Teoría – Tema 9

Teoría - 13 - Posición relativa de dos rectas

Posiciones relativas si las rectas vienen dadas en forma paramétrica

Sea la recta r una recta dada en forma paramétrica, con vector director u_r y un punto $A \in r$.

Sea la recta s una segunda recta dada en forma paramétrica, con vector director u_s y un punto $B \in s$.

Y sea el vector $\vec{AB}$ que une los dos puntos anteriores.

Las posiciones relativas de estas dos rectas en el espacio tridimensional pueden ser:

- Coincidentes (ambas rectas son la misma recta, por lo que tienen infinitos puntos en común).
  - u_r y u_s son combinación lineal.
  - El vector $\vec{AB}$ también es combinación lineal de los vectores directores u_r y u_s
  - En la terna $\vec{u}_r$, $\vec{u}_s$, $\vec{AB}$ solo hay un vector linealmente independiente.
  - Por lo tanto: $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s, \ \vec{AB})=1$
- Paralelas (están contenidas en un mismo plano y no tienen puntos en común).
  - u_s y u_s son combinación lineal.
  - El vector $\vec{AB}$ no es combinación lineal de los vectores directores u_r y u_s .
  - Por lo tanto: $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s)=1$, $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s, \ \vec{AB})=2$
- Secantes (se cortan en un único punto).
  - u_r y u_s son linealmente independientes.
  - El vector $\vec{AB}$ es combinación lineal de los vectores directores u_r y u_s .
  - Por lo tanto: $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s)=2$, $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s, \ \vec{AB})=2$
- Cruzadas (no tienen puntos en común y no están contenidas en un mismo plano).
  - u_r y u_s son linealmente independientes.
  - El vector $\vec{AB}$ no es combinación lineal de los vectores directores u_r y u_s .
  - En la terna $\vec{u}_r$, $\vec{u}_s$, $\vec{AB}$ hay tres vectores linealmente independientes.
  - Por lo tanto: $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s, \ \vec{AB})=3$

Ejemplos de posiciones relativas de rectas en forma paramétrica

Ejemplo 1 resuelto

Estudiar las posiciones relativas del siguiente par de rectas.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4} \quad , \quad s:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1}$$

De la recta r obtenemos un punto y un vector director.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4} \rightarrow A(1,1,0) \quad , \quad \vec{u}_r=(2,3,4)$$

De la recta s también obtenemos un punto y un vector director.

$$s:\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z}{-1} \rightarrow B(0,2,0) \quad , \quad \vec{u}_s=(2,-3,-1)$$

Por lo que el vector que une a los puntos elegidos de cada recta será:

$$\vec{AB}=(-1,1,0)$$

Ya podemos estudiar el rango de la matriz formada por los vectores columnas $\vec{u}_r=(2,3,4)$, $\vec{u}_s=(2,-3,-1)$, $\vec{AB}=(-1,1,0)$.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |M|=0+8+3-(12-2+0)=1\neq 0 \rightarrow Rango(M)=3$$

Por lo tanto los tres vectores son linealmente independientes. **Nuestras rectas se cruzan**, sin ningún punto en común, y sin estar contenidas en un mismo plano.

Ejemplo 2 resuelto

Dadas las rectas r y s , determina el valor de a para que ambas rectas se corten en un punto. ¿Existe algún valor de a que haga que las rectas sean coincidentes?

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+a}{2}$$

$$s: \begin{Bmatrix} x=1+4\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=-4+5\lambda \end{Bmatrix}$$

De ambas rectas obtenemos un punto y un vector director.

$$r \rightarrow A(3,3,-a) \quad , \quad \vec{u}_r=(2,-1,2)$$

$$s \rightarrow B(1,-1,-4) \quad , \quad \vec{u}_s=(4,3,5)$$

Y el vector formado por los dos puntos obtenidos.

$$\vec{AB}=(-2,-4,-4+a)$$

Para que las rectas se corten en un punto los vectores directores deben ser linealmente independientes (la matriz que generen ambos vectores será de rango 2), y el vector $\vec{AB}$ debe ser linealmente dependiente de los vectores directores (la matriz que generen los tres vectores debe ser de rango 2).

¡¡Vamos a ello!!

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -4+a \end{pmatrix} \rightarrow |M|=6(-4+a)-32+10-(-12-40-4(-4+a))$$

$$|M|=-24+6a-22+52-16+4a=-10+10a$$

Si el determinante es nulo, el rango podría ser 2. Por lo tanto:

$$|M|=0 \rightarrow -10+10a=0 \rightarrow a=1$$

Si $a=1$ podemos encontrar un menor tal que $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=10\neq 0 \rightarrow Rango(M)=2$

Ahora debemos estudiar la matriz formada por los vectores directores. Es decir:

$V=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ → Existe un menor tal que $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=10\neq 0 \rightarrow Rango(V)=2$

Por lo tanto, **las rectas se cortan en un punto siempre y cuando** $a=1$.

¿Pueden ser coincidentes?

Imposible, ya que necesitaríamos que el rango de la matriz formada por los tres vectores $Rango(\vec{u}_r, \ \vec{u}_s, \ \vec{AB})=1$, y hemos comprobado que como mínimo el rango es 2.

Ejemplo 3 resuelto

Dadas las rectas r y s, determina el valor de a para que ambas rectas sean coincidentes.

$$r: \frac{x-2}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z+1}{2}$$

$$s: \frac{x-a}{10}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-2}{4}$$

De ambas rectas obtenemos un punto y un vector director.

