DOCUMENTS PROFESSEUR – UN RECTANGLE BIEN PRECIS

CONTENUS MATHEMATIQUES	
On souhaite construire un rectangle ABCD dont la longueur AB soit égale au double de la largeur BC. Mais on souhaite aussi que les diagonales de ce rectangle mesurent exactement 10 cm.	
6 - 5	Définition du rectangle Géométrie dynamique et géométrie instrumentée
4 - 3	Définition du rectangle Géométrie dynamique et géométrie instrumentée Propriété de Pythagore, statut de valeur exacte ou approchée d'une mesure
3 - 2	Définition du rectangle Géométrie dynamique Propriété de Pythagore, mise en équation Résolution d'une équation du type $ax^2 = b$ Calcul d'aire, valeur exacte d'un calcul impliquant une racine carrée
On souhaite construire un rectangle ABCD dont la longueur AB mesure 5 cm de plus que la largeur BC. Mais on souhaite aussi que les diagonales de ce rectangle mesurent exactement 10 cm.	
1 Spé	Définition du rectangle Géométrie dynamique Propriété de Pythagore, mise en équation Résolution d'une équation du second degré

SOLUTIONS

6^e - 5^e

► La recherche sur GeoGebra montre que lorsque AC ≈ 10 cm, on a AB ≈ 8,95 cm et amène à construire un rectangle de longueur 9 cm, à 1 mm près.

4^e - 3^e

► La recherche sur GeoGebra montre que lorsque AC ≈ 10 cm, on a AB ≈ 8,95 cm et BC ≈ 4,47 cm.

► Vérifions si, avec ces dimensions, le triangle ABC est parfaitement rectangle :

$AC^2 = 10^2$ et $AB^2 + BC^2 = 8{,}95^2 + 4{,}47^2 = 80{,}1025 + 19{,}9809 = 100{,}0834$

On constate que $AB^2 + BC^2$ n'est pas égal à AC^2. Un triangle ABC construit avec ces dimensions n'est donc pas vraiment rectangle. Par conséquent, les longueurs obtenues sur GeoGebra ne sont que des valeurs approchées des dimensions exactes.

3^e - 2^e

► La recherche sur GeoGebra montre que lorsque AC ≈ 10 cm, on a AB ≈ 8,95 cm et BC ≈ 4,47 cm.

► Nommons x la largeur BC de ce rectangle.

On a alors AB = $2x$.

Et, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABC, $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Donc $(2x)^2 + x^2 = 10^2$

Soit $5x^2 = 100$ et donc, sachant que x est un nombre positif, $x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Les dimensions exactes du rectangle sont BC = $2\sqrt{5}$ cm et AB = $4\sqrt{5}$ cm.

► $AB \times BC = 8(\sqrt{5})^2 = 40$

L'aire exacte de ce rectangle est de 40 cm².

$1^{ère}$

► La recherche sur GeoGebra montre que lorsque AC ≈ 10 cm, on a AB ≈ 9,11 cm et BC ≈ 4,11 cm.

► Nommons x la longueur AB de ce rectangle.

On a alors BC = $x - 5$.

Et, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABC, $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Donc $x^2 + (x - 5)^2 = 10^2$

Soit $2x^2 - 10x - 75 = 0$.

► Le discriminant de cette équation est $\Delta = 700$ et donc cette équation possède deux solutions, dont une seule est positive :

$x = \dfrac{10+10\sqrt{7}}{4} = \dfrac{5(1+\sqrt{7})}{2}$. On a alors $x - 5 = \dfrac{5(1+\sqrt{7})}{2} - 5 = \dfrac{5(\sqrt{7}-1)}{2}$

Les dimensions exactes du rectangle sont donc : AB = $\dfrac{5(\sqrt{7}+1)}{2}$ cm et BC = $\dfrac{5(\sqrt{7}-1)}{2}$ cm.

irem Rouen