CURSO 2023-2024

FyQ

Physics and Chemistry

2ºESO
Maristas Granada

SITUACIÓN DE APRENDIZAJE 6: ¿CÓMO ES LA VIDA EN LA ESTACIÓN ESPACIAL INTERNACIONAL?

FÍSICA Y QUÍMICA 2ºESO

COLEGIO MARISTA LA INMACULADA
CALLE SÓCRATES, 8
18002 - GRANADA

Índice

0. Ubicación en la programación

Título: Situación de aprendizaje 6. ¿Cómo es la vida en la Estación Espacial Internacional?

Evaluación: Segunda

Temporalidad: 3 semanas

Número de sesiones: 9 horas

Criterios de evaluación: CriEval-FyQ-1.1, CriEval-FyQ-1.2, CriEval-FyQ-1.3, CriEval-FyQ-2.1, CriEval-FyQ-2.2, CriEval-FyQ-2.3, CriEval-FyQ-3.1, CriEval-FyQ-3.2, CriEval-FyQ-3.3, CriEval-FyQ-4.1, CriEval-FyQ-4.2, CriEval-FyQ-5.1, CriEval-FyQ-5.2, CriEval-FyQ-6.1, CriEval-FyQ-6.2

Actividades de evaluación:

- T.E.C.A. (Trabajo Escrito Con Apuntes)
- Cuaderno
- Programación robótica
- Exposición oral
- Simulación con software matemático
- Respuesta oral a preguntas
- Producto audiovisual digital
- Trabajo diario

Índice de contenidos: Resolución de ecuaciones de primer grado. Ecuaciones de 2º grado, completas e incompletas. Problemas en contextos reales. Representación gráfica de una parábola y de sus cortes con el eje horizontal. Comprensión geométrica de los tipos de solución de un sistema. Leyes de Newton. Biografía de Newton. Concepto de Fuerza. Principio de Arquímedes. Estudio cualitativo de la caída por plano inclinado. Fuerza peso y fuerza de rozamiento. Ley de gravitación universal. Ley de Hooke. Modelos cualitativos de fuerza en campo eléctrico y campo magnético. Normas de seguridad en la vida cotidiana.

Breve resumen de la situación: La vida en la Estación Espacial Internacional no es fácil por la falta de espacio y la ausencia de gravedad. A pesar de que la nave se encuentra "solamente" a 400 km de altura respecto de la superficie, la sensación de ingravidez se debe al movimiento de rotación de la nave alrededor del planeta.

Gracias a las leyes de Newton podemos conocer, numéricamente, algunos datos de la órbita de la nave. Estudiaremos el efecto de la fuerza sobre cuerpos en movimiento, en caída libre, en caída por plano inclinado, dentro de fluidos o insertados en un muelle.

1. ¿Qué necesitamos saber previamente?

1.1. ¿Qué es la fuerza?

La dinámica es la parte de la física que se pregunta por las causas que provocan un cambio en la velocidad de los cuerpos o que provocan una deformación.

El cambio en la velocidad lo hemos denominado aceleración en la unidad anterior.

Y la causa que genera los cambios de velocidad (o la deformación en los cuerpos) se llama **fuerza**. La fuerza es una **nueva magnitud física derivada** (que depende de otras magnitudes).

Dos objetos que chocan entre sí intercambian una fuerza. Por ejemplo, una pala de ping-pong que golpea una pelota.

Pero las fuerzas también aparecen a distancia, sin necesidad de contacto físico entre los objetos. El Sol atrae a la Tierra por la fuerza gravitatoria, a pesar de los 150 millones de kilómetros que los separa.

Al igual que la velocidad y la aceleración, la fuerza tiene un sentido de aplicación. Por lo que será importante saber cómo se aplica una fuerza sobre un objeto, para decidir si la velocidad del objeto aumenta, disminuye o si incluso se produce un cambio en la dirección del movimiento.

1.2. Unidad de fuerza en el Sistema Internacional

Los objetos con mayor masa son más difíciles de mover que los objetos más ligeros. La masa es la oposición (inercia) que presentan los objetos a que cambie su estado de movimiento.

A mayor masa, por lo tanto, mayor fuerza tendremos que aplicar para modificar el movimiento de un objeto. Es lógico pensar que la magnitud fuerza es directamente proporcional a la masa.

Cuanto mayor sea el cambio de velocidad que deseamos provocar, mayor será la fuerza que deberemos aplicar. Por lo tanto, también es lógico pensar que la magnitud fuerza es directamente proporcional a la aceleración.

PARA PENSAR 1. Según el razonamiento que hemos seguido, ¿la masa y la aceleración estarán multiplicándose o dividiéndose en la definición de la unidad de fuerza?

1.3. La gran aportación de Isaac Newton

Esta relación de la fuerza con la masa y la aceleración no fue definida de manera clara por la comunidad científica hasta la llegada de Isaac Newton (1642-1727), científico inglés que ha pasado a la posteridad como uno de los más famosos de la historia. En 1687 estableció en su libro "Principios matemáticos de la filosofía natural" (por aquel entonces no se hablaba de Física) una de las relaciones matemáticas más famosas de la historia:

$$Fuerza = masa \times aceleración$$

La influencia de Newton en los científicos de su época (y en los actuales) fue tan grande, que la **unidad de fuerza** recibió como nombre su propio apellido: **Newton (N)**. Es de las pocas unidades cuyo símbolo (N) se escribe con letra mayúscula. Esta unidad de fuerza se define como el producto de la unidad de masa (kg) por la unidad de aceleración (m/s^2).

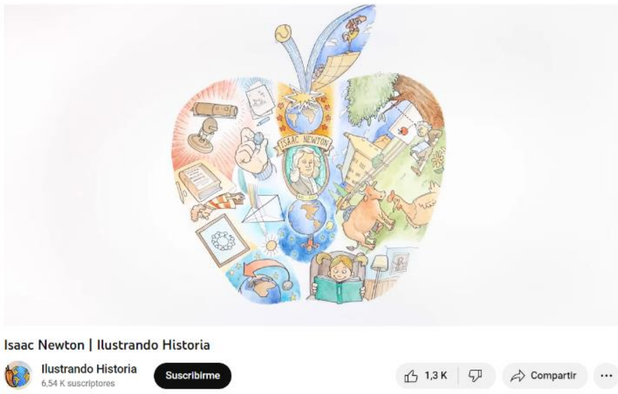
El Newton es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional. De esta forma, **1 N es la fuerza que debemos aplicar sobre un cuerpo de 1 kg de masa para que adquiera una aceleración de 1 m/s^2.**

Breve biografía de Isaac Newton

El siguiente vídeo del canal YouTube "Ilustrando Historia" nos cuenta en 3 minutos algunas de las grandes aportaciones de Newton a la humanidad y a la Ciencia.

https://www.youtube.com/watch?v=IzqLs_k-OBg

Verás en el vídeo que la influencia de Newton en la Ciencia abarca asuntos muy diversos: movimiento de cuerpos celestes en el Universo, diseño de telescopios, estudio de la composición de la luz, fórmulas matemáticas para comprender el comportamiento de la naturaleza, etc.



1.4. La tres leyes de Newton sobre el movimiento

Al estudiar el movimiento de los objetos y la influencia de las fuerzas sobre el movimiento, llegamos a las conocidas **tres leyes de Newton**.

1. Todo cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza, mantiene su estado de movimiento, ya sea en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Esta ley también se conoce como principio de Galileo (en recuerdo al científico italiano Galileo Galilei, pionero en el estudio del movimiento de los objetos, y que murió en 1642, el mismo año en que nació Newton). Si un objeto está en reposo y no aplicamos ninguna nueva fuerza sobre él, seguirá estando en reposo. Y si un objeto se mueve con velocidad constante y no aplicamos ninguna nueva fuerza sobre él, mantendrá la misma velocidad constante.

2. Todo cuerpo sobre el que actúa una fuerza se mueve de una forma proporcional a su masa, según la fórmula: $Fuerza = masa \times aceleración$. De manera más compacta, esta fórmula suele escribirse como: $F = m \times a$. Recuerda que la unidad de Fuerza es el Newton y la unidad de masa es el kilogramo. Si tienes dos objetos de distinta masa sobre el que aplicas la misma fuerza, adquirirá mayor aceleración el cuerpo que sea más ligero.

3. Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro, este segundo cuerpo ejerce una fuerza igual y de sentido contrario sobre el primero (principio de acción-reacción). Por ejemplo: tienes patines y empujas una pared con tus brazos. Saldrás disparado en sentido contrario, porque la pared "te devuelve" la fuerza con que has empujado.

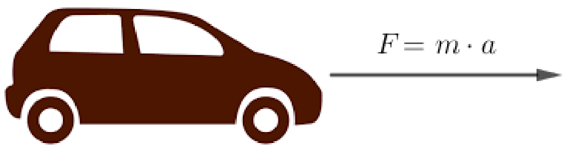
En el siguiente vídeo, en inglés, estudiaremos las tres leyes de Newton aplicadas al movimiento de una bicicleta.

https://www.youtube.com/watch?v=JGO_zDWmkvk

PARA PENSAR 2. El vídeo afirma que es más costoso poner en movimiento la bicicleta que mantener luego el pedaleo. Si arrastramos un objeto pesado por el suelo, ¿ocurre lo mismo? ¿Significa eso que el rozamiento del suelo cambia según el objeto esté en reposo o está ya en movimiento? ¿O la fuerza de rozamiento es siempre la misma?

Ejercicios resueltos sobre las leyes de Newton

Un coche de 1.000 kg acelera a razón de 2,5 m/s^2. Suponiendo que podemos despreciar la fuerza de rozamiento del suelo, ¿qué fuerza aplica el motor para que el vehículo pueda avanzar con esa aceleración?



La masa del vehículo es de 1.000 kg. Y la aceleración 2,5 m/s^2. Podemos sustituir estos valores en la fórmula de la segunda ley de Newton.

