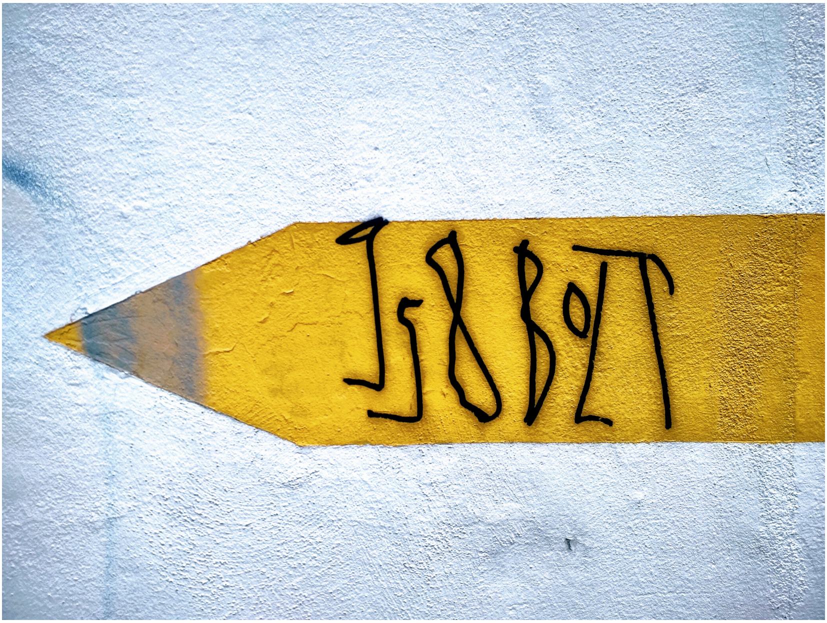
ODVOZENÍ VZORCE PRO DRÁHU RZPP

Žán Pól Kastról



23. října 2021

1 Odvození přes plochu pod grafem rychlosti

Vyjdeme z obrázku 1a, kde vidíme graf závislosti rychlosti na čase pro $\mathcal{RPP}$ pro časový interval od nuly do nějakého nenulového okamžiku t. Grafem je úsečka rovnoběžná s časovou osou, protože rychlost $\mathcal{RPP}$ je konstantní. V obrázku je zeleně vyznačena **plocha pod grafem rychlosti**, jejíž obsah $S_\square$ je zřejmě roven obsahu obdélníka o stranách v a t. Číselně (nikoliv jednotkově – plocha má jednotky m^2, kdežto součin $v \cdot t$ má jednotky $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$) tedy platí:

$$\boxed{S_\square = v \cdot t} \tag{1}$$

Víme, že pro **dráhu** $\mathcal{RPP}$ platí vztah:

$$\boxed{s(t) = v \cdot t} \tag{2}$$

Srovnáním (1) a (2) dostáváme důležitý výsledek:

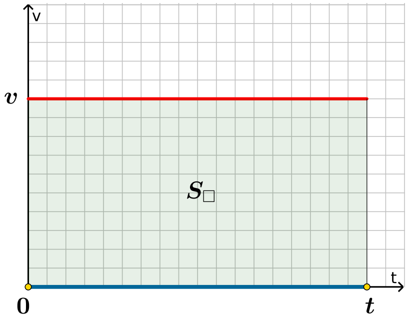
> Obsah plochy $S_\square$ pod grafem **rychlosti** $\mathcal{RPP}$ je číselně roven uražené dráze.

Nyní tento výsledek zobecníme pro **libovolný pohyb** – tedy i pro pohyb s nekonstantní velikostí rychlosti, tj. pohyb nerovnoměrný (viz obr. 1b):

> Obsah plochy $S_\heartsuit$ pod grafem **rychlosti libovolného pohybu** je číselně roven uražené dráze.

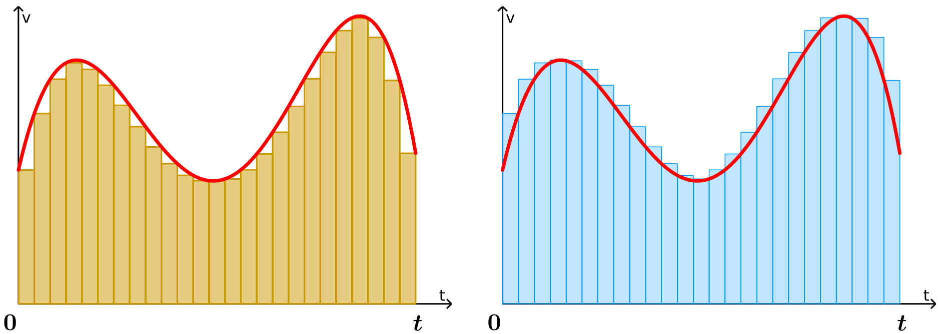
Náznak odvození – viz obr.2 + aplet v GeoGebře v popisku obrázku.

Tuto fantasmagorickou poučku si krástně můžeme procvičit v generátoru příkladů v GeoGebře (viz obr.3).



