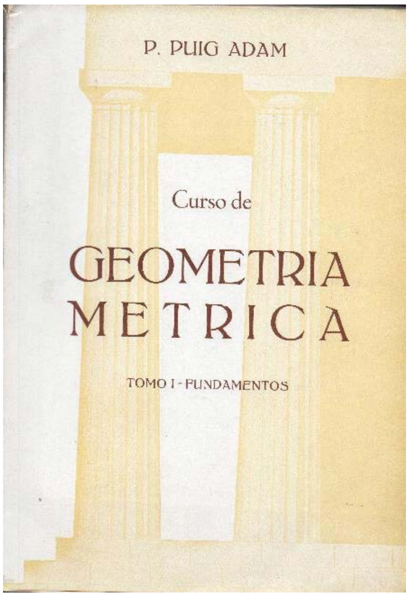
TEMA 7. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

1. INTRODUCCIÓN 2
2. ÁNGULOS Y DISTANCIAS EN EL PLANO 3
3. MEDIDA DE ÁNGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS 4
4. DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS. 10
5. MEDIA DE ÁREAS Y VOLUMENES 17
6. LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO 22

1. INTRODUCCIÓN

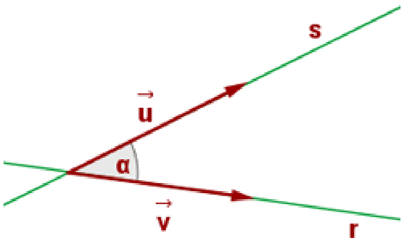
En el desarrollo de la geometría métrica, además de las aportaciones de **Monge** y sus discípulos, son los logros destacables la obtención de la fórmula para hallar la distancia de un punto a un plano (**Lagrange**) y la del volumen de un paralelepípedo (**Cauchy**).

El español **Pedro Puig Adam** (1900-1960), gran matemático y extraordinario didacta, fue autor de una Geometría Métrica que es un clásico de esta materia.

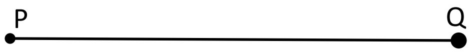


2. ÁNGULOS Y DISTANCIAS EN EL PLANO

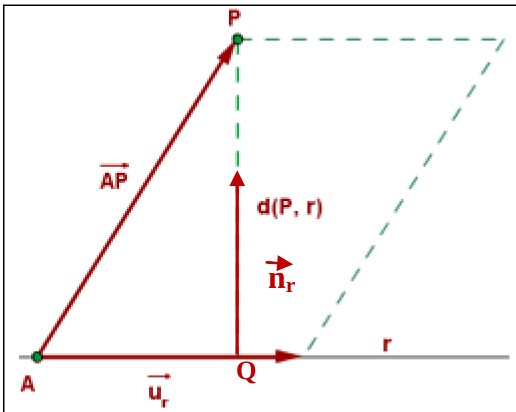
Ángulo entre dos rectas

	$\cos(\widehat{r,s}) = \dfrac{\lvert \vec{u}\cdot\vec{v} \rvert}{\lvert \vec{u} \rvert \cdot \lvert \vec{v} \rvert} = \dfrac{\lvert u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 \rvert}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

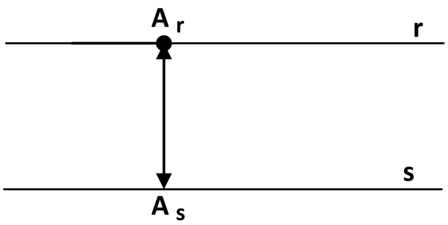
Distancia entre puntos

	$d(P;Q) = \lvert \overrightarrow{PQ} \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Distancia entre una recta y un punto

	Siendo la ecuación r, $r: ax + by + c = 0$ $d(P,r) = \dfrac{\lvert ax_1 + by_1 + c \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

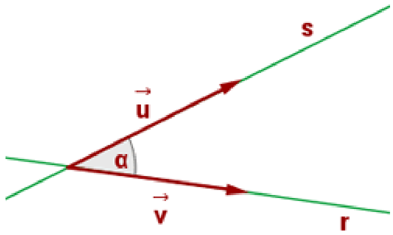
Distancia entre rectas

	Dadas dos rectas, r y s. Si son secantes: $d(r,s) = 0$ Si r y s son $\lVert$: $d(r,s) = d(A_r, s) = d(A_s, r)$

3. MEDIDA DE ÁNGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS

Ángulo entre dos rectas

El **ángulo que forman dos rectas** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores directores de las rectas.