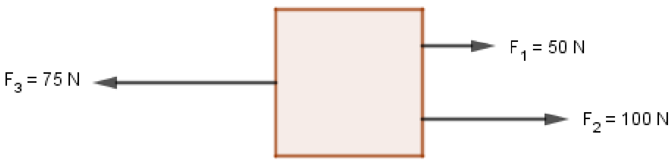
$$F = m \times a$$

$$F = 1.000\ kg \times 2{,}5\ m/s^2$$

$$F = 2.500\ N$$

PARA PENSAR 3. ¿Por qué motivo crees que despreciamos el valor de la fuerza de rozamiento en el ejercicio anterior? Si realmente no hubiera rozamiento, ¿podrían traccionar las ruedas del coche? ¿Avanza igual un coche por asfalto que por hielo? ¿La fuerza del motor se aplica solo al principio del movimiento o siempre que el coche avance a velocidad constante? Si el coche viaja a 50 km/h y el conductor levanta el pie del acelerador, ¿por qué se frena el coche?

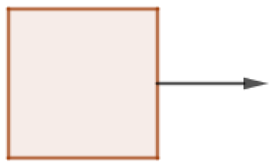
Sobre un objeto en reposo comienzan a actuar fuerzas en la misma dirección y diferente sentido, tal y como muestra la imagen de la derecha. Obtener la fuerza final resultante. Si el objeto tiene 10 kg de masa, obtener la aceleración del movimiento.



La fuerza, al igual que la velocidad y la aceleración, es una magnitud física vectorial. ¿Qué significa eso? Significa que además de conocer el número y la unidad, necesitamos saber la orientación en que se aplica.

Las magnitudes vectoriales se dibujan como flechas (vectores) que marcan la dirección y el sentido. En una línea recta siempre hay dos sentidos. Esto lo vimos en unidades anteriores al hablar de movimientos horizontales y verticales.

Las fuerzas que apuntan en el mismo sentido se suman. En nuestro ejemplo, sumamos las dos fuerzas que apuntan hacia la derecha: 50 N + 150 N = 150. Y la fuerza que apunta hacia la izquierda se resta al resultado de la suma. Por lo tanto: 150 N – 75 N = 75 N.



Obtenemos una fuerza resultante que apunta hacia la derecha, con un valor de 75 N. Si la masa del objeto es de 10 kg, podemos aplicar la segunda ley de Newton para obtener la aceleración del movimiento.

$$F = m \times a$$

$$75 = 10\,kg \times a$$

$$\frac{75}{10} = a \rightarrow a = 7{,}5\,m/s^2$$

PARA PENSAR 4. En el ejemplo anterior, las fuerzas eran paralelas (formando 0°) o bien opuestas (formando 180°). ¿Qué ocurriría si las fuerzas formasen entre sí otros ángulos distintos? ¿Cómo podrían sumarse fuerzas que formen, por ejemplo, 90° entre sí? ¿Y si formasen 45°?

1.5. La fuerza peso

Ya hemos estudiado que la aceleración gravitatoria en la superficie del planeta Tierra, al nivel del mar, es de aproximadamente 9,8 m/s^2.

Si aplicamos la segunda ley de Newton con esta aceleración, obtenemos una fuerza que se conoce como fuerza Peso. **La fuerza Peso es la fuerza que actúa sobre los objetos que se encuentran en la superficie del planeta por el simple hecho de tener masa**.

$$F_{peso} = m \times g_{Tierra}$$

Una persona de 60 kg de masa siente una fuerza peso igual a:

$$F_{peso} = 60\,kg \times 9{,}8\,m/s^2$$

$$F_{Peso} = 588\,N$$

La fuerza Peso es una fuerza. Y lógicamente se mide en Newtons.

No confundir la fuerza Peso con la palabra coloquial “peso” que utilizamos en el día a día. La fuerza Peso en física se mide en Newtons. Mientras que la palabra coloquial “peso” se refiere a la masa en física, que se mide en kilogramos.

Si colocamos en la Tierra y en la Luna dos objetos idénticos de 60 kg de masa, podemos afirmar que la masa no cambia. Pero la fuerza Peso sí cambia, porque depende de la aceleración gravitatoria del cuerpo celeste.

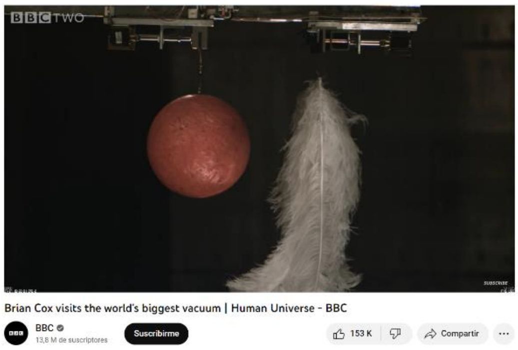
En la Tierra, la aceleración gravitatoria es de 9,8 m/s^2. Y en la Luna, la aceleración gravitatoria es de 1,6 m/s^2. En las siguientes operaciones mostramos la fuerza Peso de un objeto de 60 kg situado en la superficie de la Tierra y situado en la superficie de la Luna.

$$Tierra: F_{peso} = 60\ kg \times 9{,}8\ m/s^2 \rightarrow F_{Peso} = 588\ N$$

$$Luna: F_{peso} = 60\ kg \times 1{,}6\ m/s^2 \rightarrow F_{Peso} = 96\ N$$

PARA PENSAR 5. Como has visto, la aceleración gravitatoria en la Luna es 1/6 del valor de la aceleración gravitatoria en la Tierra. ¿Cómo crees que eso influye en el movimiento de las personas que se muevan por la superficie de la Luna?

Imagina que tienes dos objetos en caída libre. Uno más pesado que el otro. Por ejemplo, una pluma y una esfera sólida como las que se usan en el juego de los bolos. Claramente, son dos objetos con masas distintas. Si dejamos caer ambos objetos desde la misma altura, cada uno sufre una fuerza peso diferente porque poseen masas distintas. ¿Eso significa también que el objeto más pesado llegará antes al suelo?



El siguiente vídeo del canal británico BBC resolverá nuestras dudas sobre la caída libre de objetos. A veces la intuición nos juega una mala pasada, y no coincide con lo que ocurre realmente en la naturaleza. Por eso es tan importante el método científico: nuestras hipótesis solo serán válidas si hay un experimento objetivo que verifique nuestro planteamiento inicial.

https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

1.6. La fuerza de rozamiento

Como has podido comprobar en el vídeo anterior de la BBC, la fuerza de rozamiento no es algo que podamos olvidar fácilmente. En las asignaturas de ciencias de Secundaria es frecuente decir “despreciamos la fuerza de rozamiento” para no complicar demasiado las ecuaciones matemáticas que describen el movimiento. Pero en la Universidad, o en el mundo laboral donde se diseñan coches y aviones, no se puede despreciar la fuerza de rozamiento si queremos que los vehículos funcionen correctamente.

La fuerza de rozamiento aparece siempre que un objeto se desplaza sobre otro. Por ejemplo: los neumáticos de un coche rodando sobre una carretera, o un avión atravesando el aire de la atmósfera. Cuando dos objetos entran en contacto físico, siempre hay rozamiento.

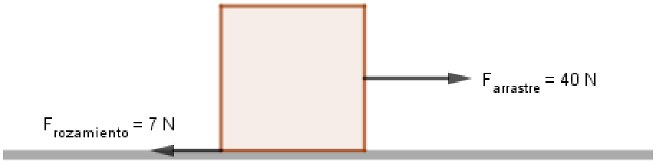
El rozamiento se opone al movimiento. Es decir, si un coche viaja hacia la derecha, la fuerza de rozamiento apuntará hacia la izquierda. Por lo tanto, la fuerza de rozamiento es una fuerza de frenado porque tiende a frenar a los objetos.

Además, el rozamiento siempre genera calor en la superficie de los objetos. Solo tienes que frotar tus dos manos entre sí para comprobarlo.

Nosotros, en 2ºESO, vamos a estudiar solo el rozamiento de objetos deslizando por una superficie horizontal. Por ejemplo, una caja que se arrastra por el suelo.

PARA PENSAR 6. ¿Piensas que la fuerza de rozamiento entre un objeto y el suelo dependerá de la masa del objeto? ¿A mayor masa, mayor fuerza rozamiento? Si ponemos el objeto y la superficie horizontal en la Luna, ¿la fuerza de rozamiento será la misma que en la Tierra? No es lo mismo deslizar sobre asfalto que sobre hielo. ¿Crees que el tipo de material de la superficie influye en la fuerza de rozamiento? Si la superficie no fuese horizontal, sino un plano inclinado, ¿cambiaría la fuerza de rozamiento?

Analicemos la siguiente imagen. Un objeto descansa sobre una superficie horizontal. Hacia la derecha sufre una fuerza de arrastre. La fuerza de rozamiento surge hacia la izquierda, oponiéndose al movimiento que genera la fuerza de arrastre.



$$F_{Rozamiento} = \square \times \square \times \square \times \square$$

Parece lógico pensar que, a mayor masa, mayor resistencia presenta el objeto a ser desplazado por la superficie.

$$F_{Rozamiento} = \text{masa} \times \square \times \square \times \square$$

Además, a mayor aceleración de gravedad, mayor tendencia del objeto a ser atraído hacia el centro del planeta. Y mayor dificultad a ser desplazado horizontalmente.

$$F_{Rozamiento} = \text{masa} \times \text{g} \times \square \times \square$$

Hay superficies que deslizan mejor entre sí. Por lo tanto, el material del que está formado tanto la superficie como el objeto influirán en la fuerza de rozamiento. Esta dependencia de los materiales es un número, sin unidades, que se conoce como coeficiente de rozamiento.

$$F_{Rozamiento} = \text{masa} \times \text{g} \times \text{coeficienteRozamiento} \times \square$$

Por último, no es lo mismo arrastrar el objeto sobre una superficie horizontal que hacerlo cuesta abajo, por un plano inclinado. Por lo tanto, el ángulo de inclinación influye en la fuerza de rozamiento.

$$F_{Rozamiento} = \text{masa} \times \text{g} \times \text{coeficienteRozamiento} \times \text{ángulo}$$

Aquí dejamos el estudio cualitativo de la fuerza de rozamiento. Aún nos faltan algunos conocimientos matemáticos para poder avanzar más en la fórmula. Lo importante es que comprendamos que la fuerza de rozamiento de un objeto deslizando sobre una superficie depende de:

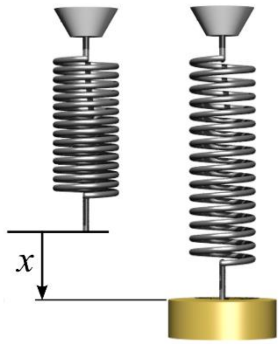
- La masa del objeto.
- La aceleración gravitatoria del planeta.
- Los materiales que forman el objeto y la superficie.
- El ángulo de inclinación de la superficie respecto de la horizontal.

