0,20	0	0
W	0	0	0,10	0

$$M \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2500 \\ 0{,}02 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5000 \\ 1000 \\ 250 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50000 \\ 100 \\ 200 \\ 25 \end{pmatrix}, \quad M^2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 62500 \\ 1000 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Zyklischer Prozess (Hier nicht realisiert)

Zweistufiger Produktionsprozess



1. Tabellen und Matrizen

1. Stufe

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	1	1
R_2	1	2	4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Stufe

	E_1	E_2
Z_1	2	0
Z_2	2	4
Z_3	0	2

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}$$

	E_1	E_2
R_1	4	6
R_2	6	16

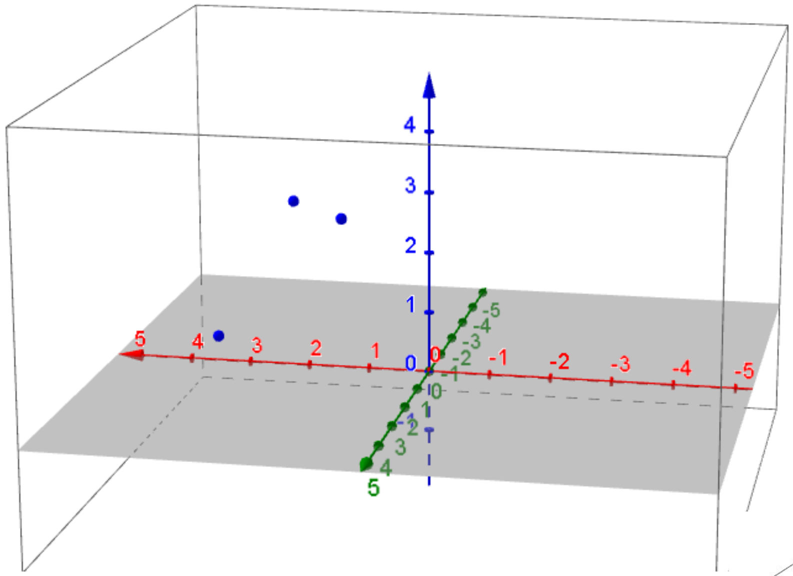
Interpretation des Matrixproduktes.

Auftragsvektor

Von Rohstoffverbrauch auf Auftragsvektor schließen.

Evtl. Multiplikation durchführen.

Suthakaran, Marouf

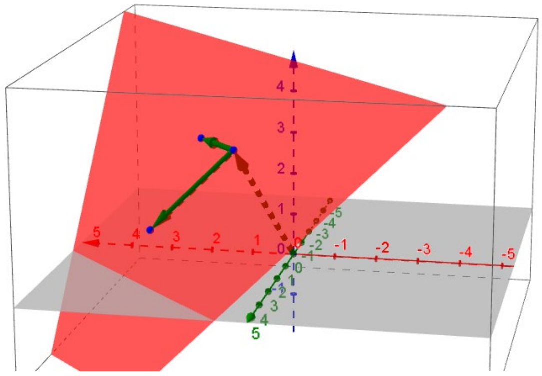


$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, P_1, P_2, P_3 \in e_1$

Drei Punkte werden präsentiert. Der Prüfling kann daraus eine Ebenengleichung entwickeln.

Stütz- und Richtungsvektor können eingeblendet werden. Die Ebene kann eingeblendet werden.

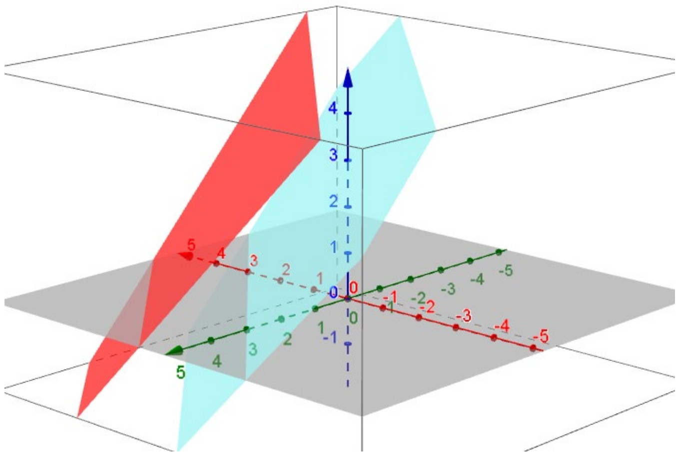
$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Die Lagebeziehungen zwischen Ebenen (parallel oder schneiden sich) können erklärt werden. Verweis auf Lagebeziehungen zwischen Geraden möglich (+windschief).

Einen Punkt auf der Ebene nennen!