$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$

$$\alpha(r,s) = \alpha\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arccos\frac{\left|u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3\right|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Dos rectas son **perpendiculares** si sus **vectores directores** son **ortogonales**.

$$r \perp s \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \qquad u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 + u_3\cdot v_3 = 0$$

Ejemplos

Hallar el **ángulo** que forman las **rectas**:

1.

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \qquad s \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\vec{u} = (2,1,1) \qquad \vec{v} = (-1,2,1)$$

$$\alpha(r,s) = \alpha\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arccos\frac{\left|2\cdot(-1)+1\cdot 2+1\cdot 1\right|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\widehat{r,s}\right) = \arccos\frac{1}{6} = 80.41^\circ$$

2.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 3x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k} \qquad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{u} = (5,-5,-5) \qquad \vec{v} = (2,11,5)$$

$$\alpha(r,s) = \alpha\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arccos\frac{\left|5\cdot 2 + (-5)\cdot 11 + (-5)\cdot 5\right|}{\sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-5)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 11^2 + 5^2}} = \frac{70}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{150}}$$

$$\left(\widehat{r,s}\right) = \arccos\frac{70}{75\cdot\sqrt{2}} = 48.70^\circ$$

3

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad s \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$$

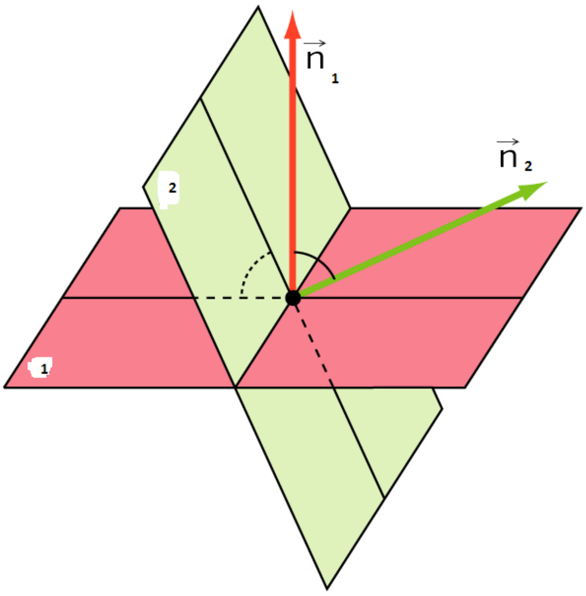
$$\vec{u} = (1,2,3) \qquad \vec{v} = (4,-1,-3)$$

$$\alpha(r,s) = \alpha\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \arccos\frac{\left|1\cdot 4 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-3)\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\cdot\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}}$$

$$\left(\widehat{r,s}\right) = \arccos\frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} = 68.48^\circ$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo** formado por **dos planos** es igual al ángulo agudo determinado por los vectores normales de dichos planos.



$\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1) \qquad \overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}$$

$$\alpha(\pi_1, \pi_2) = \alpha\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \text{arc cos}\,\frac{\left|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Dos planos son **perpendiculares** si **vectores normales** son **ortogonales**.

$\pi_1 \perp \pi_2 \qquad \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$

Ejemplo

Hallar el **ángulo** que forman los **planos**:

$\pi_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv x + z + 3 = 0$

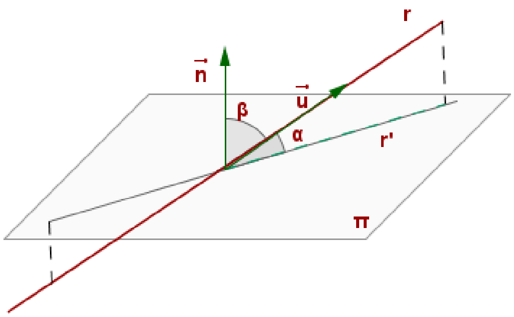
$\overrightarrow{n_1} = (2, -1, 1) \qquad \overrightarrow{n_2} = (1, 0, 1)$

$$\alpha(\pi_1,\pi_2)=\alpha\left(\vec{n_1},\vec{n_2}\right)=\text{arc cos}\frac{\left|2\cdot 1+(-1)\cdot 0+1\cdot 1\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\left(\widehat{\pi_1,\pi_2}\right)=\text{arc cos}\frac{\sqrt{3}}{2}=30^{\circ}$$

Ángulo entre una recta y un plano

El **ángulo** que forman una **recta**, r, y un **plano**, π, es el ángulo formado por r con su proyección ortogonal sobre π, r'.