PARA PENSAR 7. Al estudiar el ejemplo de la bicicleta y las leyes de Newton, llegamos a la conclusión de que es más difícil poner en movimiento un objeto que está en reposo que mantenerlo con velocidad constante. ¿Crees que esto tiene que ver algo con la fuerza de rozamiento? ¿Significaría que existe un rozamiento cuando el objeto parte del reposo y otro rozamiento cuando el objeto ya está en movimiento? ¿Cómo afectaría esto a la fórmula que hemos descrito anteriormente para la fuerza de rozamiento?

1.7. La ley de Hooke para los muelles

Un muelle se deforma cuando se aplica una fuerza sobre él. A mayor fuerza, mayor deformación. Por lo tanto, la fuerza necesaria para deformar un muelle depende directamente de la longitud que se estira o se contrae respecto de su posición de equilibrio.

Hay muelles más rígidos y muelles más suaves. El material del que está fabricado el muelle influye en la fuerza necesaria para su deformación.



Por lo tanto, es lógico pensar que la fuerza de deformación del muelle depende del siguiente producto:

$$F_{muelle} = \square \times \square$$

$$F_{muelle} = \text{LongitudDeformacion} \times \square$$

$$F_{muelle} = \text{longitudDeformacion} \times \text{coeficienteMaterial}$$

Esta fórmula se conoce como ley de Hooke, en honor al científico inglés Robert Hooke (1635-1703). La fórmula es válida siempre que el muelle recupere su forma original al terminar de aplicarse la fuerza. Si la fuerza es demasiado intensa, el muelle puede perder su capacidad de recuperación y la ley de Hooke ya no sería válida.

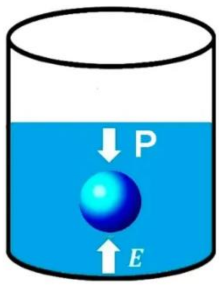
La longitud de deformación es una longitud (algo bastante obvio). Se mide en metros en el Sistema Internacional.

Los científicos han estudiado multitud de materiales para fabricar muelles, y han creado tablas de coeficientes de elasticidad de esos materiales. La unidad del coeficiente de elasticidad es el Newton dividido por metro.

1.8. Principio de Arquímedes

Cuando entras en el mar o en una piscina, habrás tenido sensación de ligereza. Parece que “pesas menos” nadando en el agua que caminando por la superficie del planeta.

¿Cómo es esto posible, si nuestra masa no cambia y si la aceleración gravitatoria es la misma en la arena de la playa que en el interior del mar?



La respuesta a este fenómeno físico nos la da el conocido principio de Arquímedes (científico de Siracusa, en la isla de Sicilia, que vivió en el s. III a.C.). Este principio es un modelo creado por Arquímedes para comprender las fuerzas que actúan sobre un cuerpo introducido en el interior de un fluido (líquido o gas).

La fuerza Peso ya la hemos estudiado en apartados anteriores. Depende de la masa m del objeto y de la aceleración gravitatoria g del planeta. Esta fuerza Peso apunta siempre hacia el centro del planeta.

$$F_{Peso} = m \times g$$

El líquido “se opone” a la entrada del objeto. Las partículas que forman el líquido “quieren echar fuera” al objeto (explicado de forma coloquial). Esta fuerza de repulsión se opone a la fuerza peso. Por lo tanto, apunta en sentido contrario a la fuerza Peso. Esta fuerza de repulsión la llamaremos fuerza de Empuje.

Si restamos la fuerza Peso menos la fuerza de Empuje, tendremos el resultado del Peso Aparente. Este Peso Aparente es el causante de la sensación de ligereza que sentimos dentro del mar.

$$Peso\ Aparente = Fuerza\ Peso - Fuerza\ Empuje$$

$$P_{Aparente} = F_{Peso} - E$$

Si introducimos por completo un objeto dentro del fluido, pueden pasar tres cosas:

- Si la fuerza peso es mayor que el empuje, el objeto seguirá bajando dentro del fluido.
- Si la fuerza peso es igual al empuje, el objeto quedará en equilibrio dentro del fluido.
- Si la fuerza peso es menor que el empuje, el objeto subirá y quedará flotando en la superficie.

PARA PENSAR 8. ¿Cómo podemos calcular el valor de la fuerza de empuje? ¿Has estudiado el principio de Arquímedes en años anteriores? ¿Crees que se puede aplicar el principio de Arquímedes a gases como el aire de la atmósfera?

Arquímedes afirmó lo siguiente: "Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza de empuje vertical hacia arriba llamada E, equivalente al peso del fluido que desaloja."

Es decir:

- Calculamos el volumen del objeto que ha entrado dentro del fluido.
- Calculamos la masa de ese volumen, suponiendo que está formado por el fluido.
- Calculamos la fuerza peso de esa masa.

La gran pregunta es cómo calcular la masa del volumen formado por el fluido. Para responder, necesitaremos el concepto de densidad, que explicaremos en futuras unidades.

1.9. La ley de gravitación universal

Terminamos el estudio cualitativo de fuerzas con la conocida ley de gravitación universal, enunciada también por Isaac Newton, y que ofrece un modelo bastante preciso para comprender el movimiento de los cuerpos celestes del universo.

Supongamos dos cuerpos celestes (da igual que sean estrellas, planetas o satélites naturales). El primero tiene masa M y el segundo masa m.

La distancia de separación entre ambos cuerpos es igual a d. Esta distancia hace referencia a la distancia entre los núcleos de los cuerpos celestes.

Por el simple hecho de poseer masa, los cuerpos celestes se atraen. La fuerza con que se atraen se llama fuerza de atracción gravitatoria. Y según la tercera ley de Newton, la fuerza con que el primer cuerpo atrae al segundo es igual a la fuerza con el segundo cuerpo atrae al primero, pero en sentido opuesto (ley de acción y reacción).

El valor de la fuerza es mayor cuanto más grande son las masas de los cuerpos. Y es menor cuánto más lejos están situados los cuerpos entre sí.

Por lo tanto, es lógico pensar que la fuera de atracción gravitatoria depende del producto de las masas y de la división de la distancia.

$$F_{gravitatoria} = \frac{\square \times \square}{\square}$$

$$F_{gravitatoria} = \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{m}}{\mathrm{distancia}}$$

La gran aportación de Newton fue la de proponer una fórmula exacta para calcular esta fuerza. Esa fórmula fue una auténtica revolución en el pensamiento de la humanidad, ya que los científicos del s. XVII creyeron que podían describir cualquier tipo de movimiento aplicando una única y sencilla fórmula. Con la fórmula de Newton se puede predecir con exactitud los movimientos de los planetas, la periodicidad de los eclipses o el periodo de paso de los cometas.

$$F_{gravitatoria} = G \times \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}$$

PARA PENSAR 9. ¿Qué te llama la atención de esta fórmula? ¿Crees que sigue utilizándose en la actualidad, o es una fórmula que forma parte del pasado de la Ciencia? ¿Sabes si hay otra fórmula parecida para calcular la atracción y repulsión de objetos cargados eléctricamente?

En la fórmula ofrecida por Newton, la distancia que aparece en el denominador está elevada al cuadrado. Y la fracción va multiplicado por una constante G, llamada **constante de gravitación universal**. El valor de la constante G no es algo trivial. Ha sido objeto de obsesión de científicos de todo el mundo. Y los experimentos para determinar su valor se encuentran entre los más famosos de la historia de la Ciencia.

Nosotros, en 2ºESO, nos vamos a quedar en conocer simplemente su valor (número y unidad).

$$Constante\ de\ gravitación\ universal: G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

¡Ojo! La expresión de la constante no es una fórmula. Es un número seguido de unidades. Las unidades son Newton, metro al cuadrado y kilogramo al cuadrado.

Ejercicios resueltos sobre gravitación universal

La masa de la Tierra es $5{,}97 \times 10^{24}\ kg$, la masa de la Luna es $7{,}35 \times 10^{22}\ kg$, y la distancia que separa sus centros de gravedad es $384.400\ km$. Obtener la fuerza gravitatoria con que se atraen mutuamente la Tierra y la Luna.

$$F_{gravitatoria} = G \times \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}$$

Sustituimos los valores del enunciado en la fórmula de la fuerza de atracción gravitatoria. Recuerda que debemos usar las unidades de referencia del Sistema Internacional. Por lo tanto, la distancia debemos expresarla en metros.

$$384.400\ km \times \frac{1.000\ m}{1\ km} = 384.400.000\ m = 3{,}84 \times 10^8\ m$$

Fíjate que hemos expresado la distancia siguiendo las normas de la notación científica, con dos cifras decimales redondeadas.

$$F_{gravitatoria} = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}97 \times 10^{24} \times 7{,}35 \times 10^{22}}{(3{,}84 \times 10^8)^2}$$

Operamos paso a paso. Los números decimales por un lado y las potencias de base 10 por otro. En el denominador, el cuadrado afecta a los dos términos que están multiplicando.

$$F_{gravitatoria} = \frac{6{,}67 \times 5{,}97 \times 7{,}35 \times 10^{-11} \times 10^{24} \times 10^{22}}{(3{,}84)^2 \times (10^8)^2}$$

$$F_{gravitatoria} = \frac{292{,}68 \times 10^{35}}{14{,}75 \times 10^{16}}$$

$$F_{gravitatoria} = 19{,}84 \times 10^{19}$$

$$F_{gravitatoria} = 1{,}98 \times 10^{20}\ N$$

PARA PENSAR 9. Si la fuerza con que se atraen la Tierra y la Luna es la misma, ¿por qué es la Luna la que gira alrededor de la Tierra y no es la Tierra la que gira alrededor de la Luna? Si aplicamos el mismo razonamiento al Sol y a la Tierra, ¿por qué es la Tierra quien gira alrededor del Sol y no es el Sol el que gira alrededor de la Tierra?

