JUNIO 2005

Se considera el plano $\pi \equiv y + z - 12m = 0$

(Donde m es un parámetro real)

Y las rectas:

$$u \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad v \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \qquad w \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 3z \end{cases}$$

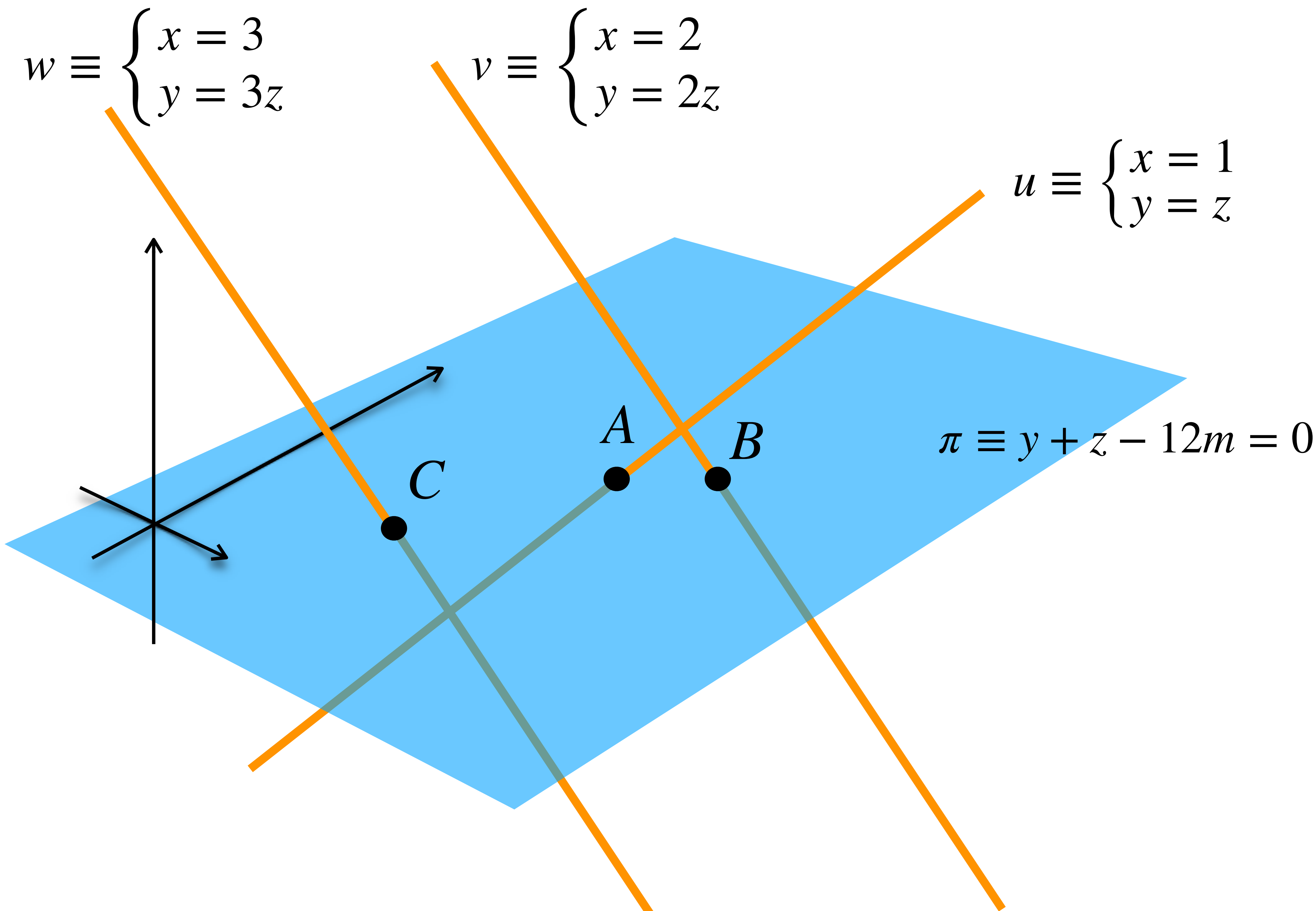
Sean A, B y C los puntos de inserción de π con u, v y w, respectivamente:

a) Calcular los puntos A, B y C en función de m
b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a.

JUNIO 2005

a) Calcular los puntos A, B y C en función de m

Nos han dado las rectas en forma implícita o cartesiana así que deberemos formar sistemas de ecuaciones entre las rectas y el plano π para encontrar los puntos de corte en función de m



$$A \equiv \pi \cap u \begin{cases} y + z - 12m = 0 \\ x = 1 \\ y = z \end{cases} \Longrightarrow z + z - 12m = 0 \Longrightarrow A(1,6m,6m)$$

$$2z = 12m$$

$$z = 6m$$

$$B \equiv \pi \cap v \begin{cases} y + z - 12m = 0 \\ x = 2 \\ y = 2z \end{cases} \Longrightarrow 2z + z - 12m = 0 \Longrightarrow B(2,8m,4m)$$