El **ángulo** que forman una **recta** y un **plano** es igual al **complementario** del **ángulo agudo** que forman el **vector director** de la recta y el **vector normal** del plano.

$$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \qquad \vec{n}=(A,B,C)$$

$$sen\,\alpha=cos\,\beta=cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|}$$

$$\alpha=arc\ sen\frac{\left|A\cdot u_1+B\cdot u_2+C\cdot u_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}}$$

Si la recta r y el plano π son perpendiculares, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen la misma dirección y, por tanto, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{u_1}{A}=\frac{u_2}{B}=\frac{u_3}{C}$$

Ejemplos

1. Determinar el **ángulo** que forman la **recta** $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ y el **plano** $\pi \equiv x + y - 1 = 0$.

$$\vec{u} = (2,1,2) \qquad \vec{n} = (1,1,0)$$

$$sen\,\alpha = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}$$

$$\alpha = arc\ sen\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^{\circ}$$

2. Hallar el **ángulo** que forman la **recta** $r \equiv \begin{cases} x + 3y - z + 3 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y el **plano** $\pi \equiv 2x - y + 3z + 1 = 0$.

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\vec{u} = (-4,-1,-7) \qquad \vec{n} = (2,-1,3)$$

$$sen\,\alpha = \frac{|-4\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + (-7)\cdot 3|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{28}{\sqrt{66}\cdot\sqrt{14}}$$

$$\alpha = arc\ sen\,\frac{14}{\sqrt{231}} = 22.91^{\circ}$$

3. Obtener el **ángulo** formado por el **plano** y la **recta** siguientes:

$$\pi \equiv x = 1 \qquad r \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

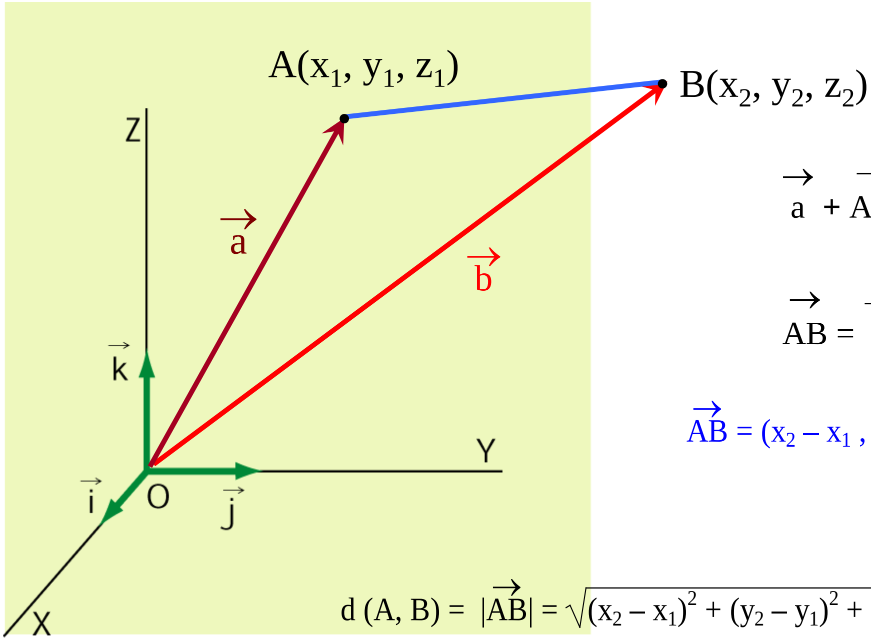
$$r \equiv \begin{cases} x = \sqrt{3}\lambda \\ y = 2 \\ z = 3\lambda \end{cases} \qquad \vec{u}_r = \left(\sqrt{3}, 0, 3\right) \quad \vec{n} = (1, 0, 0)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot 0\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2 + 3^2}\cdot\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = arc\ sen\,\frac{1}{2} = 30^{\circ}$$

4. DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS.

Distancia entre puntos



$\vec{a} + \vec{AB} = \vec{b}$

$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

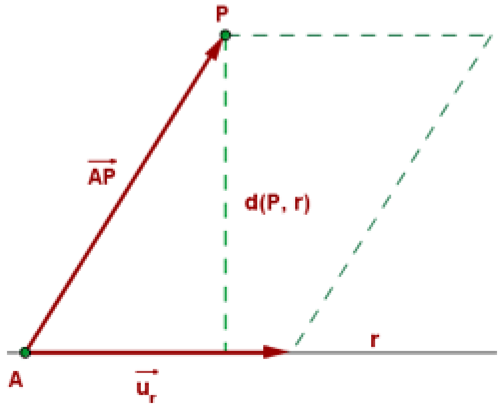
$\vec{AB} = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Distancia entre un punto y una recta

La **distancia de un punto**, P, **a una recta**, r, es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos de la recta.

Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto hasta la recta**.



$$Área\ del\ paralelogramo = base \times h \rightarrow h = \frac{Área\ del\ paralelogramo}{base}$$

$$h = d(P,r) = \frac{\left|\vec{AP} \times \vec{u_r}\right|}{\left|\vec{u_r}\right|}$$

Ejemplos

1. Hallar la **distancia** desde el **punto** P(1, 3, −2) a la **recta**

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

$$\vec{AP} = (1-2, 3+1, -2-1) = (-1, 4, -3) \qquad \vec{u_r} = (3, 1, -2)$$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 11\vec{j} + 13\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{5^2 + 11^2 + 13^2} = 3\sqrt{35} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$$

$$d(P, r) = \frac{3\sqrt{35}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

2. Hallar la **distancia** desde el **punto** P(1, 2, 3) a la **recta**

$$r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}.$$

$$A(2,3,4) \qquad \overrightarrow{AP} = (1-2, 2-3, 3-4) = (-1,-1,-1) \qquad \vec{u}_r = (4,4,2)$$

$$\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\left|\vec{u}_r \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8} \qquad \left|\vec{u}_r\right| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$$

$$d(P, r) = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Distancia de un punto a un plano

La **distancia** de un **punto**, P, a un **plano**, π, es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos del plano.

Esta distancia corresponde a la **perpendicular trazada desde el punto al plano**.

$$P(x_0, y_0, z_0) \qquad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

1. Hallar la distancia del punto P(3, 1, −2) a los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2y - 3 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

2. Hallar la distancia del punto Q(5, 5, 3) al plano $\pi \equiv (x, y, z) = (0, 0, -4) + (2, 2, -1)\lambda + (-3, 2, 0)\mu$.

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ y & 2 & 2 \\ z+4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad 2x + 3y + 10z + 40 = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 40|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{113}}$$

Distancia de una recta al plano

Dada la recta r y el plano π

- Si la recta y el plano se cortan → la distancia es cero
- Si no se cortan (la recta r y el plano son paralelos o la recta en el plano)
  - o $d(r,\pi) = di(P,\pi), P \in r$

Distan entre planos paralelos

Para calcular la **distancia entre dos planos paralelos**, se halla la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

También se puede calcular de esta otra forma:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \qquad \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

1. Calcular la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 5 = 0$ y $\pi_2 \equiv 4x - 2y - 4z + 15 = 0$.

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{15}$$

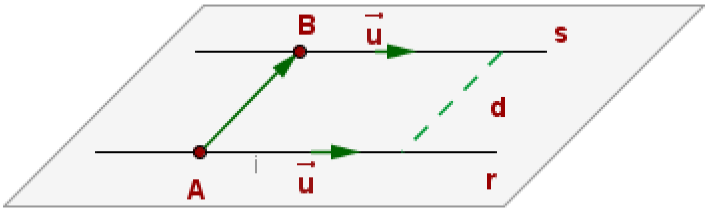
Los dos planos son paralelos.

Transformamos la ecuación del segundo plano para que los dos planos tengan el mismo vector normal.

$$\pi_2 \equiv 2x - y - 2z + \frac{15}{2} = 0 \qquad \rightarrow \qquad d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left|\frac{15}{2} - 5\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{6}$$

Distancia entre dos rectas paralelas

La **distancia de una recta**, r, a **otra paralela**, s, es la distancia desde un punto cualquiera de r a s.