La fórmula de la fuerza de gravitación universal se aplica a cuerpos celestes (grandes masas y grandes distancias). Pero ¿qué pasaría si aplicamos esa fórmula a un objeto de masa m situado en la superficie de la Tierra?

$$F_{gravitatoria} = G \times \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}$$

El valor M sería la masa de la Tierra ($5{,}97 \times 10^{24}\ kg$). El valor de la distancia d sería el radio de la Tierra ($6.371\ km$). Sustituyamos estos valores en la fórmula, recordando pasar la distancia de kilómetros a metros.

$$6.371\ km \times \frac{1.000\ m}{1\ km} = 6.371.000\ m = 6{,}37 \times 10^6\ m$$

$$F_{gravitatoria} = 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}97 \times 10^{24} \times \mathrm{m}}{(6{,}37 \times 10^6)^2}$$

Operemos, nuevamente, poco a poco.

$$F_{gravitatoria} = \frac{6{,}67 \times 5{,}97 \times 10^{-11} \times 10^{24} \times \mathrm{m}}{(6{,}37)^2 \times (10^6)^2}$$

$$F_{gravitatoria} = \frac{39{,}82 \times 10^{13} \times \mathrm{m}}{40{,}58 \times 10^{12}}$$

$$F_{gravitatoria} = 0{,}98 \times 10 \times m$$

$$F_{gravitatoria} = 9{,}8 \times m$$

PARA PENSAR 10. ¿Te suena de algo el resultado que hemos obtenido? ¿Se parece a la fuerza peso que sienten los objetos situados en la superficie del planeta? ¿Qué conclusión podemos sacar al aplicar la fórmula de la atracción gravitatoria $F_{gravitatoria} = G \times \frac{\mathrm{M} \times \mathrm{m}}{\mathrm{d}^2}$ a un objeto de masa m situado en la superficie del planeta? ¿Qué valor se obtiene al operar únicamente los términos $G \times \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{d}^2}$, si la masa M es la masa de la Tierra y si distancia d es igual al radio de la Tierra?

PARA PENSAR 11. ¿Crees que la fuerza de la gravedad tiene algo que ver con el hecho de que las personas de cualquier lugar del planeta no tengan sensación de estar boca abajo? ¿Hay alguna diferencia gravitatoria entre vivir en el hemisferio Norte o en el hemisferio Sur? Si la Tierra está achatada por los Polos, ¿dónde será mayor la gravedad, en los Polos o en el Ecuador? ¿Por qué es mayor la gravedad a nivel del mar que en la cumbre del Everest?

2. Robótica y pensamiento computacional: medir coeficiente de rozamiento con ayuda del robot maqueen

Vamos a utilizar lo que aprendimos en la unidad anterior sobre velocidad constante y aceleración con el robot maqueen. Si tienes los códigos de programación guardados, los puedes volver a utilizar.

Repasemos las ideas principales que vimos en el apartado de robótica y en la parte experimental.

La siguiente tabla es la que completamos para determinar, en m/s, la velocidad del robot cuando fijamos a 20 su velocidad relativa en el código de programación.

Marca nuevamente la distancia de 1 metro en el suelo y mide (tres veces) el tiempo que tarda maqueen en recorrer esa distancia. Así tendremos todos los datos necesarios para obtener v_0 en m/s.

Fix $v_0 = 20$ in robot maqueen **Repeat three times the experiment and calculate the mean value** **Use a stopwatch and a tape measure**	
Time (seconds)	**Position (metres)**
$t_0 = 0\ s$	$s_0 = 0\ m$
$t_{f1} =$	$s_{f1} =$ 1m
$t_{f2} =$	$s_{f2} =$ 1m
$t_{f3} =$	$s_{f3} =$ 1m

$$t_{mean\ value} = \frac{t_{f1} + t_{f2} + t_{f3}}{3}$$

$$v_0 = \frac{1-0}{t_{mean\ value} - 0}$$

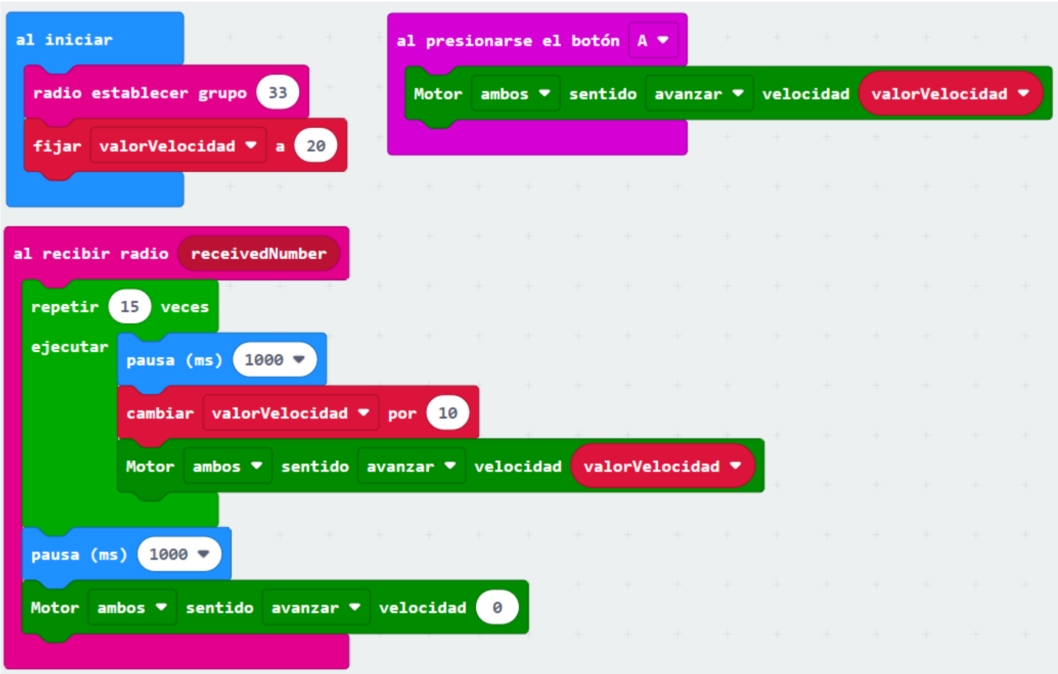
$$v_0 = \frac{1}{t_{mean\ value}}$$

$$v_0 =$$

Ya sabemos cuánto vale la velocidad inicial, en m/s, cuando en micro:bit ponemos el valor 20 en el bloque de programación del motor.

Ahora simularemos un M.R.U.A. aumentando la velocidad en 10 unidades cada segundo (empezando en 20 y terminado en 170). Si recuerdas, una señal de radio activaba el M.R.U.A. durante 16 segundos, al pasar el robot delante de una placa emisora.

La siguiente imagen te recuerda el código de la placa receptora conectada al robot. Recuerda que el profesor tiene preparado el robot con la placa emisora y habrá señalado en el suelo una recta calibrada para saber qué distancia recorre maqueen en los 16 segundos que dura el M.R.U.A.



La distancia recorrida en esos 16 segundos será el valor de la posición final s_f.

Con el valor de la posición final s_f y de la velocidad inicial v_o podemos obtener el valor de la aceleración en m/s^2. La siguiente fórmula ya la demostramos en la unidad anterior. Ahora directamente utilizamos su expresión. Y llamaremos a la aceleración con el sobrenombre de aceleración del motor

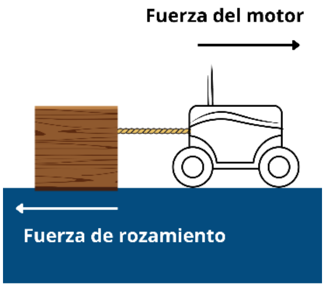
$$\frac{s_f - 16 \times v_0}{128} = a_{motor}$$

¿Cuál es la novedad de este tema de robótica?

Engancharemos, con un alambra rígido o una brida tensada, el robot Maqueen a un bloque de madera. Aplicamos al robot el mismo incremento de velocidades que ya utilizamos en la unidad anterior, pero comenzando ahora desde velocidad 0. Así garantizamos que la velocidad inicial del bloque de madera sea nula.

Tiempo (segundos)	Velocidad uniforme durante un segundo de duración (unidades relativas de micro:bit)
0 s	0
1 s	10
2 s	20
3 s	30
4 s	40
5 s	50
6 s	60
7 s	70
…	…
…	…
15 s	150

El motor del robot aplica sobre el bloque de madera una fuerza igual a la masa del robot multiplicada por la aceleración que calculamos antes. Además, el bloque de madera sufre la fuerza de rozamiento con la superficie. La siguiente imagen resume el esquema de fuerzas horizontales aplicadas sobre el bloque de madera.