$$3z = 12m$$

$$z = 4m$$

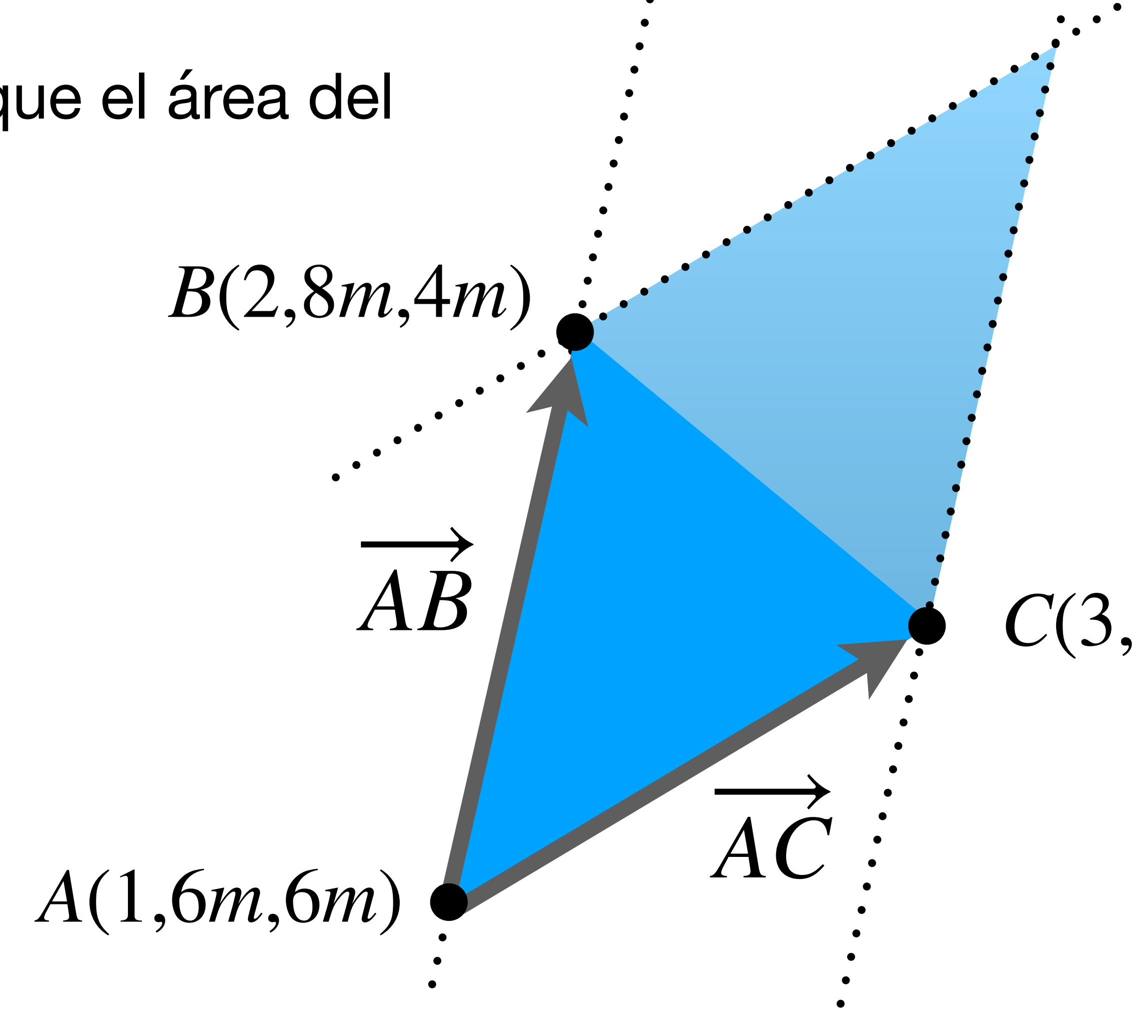
$$C \equiv \pi \cap w \begin{cases} y + z - 12m = 0 \\ x = 3 \\ y = 3z \end{cases} \Longrightarrow 3z + z - 12m = 0 \Longrightarrow C(3,9m,3m)$$

$$4z = 12m$$

$$z = 3m$$

JUNIO 2005

b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a.



El área del triángulo se obtiene fácilmente como la mitad del área del paralelogramo

$$\overrightarrow{AB} = (2-1,8m-6m,4m-6m) = (1,2m,-2m)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1,9m-6m,3m-6m) = (2,3m,-3m)$$

$$A_p = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2m & -2m \\ 3m & -3m \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2m \\ 2 & -3m \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2m \\ 2 & -3m \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - m\vec{j} - m\vec{k}$$

$$A_t = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (-m)^2 + (-m)^2}}{2} = \frac{\sqrt{2m^2}}{2}$$

JUNIO 2005

b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a.

$$A_t = 1$$

$$\frac{\sqrt{2m^2}}{2} = 1$$

$$\sqrt{m^2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\cancel{\sqrt{\vphantom{m}}}\,m^2\right)^{\cancel{2}} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$m^2 = \pm 2$$

$$\cancel{\sqrt{m^2}} = \pm\sqrt{\pm 2}$$

$$m = \pm\sqrt{2}$$

Cada vez que resolvemos una ecuación irracional elevamos al cuadrado en ambos términos

Una de las soluciones que obtenemos es positiva y la otra negativa.

El proceso de resolución puede obtener soluciones no válidas, por eso se han de comprobar con posterioridad

$$m = +\sqrt{2} \qquad\qquad m = -\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{2}\right)^2}}{2} = 1 \qquad\qquad \frac{\sqrt{2\left(-\sqrt{2}\right)^2}}{2} = 1$$

$$1 = 1 \qquad\qquad 1 = 1$$

Soluciones: $m = +\sqrt{2}$ $\quad m = -\sqrt{2}$