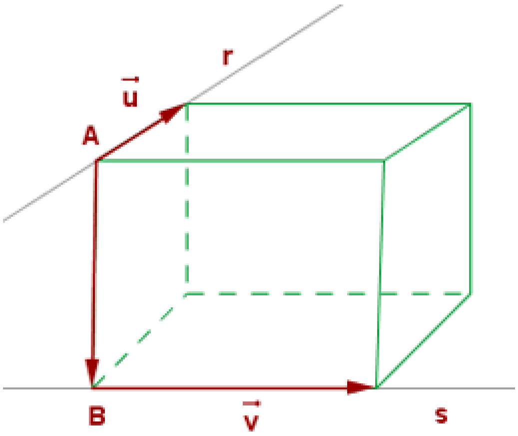


$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

La **distancia entre dos sectas que se cruzan** se mide sobre la **perpendicular común**.

Sean $(A,\vec{u})$ y $(B,\vec{v})$ las determinaciones lineales de las rectas r y s.



Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan **paralelepípedo** cuya **altura** es la **distancia entre las dos rectas**.

El volumen de un paralelepípedo es $V = A_b \cdot h$.

Teniendo en cuenta el volumen es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores y el área de la base es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas, la altura, es decir, la distancia entre los dos puntos es igual a:

$$d(r,s) = h = \frac{V}{A_b} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

Ejemplo

Hallar la mínima **distancia entre las rectas**:

$$r \equiv \frac{x+8}{2} = \frac{y-10}{3} = \frac{z-6}{1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$A(-8,10,6) \qquad \vec{u} = (2,3,1)$

$\overrightarrow{AB} = (9,-9,-5)$

$B(1,1,1) \qquad \vec{v} = (-1,2,4)$

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right| = \left\|\begin{matrix} 9 & -9 & -5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix}\right\| = 136$$

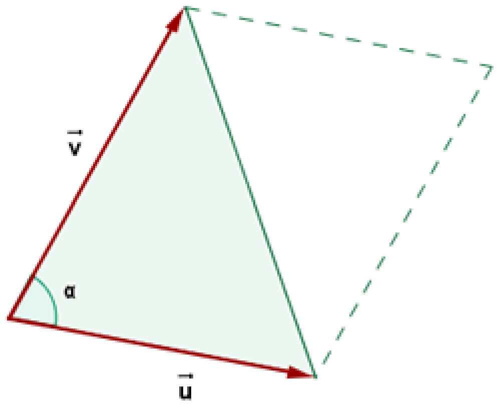
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 9\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A_b = \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{10^2 - 9^2 + 7^2} = \sqrt{230}$$

$$h = \frac{136}{\sqrt{230}} = \frac{68\sqrt{230}}{115}$$

5. MEDIA DE ÁREAS Y VOLUMENES

Área de un triángulo



$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$$

Ejemplo

Determinar el **área del triángulo** cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, −1, 5) y C(−3, 3, 1).

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

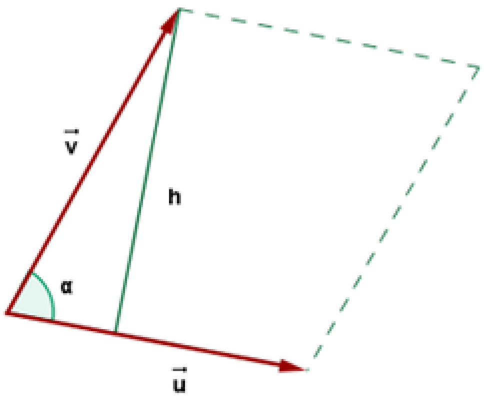
$$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}\, u^2$$

Área del paralelogramo

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}\,\alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$



Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

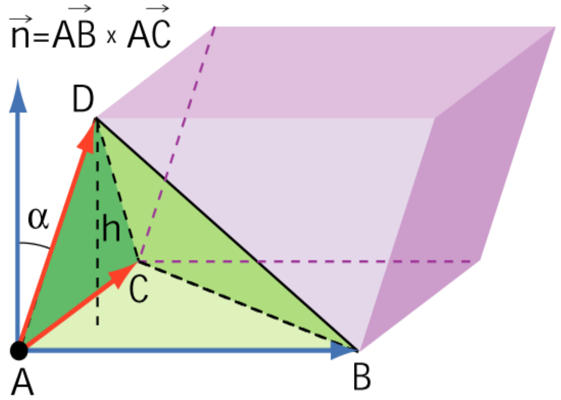
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\,u^2$$

Volumen de un tetraedro

El **volumen de un tetraedro** es igual a **1/6 del producto mixto**, en valor absoluto.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



$$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot altura$$

$$A_{base} = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| \qquad altura = h = \left|\vec{AD}\right| \cdot \cos\left(\vec{AD}, h\right)$$

Por tanto:

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|\left|\vec{AD}\right| \cdot \cos\left(\vec{AD}, h\right) = \frac{1}{6}\left|\vec{AD} \cdot \left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right]\right|$$

Ejemplo

Obtener el **volumen del tetraedro** cuyos vértices son los puntos A(3, 2, 1), B(1, 2, 4), C(4, 0, 3) y D(1, 1, 7).