Al estar en una superficie horizontal, no tendremos que considerar el efecto de la inclinación sobre la fuerza de rozamiento. Además, para simplificar cálculos, admitiremos la hipótesis de que el coeficiente de rozamiento estático es el mismo que el coeficiente de rozamiento dinámico (cuando se mueve el objeto). Esto no es real, pero es una buena aproximación para no alargar en exceso las operaciones matemáticas.

$$Fuerza\ del\ motor = masa\ del\ robot\ \times a_{motor}$$

$$Fuerza\ de\ rozamiento = masa\ madera \times g\ \times coeficienteRozamiento$$

Si el bloque de madera se mueve hacia la derecha, la fuerza resultante apuntará también hacia la derecha. Para ello, restamos la fuerza del motor menos la fuerza de rozamiento. El bloque se moverá con una nueva aceleración, que llamaremos $a_{resultante}$.

$$(masa\ del\ robot \times a_{motor}) - (masa\ madera \times g \times coeficienteRozamiento) = masa\ madera \times a_{resultante}$$

De esta ecuación podemos despejar el valor del coeficiente de rozamiento.

$$(masa\ del\ robot \times a_{motor}) - (masa\ madera \times a_{resultante}\ ) = masa\ madera \times g \times coeficienteRozamiento$$

$$\frac{(masa\ del\ robot \times a_{motor}) - (masa\ madera \times a_{resultante}\ )}{masa\ madera \times g} = coeficienteRozamiento$$

Hemos llegado a una expresión donde podemos conocer todos los parámetros. La masa del robot y la masa de la madera se miden sencillamente con una balanza. La aceleración del motor la hemos obtenido anteriormente. El valor de la gravedad lo aproximamos a 9,8 m/s^2. Solo nos falta por conocer la aceleración resultante $a_{resultante}$.

PARA PENSAR 12. ¿Qué pasaría si la masa del objeto de madera fuese muy grande? ¿Podría ocurrir que el motor no pudiese vencer la fuerza de rozamiento estática? ¿Es necesario siempre una fuerza inicial que venza a la inercia?

Para calcular la aceleración resultante podemos razonar así: utilicemos la anterior tabla de incrementos de velocidades, partiendo del reposo, y apliquemos los resultados a la fórmula de la posición final del M.R.U.A.

$$s_f = s_0 + v_0 \times (t_f - t_0) + \frac{1}{2} \times a_{resultante} \times (t_f - t_0)^2$$

Si la posición inicial es nula, la velocidad inicial es nula y el tiempo inicial es nulo, nos quedará:

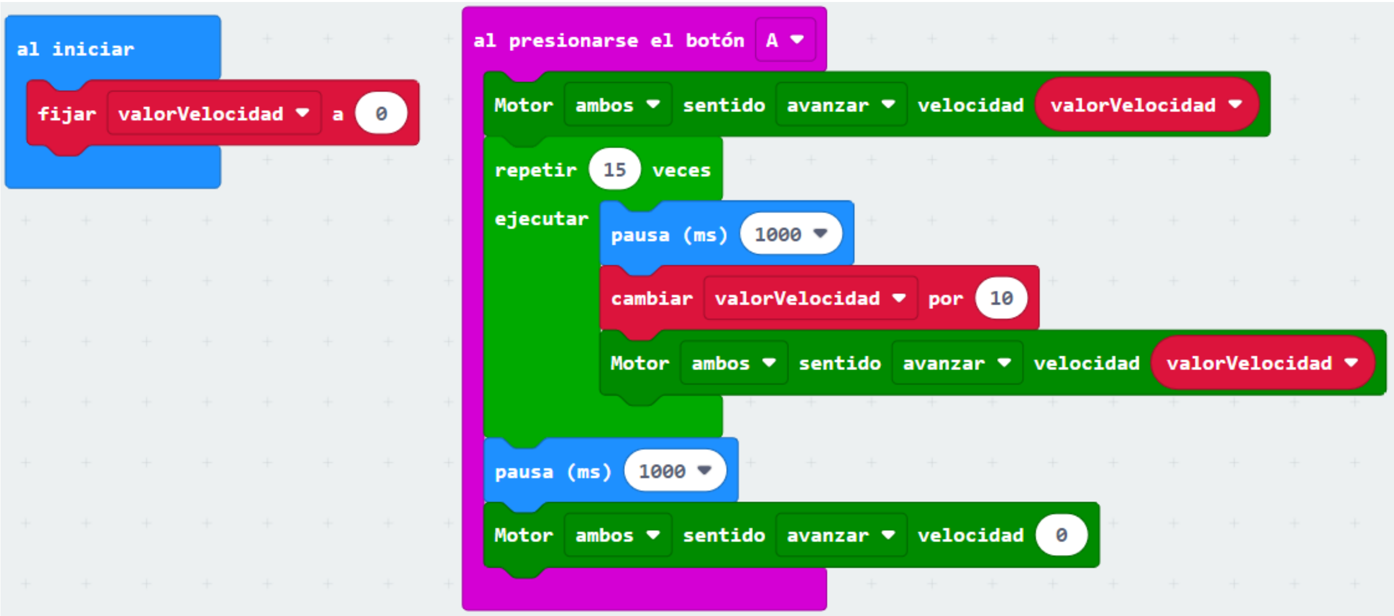
$$s_f = \frac{1}{2} \times a_{resultante} \times (t_f)^2$$

Despejamos el valor de la aceleración resultante:

$$\frac{2 \times s_f}{(t_f)^2} = a_{resultante}$$

Es decir: conectamos el robot al bloque de madera, programamos la placa para que el coche aumente su velocidad en 10 unidades relativas cada segundo y para que el movimiento dure 16 segundos en total, y medimos la distancia recorrida. Y ya podremos obtener el valor de la aceleración resultante.

El código es simple. No hace falta placa emisora ni receptora. Solo necesitamos un bucle de incremento de velocidades y tener la escala calibrada en el suelo. Debemos situar el bloque de madera en el origen del sistema de referencias.



El código debe ejecutarse con el coche maqueen unido al bloque de madera, para que efectivamente la aceleración a determinar sea la aceleración resultante. **Si unimos el robot y el bloque de madera con un alambre rígido evitaremos, además, que al frenar en seco el coche, el bloque pueda seguir un tiempo deslizando por la inercia del movimiento**.

Una vez obtenida la aceleración resultante, tendrás todos los parámetros necesarios para calcular el coeficiente de rozamiento con la fórmula que dedujimos anteriormente. El coeficiente de rozamiento no tiene unidades.

3. Simulación matemática con Geogebra: Parabolas

We studied the parabolas in the previous unit. Now, we are going to draw parabolas with Geogebra.

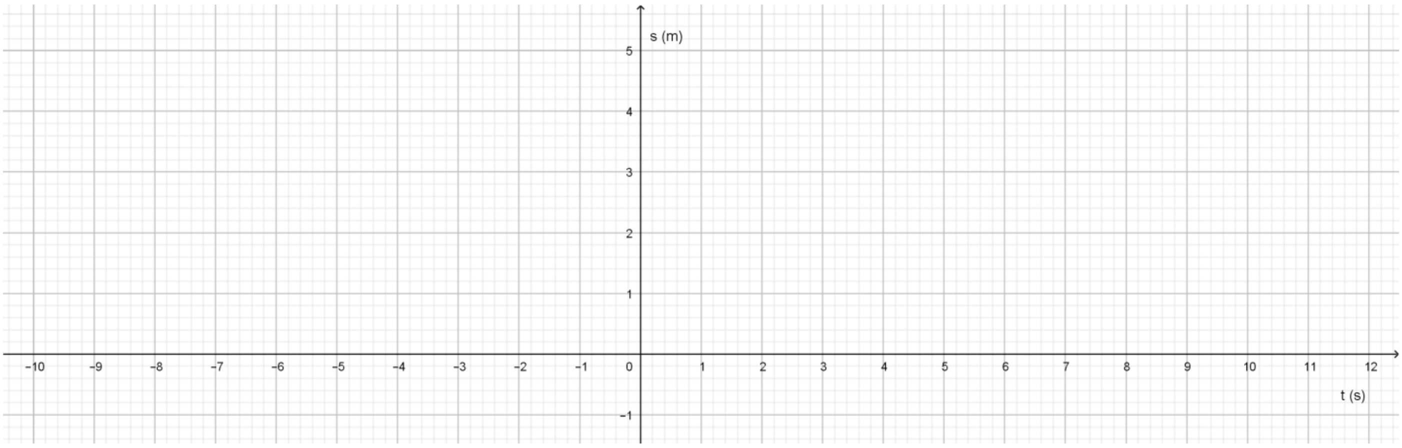
We start with the final position formula of the uniformly accelerated rectilinear motion (UARM):

$$s_f = s_0 + v_0 \times (t_f - t_0) + \frac{1}{2} \times a \times (t_f - t_0)^2$$

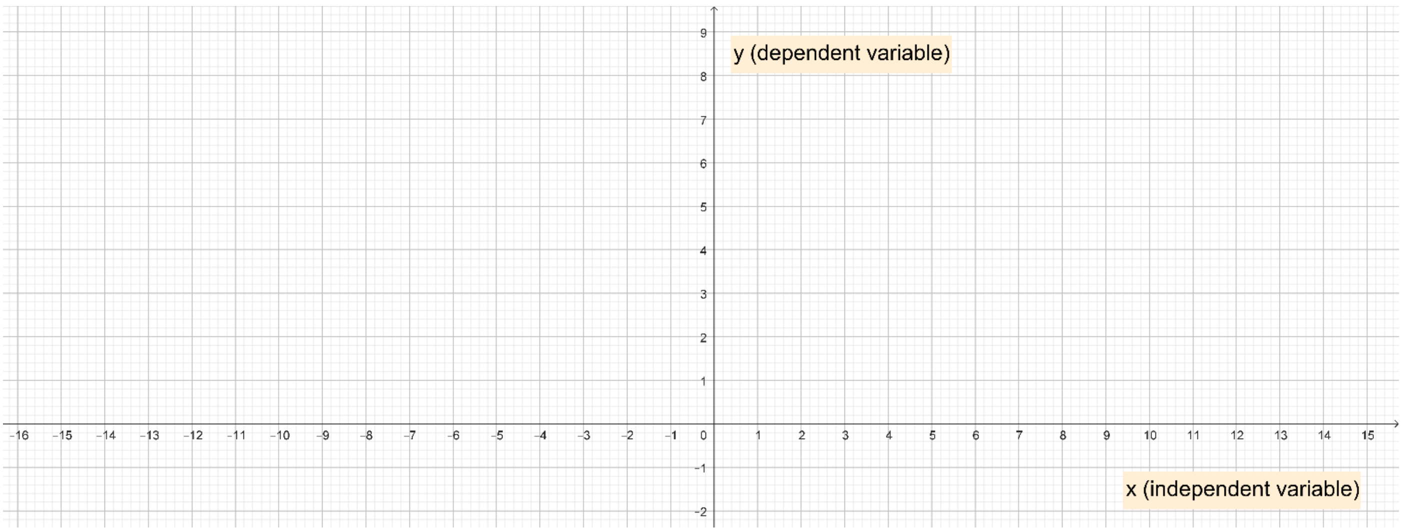
If we know the value of s_0 (initial position), t_0 (initial time) and a (acceleration), we can change the value of t_f (final time) to get the result of s_f (final position). We can say that s_f depends on t_f.

