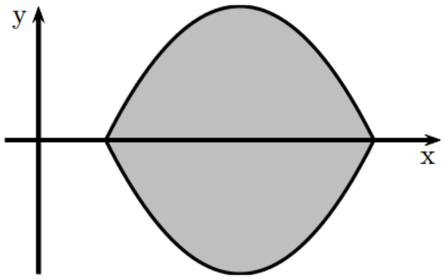
Aufgabe 1

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der sich ergibt, wenn der Funktionsgraph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

um die Abszisse (x-Achse) rotiert. Die linke und rechte Begrenzung des Körpers ergibt sich durch die Nullstellen der gegebenen Funktion $f(x)$.



Lösung:

Zunächst müssen die Nullstellen der Funktion bestimmt werden,

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= 0 \\
-x_0^2 + 6x_0 - 5 &= 0 \qquad | \cdot (-1) \\
x_0^2 - 6x_0 + 5 &= 0 \\
x_{01/2} &= 3 \pm \sqrt{9-5} \\
x_{01/2} &= 3 \pm 2 \\
x_{01} = 1 & \quad x_{02} = 5
\end{aligned}$$

Hiermit sind die Integrationsgrenzen bekannt, das Volumenintegral kann aufgestellt werden.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_1^5 x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 6x^3 + 36x^2 - 30x + 5x^2 - 30x + 25\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_1^5 x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + \frac{46}{3}x^3 - 30x^2 + 25x\right]_1^5 \\
&= \pi \cdot \left(\left[\frac{1}{5}\cdot 5^5 - 3\cdot 5^4 + \frac{46}{3}\cdot 5^3 - 30\cdot 5^2 + 25\cdot 5\right] - \left[\frac{1}{5}\cdot 1^5 - 3\cdot 1^4 + \frac{46}{3}\cdot 1^3 - 30\cdot 1^2 + 25\cdot 1\right]\right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{625}{15} - \frac{113}{15}\right) \\
&= \pi \cdot \frac{512}{15} \\
V &\approx 107{,}233
\end{aligned}$$

Das Volumen beträgt: $\boxed{V \approx 107{,}233\,\text{VE}}$