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 4-1) = (-2, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4-3, 0-2, 3-1) = (1, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1-3, 1-2, 7-1) = (-2, -1, 6)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right|$$

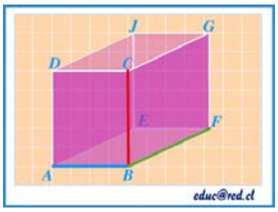
$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 12 - 4 = 5$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 5 = \frac{5}{6} u^3$$

Volumen del paralelepípedo

Geométricamente, el valor absoluto del **producto mixto** representa el **volumen del paralelepípedo** cuyas aristas son tres vectores que concurren en un mismo vértice.

$$\text{Volumen}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]\right|$$



Ejemplo

Hallar el **volumen del paralelepípedo** formado por los vectores:

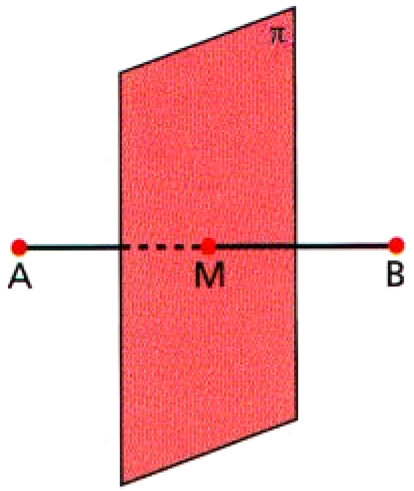
$$\vec{u}=(3,-2,5)\quad \vec{v}=(2,2,-1)\quad w=(-4,3,2)$$

$$V=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}3 & -2 & 5\\ 2 & 2 & -1\\ -4 & 3 & 2\end{vmatrix}=91u^3$$

6. LUGARES GEOMÉTRICOS EN EL ESPACIO

Plano mediador

Se llama plano mediador de un segmento al perpendicular a él en su punto medio. Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los extremos del segmento:



$$d(A,M) = d(M,B)$$

Ejemplo

Consideremos dos puntos del espacio, por ejemplo A(1,2,3) y B(3,-5,6). Vamos a tratar de hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de estos dos puntos.

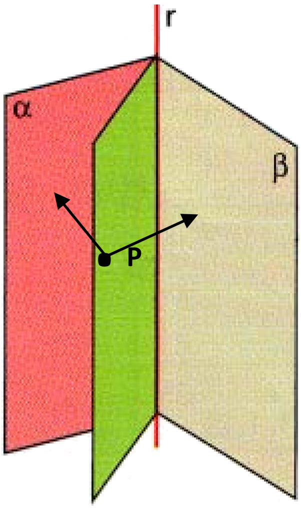
Sea P(x, y, z) un punto cualquiera de dicho luga r(PLANO MEDIADOR). Se verifica: d(P, A) = d(P, B), es decir

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2+(x-6)^2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando se llega a $2x - 7y + 3z = 28$

Plano bisector

Semiplano bisector es el que divide a un ángulo diedro en dos iguales. Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los semiplanos que forman el ángulo diedro:



$$d(P,\alpha) = d(P,\beta)$$

Ejemplo

Consideremos dos planos que se cortan; sean, por ejemplo:

α: $3x+2y+z=6$ y β:$x+y+2z=3$

Vamos a hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de estos dos planos.

Sea P(x, y, z) un punto de dicho lugar, entonces se verifica d(P,α) = d(P,β).

$$\frac{|3x+2y+z-6|}{\sqrt{14}}=\frac{|x+y+2z-3|}{\sqrt{6}}$$

de donde

- $\dfrac{3x+2y+z-6}{\sqrt{14}}=\dfrac{x+y+2z-3}{\sqrt{6}}$
- $\dfrac{3x+2y+z-6}{\sqrt{14}}=-\dfrac{x+y+2z-3}{\sqrt{6}}$

Estos dos planos dividen al ángulo diedro que forman los planos dados en dos partes iguales, y se llaman planos bisectores.