In Math and in Science is quite common that a variable depends on another variable. Also, these variables can be represented at a cartesian coordinates system.

The independent variable is situated over the horizontal axis and the dependent variable over the vertical axis. In the UARM examples, the final time t_f is the independent variable and the final position s_f is the dependent variable.



Can we express other variables at a cartesian coordinates system? Yes, of course. In fact, scientists use two special symbols to describe the variables. The symbol "x" indicates the independent variable and the symbol "y" expresses the dependent variable.



For instance, in UARM we can work with a formula like this:

$$s_f = 2 + 3 \cdot t_f - 5 \cdot (t_f)^2$$

The right image shows the graph of this rectilinear motion, in the interval [0 s , 1 s].

The object starts at a distance of 2 metres from the origin.

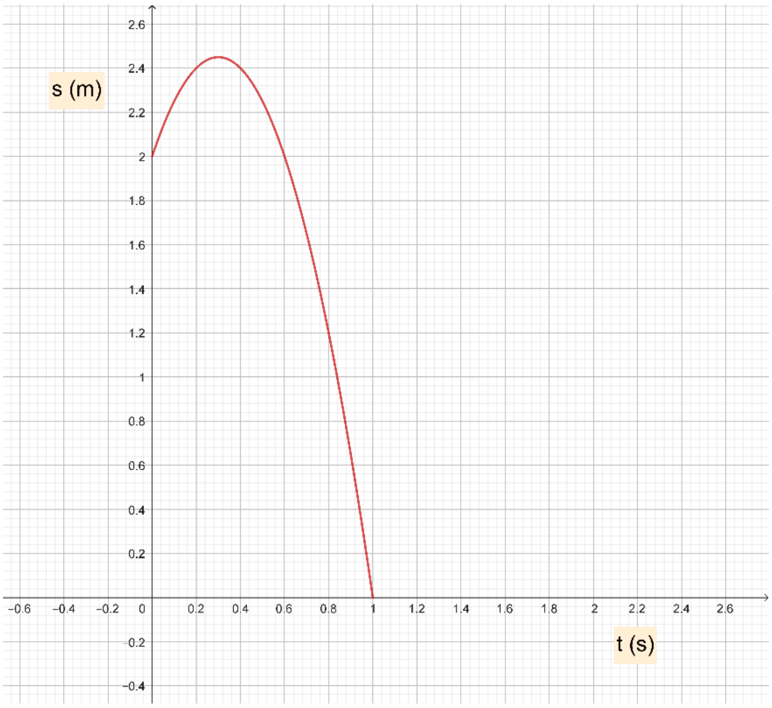
At 0,3 seconds, the object gets the maximum distance from the origin.

At 1 second, the object returns to the origin.

How can we draw this graph with Geogebra? In the "Input" line, we can write this expression:

$$y = 2 + 3x - 5x^2$$

If you don't write any math operator between a number and a variable, it means that there is a multiplication.



PARA PENSAR 13. Si escribes en la línea de entrada de Geogebra la expresión que se indica, ¿obtienes una gráfica exactamente igual a la de la imagen superior? ¿En qué se diferencian? ¿Cuál crees que es el motivo por el cuál no son iguales?

When the parabola crosses the horizontal axis, the dependent variable is equal to zero. In Math is quite importante to get the value of "x" that generate the result $y = 0$.

Parabolas always have an extreme or apex. If the parabola is concave, the extreme is called maximum. And if the parabola is convex, the extreme is called minimum.

PARA PENSAR 14. Si dibujas cualquier parábola sobre un sistema de coordenadas, ¿siempre cortará al eje horizontal? ¿Cuántas veces como máximo puede cortar una parábola al eje horizontal? ¿Se te ocurre alguna forma para obtener los valores de "x" que hacen que la variable dependiente sea igual a $y = 0$.

4. Descripción de la situación de aprendizaje: International Space Station (ISS)

The International Space Station (ISS) orbits the Earth 400 kilometres above our heads.

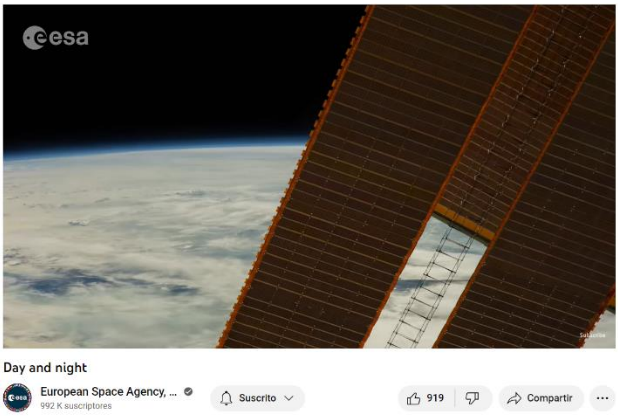
The ISS orbits so fast that it does not fall directly to the Earth. The ISS remains falling slowly around the blue planet. For this reason, the astronauts feel weightlessness and they can do experiments with this property.

Sometimes, astronauts start the spacecraft's engines to correct the ISS orbit. It is quite important to stay in the right orbit. Nowadays, there are more than 5.000 artificial satellites around the Earth. And no one wants a space accident!

The ISS travels at 28.000 km/h around the planet. This speed is necessary to achieve weightlessness. The orbital speed depends on the orbital height. With that speed, ISS makes a rotation around the Earth in one hour and thirty minutes.

In the bellow link, you can watch a one-minute-timelapse that passes from daytime to nighttime and back again.

https://www.youtube.com/watch?v=yMgf1mMZLg4



With gravity equal to 0 m/s^2, the astronauts body grow up given that they don't feel the weight of their muscles and bones. In fact, they must train hard in the ISS in order not to lose their strength.

You can learn fun facts about the life in the ISS with this video (activate automatic English subtitles):

https://www.youtube.com/watch?v=tABc9ACrgtI

The ISS was inaugurated in 1998. It has hosted more than 200 astronauts from more tha 15 countries.

The ISS is an example that working together is better than working alone. This sentence can be applied to any scientific knowledge. So, It is essential to learn to work in a team in our subject of Pyshics and Quemistry!

Tras comprender la información sobre la vida en la Estación Espacial Internacional, responde a las siguientes cuestiones.

1. Calcula el valor de la expresión $G \times \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{d}^2}$, donde G es la constante de gravitación universal, M es igual a la masa de la Tierra y d es la distancia desde el centro de la Tierra a la Estación Espacial Internacional (¡Ojo! La distancia no se mide desde la superficie del planeta sino desde el centro de la Tierra). ¿Qué valor obtienes? Viendo el valor que has obtenido, ¿cómo es posible que los astronautas vivan en gravedad cero?

2. ¿Cuántos kilómetros recorre la ISS en una hora y media?

3. Razona las diferencias de las cuatro astronautas que aparecen en la siguiente imagen. Relaciona cada imagen con el concepto de velocidad orbital.

4. ¿Cuál es el peso de la ISS? Expresa el resultado final en la unidad de referencia de masa del S.I.

5. ¿Cuál es tu opinión sobre el gasto económico que supone mantener la ISS? ¿Crees que es un esfuerzo necesario, o por el contario opinas que sería deseable prescindir de la investigación espacial? Razona tus respuestas.

5. Productos finales que se evaluarán

- T.E.C.A. Trabajo escrito con apuntes sobre todos los contenidos que llevamos trabajados en el curso. En el momento en que terminemos la sexta situación de aprendizaje, el profesor puede realizar el T.E.C.A. el día que considere oportuno. Sin necesidad de informar previamente a los alumnos.
- Cuaderno de clase (**no olvides los criterios de orden, presentación y limpieza presentados al inicio de curso**)
  - Portada con el número y el título del tema
  - Indica al menos tres aportaciones de Isaac Newton a la Ciencia, tras ver el vídeo que proyectamos en clase en el apartado 1.3.
  - Explica de manera detallada las tres leyes de Newton, indicando un ejemplo donde se aplique cada una de las leyes. El vídeo que vemos en el apartado 1.4 puede servirte de ayuda.
  - Copia los dos ejercicios resueltos en el apartado 1.4. Pregunta cualquier duda al profesor.
  - Copia el primer ejercicio resuelto sobre la ley de gravitación universal del apartado 1.9.
- Situación de aprendizaje sobre la Estación Espacial Internacional: Copia en tu cuaderno las preguntas que se plantean al final de la situación de aprendizaje del apartado 4, y responde de manera ordenada y razonada. Indica todas las operaciones necesaria y explica con palabras las fórmulas y operaciones matemáticas. **Si utilizas el idioma inglés para redactar todo o una parte del guion, se valorará positivamente en la nota**.
- Producto audiovisual digital. Actividad en grupo de 2 o 3 personas. Regístrate en Canva (www.canva.com). Personaliza una plantilla o crea una nueva. El tamaño debe ser A3 en vertical. El cartel debe recoger de manera clara, concisa y elegante las tres leyes de Newton. Debes explicar cada ley y describir cómo se aplica a un ejemplo concreto. Debes acompañar cada ley con una imagen relacionada con el ejemplo que estés explicando. El cartel definitivo debes descargarlo en formato PDF y enviarlo por Teams al profesor. Cada grupo debe enviar un solo cartel. La calificación será la misma para todos los miembros del grupo. **Si utilizas el idioma inglés para redactar todo o una parte del guion, se valorará positivamente en la nota**.
- Exposición oral. Exposición individual. Eres Galileo Galilei. Debes preparar una exposición de 2 minutos (ni un segundo más) sobre las ideas principales de tu pensamiento científico. Durante la exposición no puedes utilizar papeles ni anotaciones. Céntrate en las ideas científicas de Galileo y no en detalles secundarios sobre cuántos hijos tuvo. Es un trabajo de ciencias, no de cotilleos. Controla el tiempo máximo y practica previamente tu exposición. La realizarás en el recreo que te indique el profesor. No utilices términos ni palabras que no domines. Si algo no lo comprendes, pregunta previamente a tu profesor para que te lo explique. Puedes utilizar los siguientes enlaces para buscar información:
  - https://www.kids.csic.es/cientificos/galileo.html
  - https://www.astromia.com/biografias/galileo.htm
  - https://experimentoscaseros.xyz/cientificos/galileo-galilei
  - https://museovirtual.csic.es/salas/magnetismo/biografias/galileo.htm
- Robótica: Trabajo en grupos de 3-4 alumnos. Enseñad al profesor el robot maqueen arrastrando el bloque de madera y las medidas y cálculos realizados para obtener la aceleración resultante del movimiento y el coeficiente de rozamiento. Recuerda que el profesor puede preguntar sobre cualquier asunto del código.
- Simulación matemática con Geogebra: Enseña al profesor el archivo de Geogebra con parábola que se indica en el apartado 3. Recuerda que el profesor puede preguntarte en cualquier momento que le expliques cómo has hecho la actividad y cualquier contenido vinculado con las parábolas.
- Respuesta oral a preguntas.
- Trabajo diario.