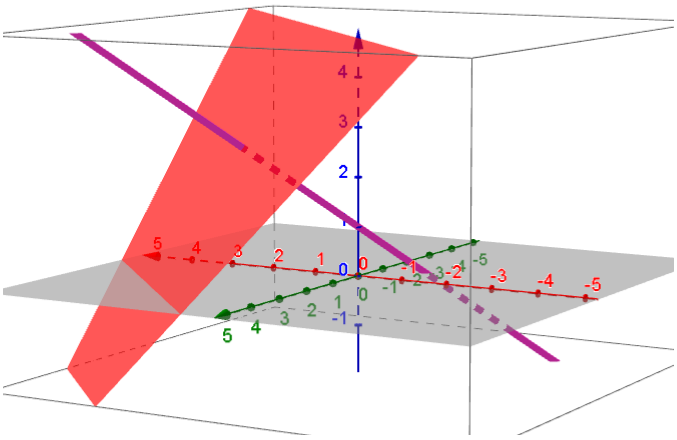
Wie prüft man, ob ein Punkt auf der Ebene liegt?



$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Nachweis der Parallelität. Hier besonders einfach, da alle Richtungsvektoren kolinear. Ansonsten lineare Abhängigkeit der Richtungsvektoren nachweisen.



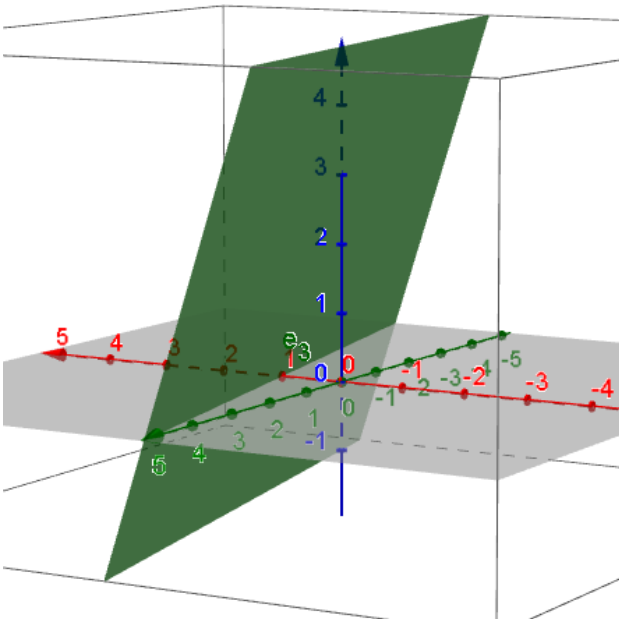
Eine Gerade durch den Punkt (0,0,1). Die Gerade ist senkrecht zur Ebene.

z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ durch skalare Multiplikation mit den Richtungsvektoren oder durch Kreuzprodukt.

Koordinatenform einer Ebene:

$$e3 : 15x + 3y + 5z = 15$$

$$e_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Umwandlung von der einen Form in die andere
→ Drei Punkte ermitteln…

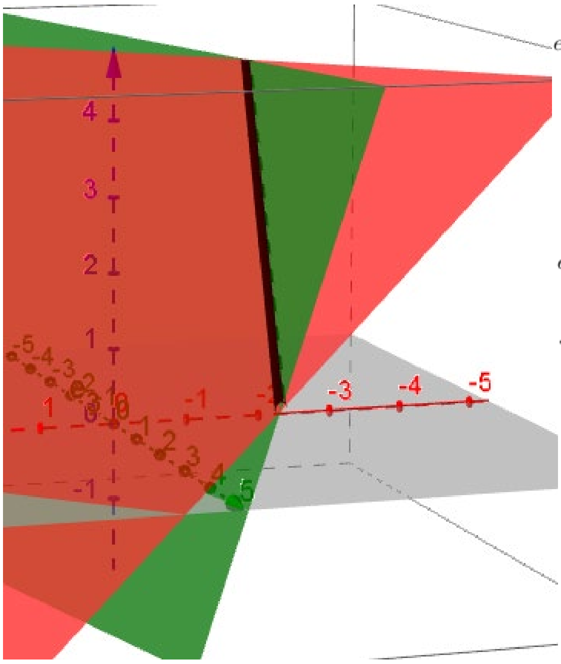
evtl. Hesse-Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 15$$

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$15 - \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = 0$$

z.B.: $s_x = 1, s_y = 0, s_z = 0$



$$e_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$e_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$s : X = (-0.8629, 3.1855, 3.6774) + \lambda(-4, -20, 24)$$

Der Prüfling kann darstellen, wie die Schnittgerade ermittelt werden kann.

Aufstellen eines LGS

Alle Parameter als Funktion eines freien Parameters

Einsetzen in eine Ebenengleichung liefert eine Geradengleichung.