Herleitung

Die Zahl e (/allgemein/die-zahl-e.html) kann über verschiedene Methoden berechnet und hergeleitet werden. Eine der bekanntesten ist die Definition über einen Grenzwert. Demnach gilt: $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Dieser Grenzwert wird in leicht abgewandelter Form auch in diesem Beweis vorkommen.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\ln(x)\Big) &= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h} && (1)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right) && (2)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) && (3)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) && (4)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) && (5)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) && (6)\\
&= \frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\left(\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right) && (7)\\
&= \frac{1}{x}\cdot\ln\overbrace{\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right)}^{\text{Definition von e}} && (8)\\
&= \frac{1}{x}\cdot\overbrace{\ln(e)}^{1} && (9)\\
&= \frac{1}{x}\qquad\blacksquare && (10)
\end{aligned}
$$