6. Ejercicios resueltos para practicar y para pensar

INTENTA LOS EJERCICIOS POR TI MISMO.

SI ALGO NO TE SALE, PUEDES MIRAR LA SOLUCIÓN.

SI NO COMPRENDES ALGÚN PASO, PREGUNTA AL PROFESOR (NO AL PROFESOR PARTICULAR NI A LA ACADEMIA, SINO AL PROFESOR DE LA ASIGNATURA EN EL COLEGIO).

1. Sabemos que la masa de Marte es $6,39 \cdot 10^{26} g$ y su radio $3.389,5\ km$. Utiliza la expresión matemática $G \cdot \frac{M}{d^2}$ para obtener la aceleración gravitatoria en Marte. Siendo G la constante de gravitación universal.

La aceleración gravitatoria de la superficie de un cuerpo celeste se obtiene con la siguiente expresión, donde aparece el valor de la constante universal de gravitación y la masa (en kilogramos) y el radio (en metros):

$$g = G \cdot \frac{M}{d^2}$$

$$g = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{6{,}39 \cdot 10^{23} kg}{(3.389{,}5 \cdot 10^3\ m)^2}$$

Multiplicamos los números decimales del numerador y desarrollamos el cuadrado del denominador.

$$g = \frac{42{,}62 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{23}}{11{,}49 \cdot 10^6 \cdot 10^6}$$

Dividimos los números decimales y operamos con las potencias de base 10.

$$g = 3{,}71\ m/s^2$$

2. Introducción a la resolución de ecuaciones de segundo grado.

La gráfica de una parábola puede cortar al eje horizontal dos veces, una vez o ninguna vez. Vamos a estudiar matemáticamente como obtener estos cortes con el eje horizontal, en ejemplos sencillos de parábolas.

a) $y = x^2 - 4x$

La parábola corta al eje horizontal cuando la variable dependiente es igual a 0.

Por lo tanto, si hacemos $y = 0$, tendremos:

$$x^2 - 4x = 0$$

A la derecha de la ecuación tenemos el número 0. Vamos a analizar lo que aparece en la izquierda de la ecuación:

- Fíjate que en la ecuación aparece la variable independiente elevada al cuadrado: x^2.
- También aparece la variable independiente multiplicada por menos cuatro: $-4x$.
- Y no aparece término independiente, es decir, en el término de la izquierda no aparece ningún número que no esté multiplicado por la variable independiente.

Cuando esto ocurre, podemos sacar factor común en el término de la izquierda. Sacar factor común significa detectar aquello que se repite en la ecuación. En nuestro ejemplo, podemos sacar factor común una de las x.

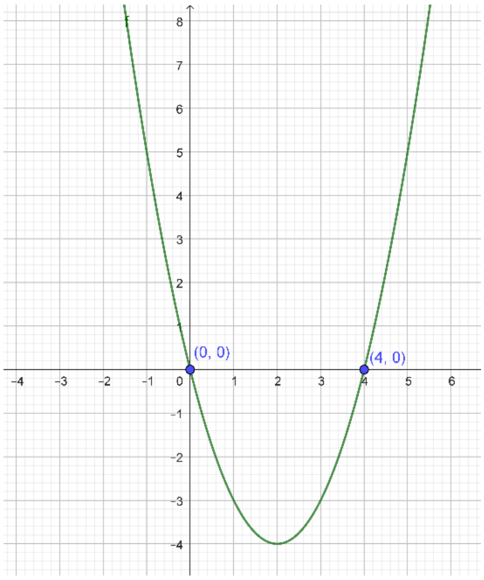
$$x \cdot (x-4) = 0$$

Llegamos a un producto. Y el producto está igualado a cero. Cuando esto ocurre, podemos razonar así: **dos términos multiplicados e igualados a cero, o el primero vale cero o el segundo vale cero**.

$$x = 0$$

$$x - 4 = 0 \ \rightarrow x = 4$$

Las dos soluciones de la ecuación son $x = 0$, $x = 4$.



Si dibujamos la parábola en Geogebra, podemos comprobarlo.

Esta técnica de sacar x como factor común, podemos hacerla siempre que no aparezca término independiente en la ecuación a resolver.

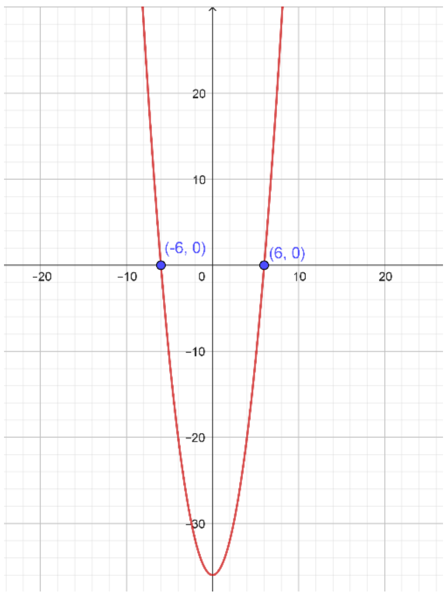
b) $\boldsymbol{y = x^2 - 36}$

En este segundo ejemplo, volvemos a sustituir $y = 0$ para obtener los puntos de corte con el eje horizontal.

$$x^2 - 36 = 0$$

Analizamos el término de la izquierda de la ecuación, y comprobamos:

- Aparece la variable independiente elevada al cuadrado: x^2.
- No aparece ningún término con la variable x elevada a exponente 1.
- Aparece un término independiente: -36.



En este tipo de ejemplo, podemos aplicar raíz cuadrada para resolver. En efecto, si pasamos el término independiente a la derecha, tendremos:

$$x^2 = 36$$

Aplicar raíz cuadrada es encontrar el número que, elevado al cuadrado, de lugar a 36. Este ejemplo es sencillo, porque seis veces seis es igual a 36.

Una solución sería $x = 6$.

Pero no es la única. Si recuerdas las propiedades del producto de signo, menos por menos es igual a más. Por lo tanto, menos seis por menos seis da como resultado más 36.

La segunda solución sería $x = -6$.

PARA PENSAR 15. ¿Piensas que todas las ecuaciones de segundo grado se pueden resolver con estos dos métodos? ¿Se te ocurre alguna ecuación de segundo grado donde estos métodos no funcionen?

3. Método de Cardano-Vieta para encontrar las soluciones de una ecuación de segundo grado.

Existen ecuaciones de segundo grado que no pueden resolverse por ninguno de los dos métodos del ejercicio anterior. Por ejemplo:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Esta ecuación no puede resolverse sacando factor común ni aplicando directamente raíz cuadrada. ¿Cómo resolverla?

Empecemos por el final: supongamos que ya conocemos las soluciones. Esto tiene truco, porque lo normal no es conocer las soluciones inicialmente. Pero vamos a hacerlo así porque nos servirá para comprender mejor el método conocido como Cardano-Vieta (Cardano fue un matemático italiano del s. XVI, mientras que Vieta fue un matemático francés también del s. XVI).

Los valores $x = 1$ y $x = 5$ son soluciones de la ecuación anterior. En efecto, si sustituyes $x = 1$ el miembro de la izquierda vale 0. Y si sustituyes $x = 5$ pasa lo mismo.

Si conocemos las dos soluciones, significa que la ecuación anterior siempre podremos escribirla de la siguiente forma:

$$a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = 0$$

El coeficiente a es un número no nulo. Luego hablaremos de él.

Si multiplicas los dos binomios que hemos escrito, recuperas la ecuación de segundo grado de la que partimos, multiplicada por ese factor a.

Esto forma de escribir la ecuación se llama factorizar: escribir la ecuación como un producto de binomios, de donde podemos sacar las soluciones. Como el producto de los dos binomios es igual a 0, o el primer binomio vale 0 o el segundo binomio vale 0. Por lo tanto:

$$(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1$$

$$(x - 5) = 0 \rightarrow x = 5$$

Ahora imagina que no conocemos las soluciones. Supongamos que son $x = x_1$ y $x = x_2$. Los binomios quedarían así:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Hagamos el producto de los binomios, término a término.

$$x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Saquemos factor común.

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Y comparemos esta expresión con la ecuación de partida.

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Los coeficientes que están situados en la misma posición deben ser iguales, por lo tanto podemos hacer el siguiente razonamiento.

$$-(x_1 + x_2) = -6 \rightarrow x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5$$

Es decir, si las soluciones de la ecuación son $x = x_1$ y $x = x_2$ podemos afirmar que **la suma de las soluciones es igual al opuesto del coeficiente que multiplica a x. Mientras que el producto de las soluciones es igual al término independiente**.