$r \rightarrow A(2,0,-1)$, $\vec{u}_r=(5,6,2)$

$s \rightarrow B(a,-1,2)$, $\vec{u}_s=(10,12,4)$ → Podemos simplificar → $\vec{u}_s=(5,6,2)$

Y el vector formado por los dos puntos obtenidos.

$$\vec{AB}=(a-2,-1,3)$$

Para que las rectas sean coincidentes los vectores directores deben ser linealmente dependientes (la matriz que generen ambos vectores será de rango 1), y el vector $\vec{AB}$ debe ser también combinación lineal de uno de los vectores directores (la matriz que generen los tres vectores debe ser de rango 1).

$M=\begin{pmatrix} 5 & 5 & a-2 \\ 6 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |M|=0$ → El determinante es nulo por haber dos columnas iguales.

Para que $Rango(M)=1$ todos los menores de orden 2 deben ser nulos. Por lo tanto:

$$|\alpha_{21}|=\begin{vmatrix} 5 & a-2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=15+4-2a=0 \rightarrow a=\frac{19}{2}$$

$$|\alpha_{31}|=\begin{vmatrix} 5 & a-2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=-5+12-6a=0 \rightarrow a=\frac{7}{6}$$

¿Cómo interpretar estos resultados?

No hay ningún valor de a que anule todos los menores de orden 2. Por lo tanto, **ambas rectas nunca pueden ser coincidentes**.

Posiciones relativas si las rectas vienen dadas en forma implícita

Vamos a desarrollar un segundo procedimiento para estudiar la posición relativa de dos rectas. Lógicamente, elijamos el método que elijamos, debemos llegar a los mismos resultados. Si en los apartados anteriores teníamos las rectas en su forma paramétrica o cartesiana, donde es fácil obtener un punto y un vector director de las rectas, ahora vamos a tener las rectas en su forma general o implícita.

Siempre podemos optar por pasar todas las ecuaciones de la recta a forma paramétrica y aplicar el método de los apartados anteriores. Es una opción.

O bien pasar de paramétrica a implícita y usar lo que vamos a exponer ahora. Es otra opción.

O bien manejar con soltura sendos procedimientos de resolución para optimizar el tiempo de resolución de los ejercicios. ¡A gusto del consumidor!

Sea la recta r una recta dada en forma implícita.

$$r:\begin{Bmatrix} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{Bmatrix}$$

Sea la recta s una segunda recta dada también en forma implícita.

$$s:\begin{Bmatrix} A_3 x+B_3 y+C_3 z+D_3=0 \\ A_4 x+B_4 y+C_4 z+D_4=0 \end{Bmatrix}$$

Cada una de las cuatro ecuaciones arriba descritas representan planos en el espacio tridimensional. Por lo tanto, tenemos un sistema de 4 ecuaciones (cuatro planos) y 3 incógnitas. Las posibles soluciones de este sistema 4×3 nos informarán de las posiciones relativas del par de rectas.

$$\begin{Bmatrix} A_1 x+B_1 y+C_1 z=-D_1 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z=-D_2 \\ A_3 x+B_3 y+C_3 z=-D_3 \\ A_4 x+B_4 y+C_4 z=-D_4 \end{Bmatrix}$$ → Sistema formado por 4 planos y 3 incógnitas

Este sistema tiene asociado una matriz del sistema M y una matriz ampliada M/D .

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & -D_4 \end{array}\right)$$

- Si $Rango(M)=Rango(M/D)=2<3=número\ de\ incógnitas$ → Existen infinitos puntos solución, dependientes de un parámetro libre ($3-2=1$) → La solución es una recta → Rectas coincidentes.
- Si $Rango(M)=2\neq 3=Rango(M/D)$ → No existe solución → Rectas paralelas.
- Si $Rango(M)=Rango(M/D)=3=número\ de\ incógnitas$ → Solución única → Las rectas se cortan en un punto.
- Si $Rango(M)=3\neq 4=Rango(M/D)$ → No existe solución → Rectas cruzadas.

Ejemplo de posiciones relativas de rectas en forma implícita

Ejemplo 4 resuelto

Estudiar las posiciones relativas de las rectas r y s según los valores del parámetro a .

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y-z=1 \\ 2x-3y+2z=2 \end{matrix}\right\} \quad , \quad s:\left\{\begin{matrix} 2x-y+z=0 \\ 3x+2y+az=2 \end{matrix}\right\}$$

Los cuatro planos que aparecen en las dos ecuaciones paramétricas forman un sistema de ecuaciones 4×3 cuyas matrices del sistema y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada.

$$|M/D|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_2=F_2-F_4 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2-a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_4=F_4-2F_1$$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2-a & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a+2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow$ Desarrollamos por la columna 4 $\rightarrow$ $|M/D|=A_{14} \rightarrow$

$\rightarrow \quad |M/D|=A_{14}=-\begin{vmatrix} -1 & -5 & 2-a \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix}=-[10a+19] \rightarrow$ Si $|M/D|\neq0 \rightarrow Rango(M/D)=4 \rightarrow$

Anulamos el determinante para sacar valores de a $\rightarrow$ $10a+19=0$ $\rightarrow$ $a=\frac{-19}{10}$

Realizamos la siguiente discusión de casos.

- Si $a\neq\frac{-19}{10}$ $\rightarrow$ $Rango(M/D)=4$ $\rightarrow$ $Rango(M)=3$ ya que posee al menos un menor de orden 3 no nulo → Sistema incompatible → **Las rectas se cruzan**.

- Si $a=\frac{-19}{10}$ $\rightarrow$ $Rango(M/D)=3$ $\rightarrow$ $Rango(M)=3$ → Solución única → **Las rectas se cortan en un único punto**.