Esfera

La superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al centro, Q, es una constante, r.

Los puntos $X=(x,y,z)$de una superficie de centro $Q=(x_0,y_0,z_0)$y radio r cumplen la siguiente condición:

$$\left|\overrightarrow{QX}\right|=r$$

Entonces:

$$\overrightarrow{QX}=X-Q=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

$$\left|\overrightarrow{QX}\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

Y como $\left|\overrightarrow{QX}\right|=r$, entonces

$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=r$, elevando al cuadrado ambos términos, nos queda

Ecuación reducida de la esfera.
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

$$x^2-2xx_0+(x_0)^2+y^2-2yy_0+(y_0)^2+z^2-2zz_0+(z_0)^2=r^2$$
$$x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0-2zz_0+(x_0)^2+(y_0)+(z_0)^2=r^2$$
$$x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0-2zz_0+(x_0)^2+(y_0)+(z_0)^2-r^2=0$$

$$A=-2x_0,B=-2y_0,C=-2z_0,D=(x_0)^2+(y_0)+(z_0)^2-r$$

$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ **Ecuación desarrollada de la esfera.**

A partir de la ecuación desarrollada de la esfera tenemos una esfera de:

$$centro=\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{C}{2}\right)$$
$$radio=\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2+\left(\frac{C}{2}\right)^2-D}$$

Elipsoides.

Se llama **elipsoide** en el espacio, al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F y F', es constante. Un **balón de rugby** o una **lenteja** lo son.

$$d(X,F)+d(X,F')=k$$

Hiperboloides

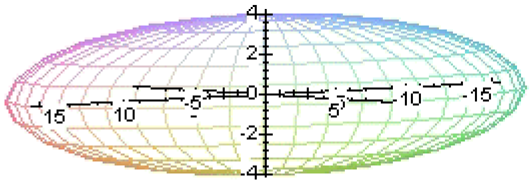
Se llama **hiperboloide** en el espacio, al lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, F y F', es constante.

$$d(X,F)-d(X,F')=k$$

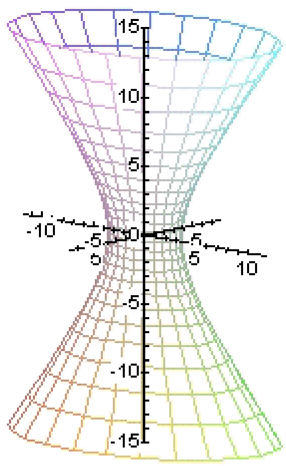
Paraboloides

Se llama **paraboloide** en el espacio, al lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo, F, y de un plano fijo, π.

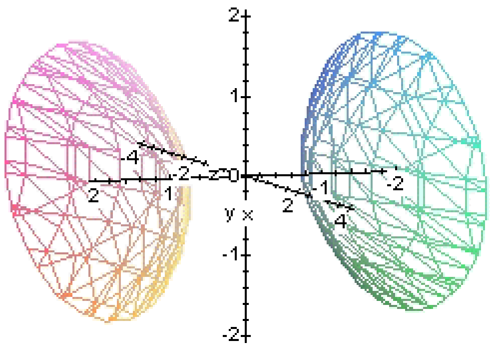
Ejemplos



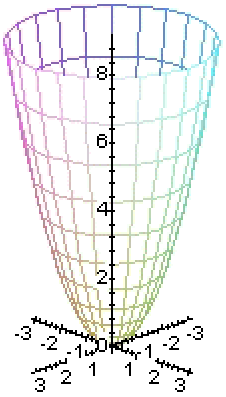
elipsoide

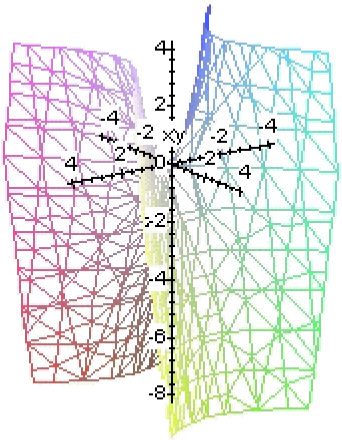


hiperboloide hiperbólico



hiperboloide elíptico





paraboloide elíptico **paraboloide hiperbólico**

Ejemplos reales

Central nuclear de Cofrentes. **Hiperboloide hiperbólico**

Sagrada Familia, bóveda central con forma de **hiperboloide** de una hoja