Con estas dos condiciones, podemos ir probando mentalmente soluciones. Por ejemplo, $x_1 = 2$ no puede ser solución porque de la primera condición saldría $x_2 = 4$ y de la segunda condición tendríamos $x_2 = 5/2$. Como ves, el valor de x_2 no coincide.

Puedes hacer una tabla de valores e ir probando. La solución será aquella donde el valor de x_2 sea el mismo aplicando las dos condiciones.

x_1	Aplicar $x_1 + x_2 = 6$ para obtener el valor de x_2	Aplicar $x_1 \cdot x_2 = 5$ para obtener el valor de x_2
0	6	¿?
1 (solución)	5	5
2	4	5/2
3	3	5/3
…	…	…

La fila $x_1 = 1$ y $x_2 = 5$ es la que contiene a las soluciones. Nuevamente, ir probando nos da la posibilidad de encontrar las soluciones. Aunque este método de ensayo y error tiene sus limitaciones.

PARA PENSAR 16. ¿Qué dificultad encuentras en el método de Cardano-Vieta? ¿Es cómodo encontrar las soluciones por ensayo y error? ¿Qué pasa si las soluciones son números decimales? ¿Qué pasaría si la ecuación de segundo grado no tuviese solución?

Si la ecuación de segundo grado la escribimos así:

$$a \cdot x^2 - b \cdot x + c = 0$$

Donde a se conoce como coeficiente líder, y multiplica a x^2. El coeficiente b multiplica a x. El coeficiente c es el término independiente. Las condiciones de Cardano-Vieta quedan así:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -b/a}$$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = c/a}$$

4. Fórmula general para encontrar las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado, de manera general, se puede expresar como un número a multiplicado por x^2, más otro número b multiplicado por x, más otro número c que hace las veces de término independiente. Es decir:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Esta forma de escribir la ecuación de segundo grado se llama forma general. Y podemos razonar un método para resolver la ecuación. Vayamos paso a paso.

En primer lugar, multiplicamos toda la ecuación por el factor $4\,a$.

$$4\,a \cdot (a\,x^2 + b\,x + c) = 0$$

Desarrollamos el producto del paréntesis.

$$4\,a^2x^2 + 4\,a\,b\,x + 4\,a\,c = 0$$

Llevamos a la derecha el término independiente.

$$4\,a^2x^2 + 4\,a\,b\,x = -4\,a\,c$$

Sumamos en ambos miembros la cantidad b^2.

$$4\,a^2x^2 + 4\,a\,b\,x + b^2 = b^2 - 4\,a\,c$$

Aquí viene el paso más difícil. Darnos cuenta de que el término de la izquierda es igual a un binomio al cuadrado.

$$(2\,a\,x + b)^2 = b^2 - 4\,a\,c$$

Para quitar el cuadrado, aplicamos raíz cuadrada. Sin olvidar el doble signo $\pm$ antes de la raíz.

$$2\,a\,x + b = \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

Pasamos a la derecha el factor b.

$$2\,a\,x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

Dividimos todo por la cantidad $2\,a$.

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$

Y ya lo tenemos. Los valores x de la solución se pueden obtener con la fórmula que acabamos de demostrar.

Si la ecuación tiene dos soluciones, obtendremos dos valores con la fórmula anterior.

Si la ecuación tiene una única solución, significará que el contenido de la raíz queda igual a 0.

Y si la ecuación no tiene solución, será porque el contenido de la raíz será negativo. Y no existen solución real de raíces cuadradas de números negativos.

Esta fórmula es muy potente, ya que permite obtener las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado. Apliquémosla para un ejemplo.

$$2\,x^2 - 3x + 1 = 0$$

En este ejemplo, tendremos: $a = 2, b = -3, c = 1$. Apliquemos la fórmula.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\,(2)\,(1)}}{2\,(2)}$$

Operemos con paciencia.

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

Tendremos dos soluciones, según cojamos el signo positivo o negativo de delante de la raíz cuadrada.

$$x_1 = \frac{3+1}{4} \rightarrow x_1 = \frac{4}{4} \rightarrow x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{3-1}{4} \rightarrow x_2 = \frac{2}{4} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$$

Las soluciones de nuestra ecuación de segundo grado son los valores 1 y 1/2.

PARA PENSAR 17. ¿Eres capaz de proponer una ecuación de segundo grado que solo tenga una solución? ¿Y una ecuación de segundo grado que no tenga solución? Ve probando con los valores de los coeficientes a, b, c para responder a estas preguntas. Trata de sacar conclusiones generales que te puedan servir para otros ejemplos.

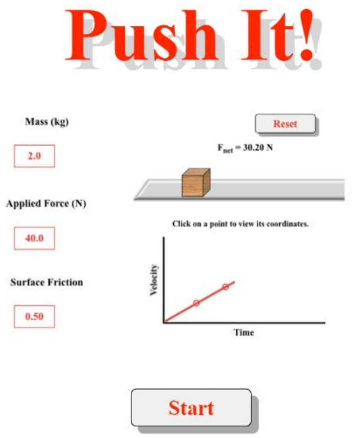
7. Por si quieres seguir ampliando y aprendiendo

1. Practica con la siguiente simulación sobre fuerzas de rozamiento en superficies horizontales.

La siguiente animación web permite practicar con la fuerza de rozamiento en movimientos horizontales, variando tanto el valor de la fuerza que se aplica, como la masa del objeto que se desplaza como el coeficiente de rozamiento.

https://www.physicsclassroom.com/Physics-Interactives/Newtons-Laws/Force/Force-Interactive

La misma web tiene un menú de animaciones interesantes en el marco de la Física, por si quieres practicar con otros ejemplos.



2. En la siguiente animación de Geogebra puedes ver, durante 10 segundos, la evolución de la posición y de la velocidad en un MRUA, donde puedes manipular el valor de la aceleración.

https://www.geogebra.org/m/gjswje4t

La animación también permite visualizar la gráfica de la velocidad respecto al tiempo.

Los deslizadores posibilitan cambiar el valor de la aceleración y el valor de la posición inicial.

Verás como el objeto va ganando velocidad con el paso del tiempo.

PARA PENSAR 18. ¿Por qué la gráfica de la velocidad respecto del tiempo no tiene forma de parábola? ¿Por qué aparece una línea recta?

3. Fuerza de frenado de un coche.

Imagina un vehículo que, con sus ocupantes dentro, pesa alrededor de 1.300 kg. Viaja a 120 km/h y en un momento dado, el conductor debe realizar una frenada de emergencia por un obstáculo que ha surgido en la carretera. Desde que acciona el freno hasta que el coche se detiene, el vehículo avanza 90 metros.

Suponiendo que la aceleración de frenado ha sido constante, ¿cuánto tiempo ha tardado el vehículo en detenerse, cuál has sido su aceleración de frenado y cuál ha sido la fuerza que los frenos han aplicado sobre el vehículo?

La ecuación de la posición final en M.R.U.A. es bien conocida por todos:

$$s_f = s_0 + v_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2}a(t_f - t_0)^2$$

Como otras veces, supondremos posición inicial nula y tiempo inicial nulo.

$$s_f = v_0(t_f) + \frac{1}{2}a(t_f)^2$$

La posición final coincide con la distancia recorrida: 90 metros. El valor de la velocidad inicial son 120 km/h, que deberemos pasar a m/s.

$$120\frac{km}{h} \times \frac{1.000\ m}{1\ km} \times \frac{1\ h}{3.600\ s} = 33{,}33\ m/s$$

Por lo tanto:

$$90 = 33{,}33(t_f) + \frac{1}{2}a(t_f)^2$$

Además, el valor de la aceleración uniforme se puede calcular desde su definición:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$$

$$a = \frac{0 - 33{,}33}{t_f - 0}$$

$$a = \frac{-33{,}33}{t_f}$$

Este valor de la aceleración podemos sustituirlo en la expresión de la posición final del M.R.U.A.

$$90 = 33{,}33(t_f) + \frac{1}{2}(\frac{-33{,}33}{t_f})(t_f)^2$$

En el último término de la ecuación, podemos simplificar en el tiempo final. Operamos directamente con números decimales, para no liarnos demasiado con las fracciones.

$$90 = 33{,}33(t_f) + \frac{1}{2}(-33{,}33)(t_f)$$

$$90 = 33{,}33(t_f) - 16{,}67(t_f)$$

Agrupamos los términos que dependen del tiempo final.

$$90 = 16{,}66(t_f)$$

Esto es una ecuación de primer grado muy sencilla. Podemos despejar el tiempo final.

$$\frac{90}{16{,}66} = t_f$$

$$5{,}4\ s = t_f$$

Es decir, el vehículo tarda 5,4 segundos en detenerse por completo. Fíjate que es bastante tiempo. En esos 5,4 segundos el coche sigue avanzando, y puede impactar con cualquier objeto que se le cruce.

Con este dato del tiempo, ya podemos sacar la aceleración de frenado.

$$a = \frac{-33{,}33}{t_f}$$

$$a = \frac{-33{,}33}{5{,}4}$$

$$a = -6{,}17\ m/s^2$$

No olvides las unidades. La aceleración sale negativo porque es de frenado.

Para determinar la fuerza que realizan los frenos sobre el vehículo, podemos aplicar la segunda ley de Newton.

$$F = m \times a$$

La fuerza también sale negativa, por ser una fuerza de frenado. Las magnitudes vectoriales, como la velocidad, la aceleración o la fuerza, pueden tener valores negativos para indicar el sentido en que se aplican. Una fuerza negativa se opone al movimiento inicial del vehículo.

La masa del vehículo, con los pasajeros, la proporciona el enunciado.

$$F = 1.300\ kg \times (-6{,}17\ m/s^2)$$

$$F = -8.021\ N$$

Donde, nuevamente, recordamos que el signo negativo indica que la fuerza es de frenado.