(a) $v = konst$ (b) $v \neq konst$

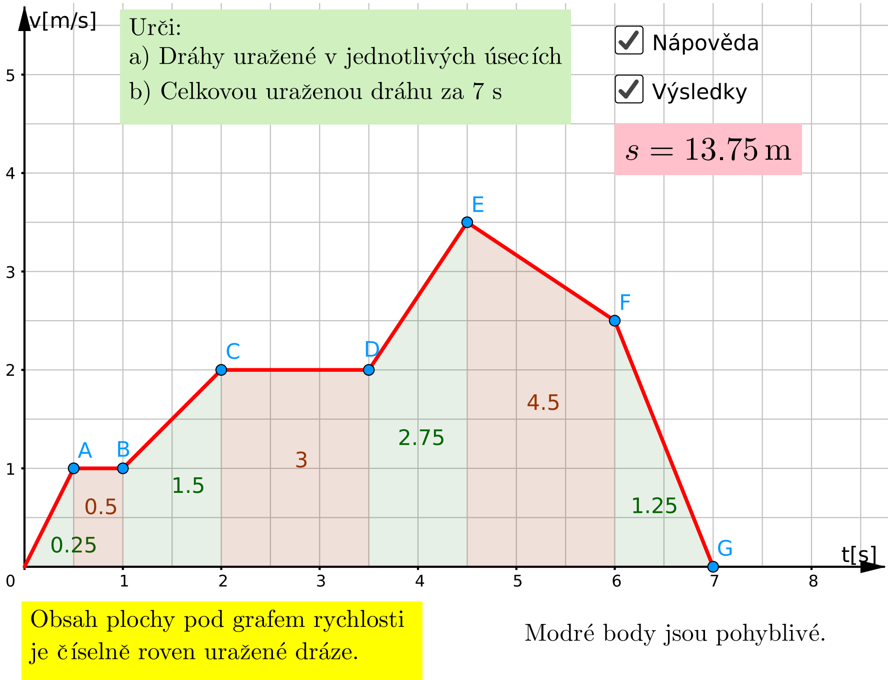
Obr. 1: Plocha pod grafem rychlosti je číselně rovna uražené dráze.



(a) Dolní součet (b) Horní součet

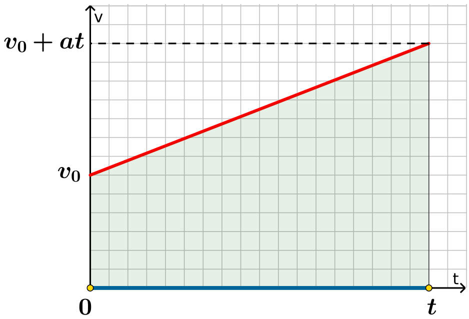
Obr. 2: Myšlenka odvození obecné poučky o ploše pod grafem rychlosti. Náhrada zrychleného pohybu pohybem rovnoměrným v jednotlivých nudličkách.

https://www.geogebra.org/m/qfvu7vze

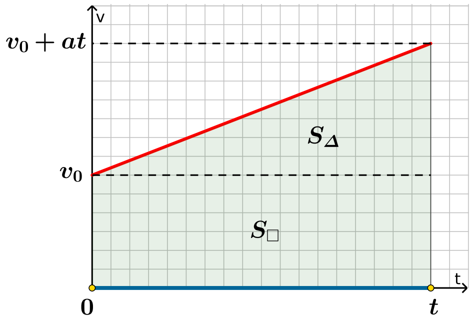


Obr. 3: Generátor příkladů na výpočet dráhy z grafu rychlosti.

https://www.geogebra.org/m/Zd5cnZER



(a) $v(t) = v_0 + at$



(b) $S = S_\Box + S_\Delta$

Obr. 4: Dráha $\mathcal{RZPP}$ je číselně rovna ploše lichoběžníka.

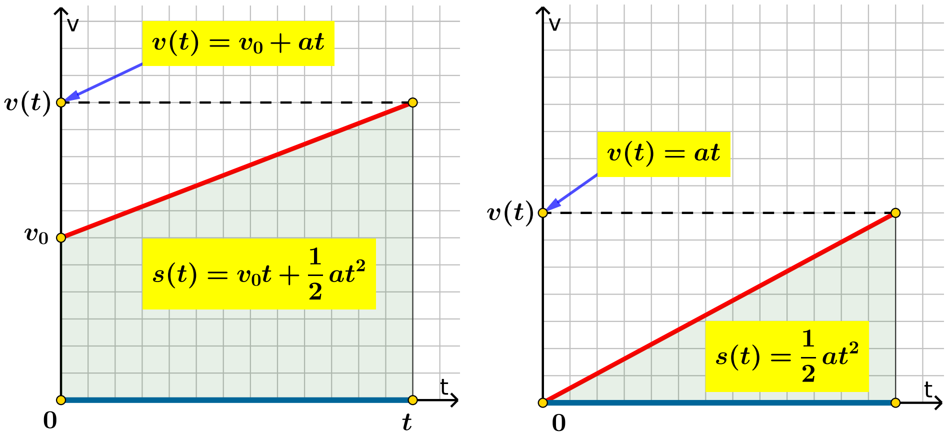
https://www.geogebra.org/m/xj9cqunv

Teď můžeme naši poučku o ploše aplikovat na speciální případ nerovnoměrného pohybu, o který nám jde – na $\mathcal{RZPP}$ s počáteční rychlostí žv_0. Grafem závislosti dráhy na čase je v tomto případě **přímka** a jde tedy o určení obsahu *lichoběžníka* (viz obr.4a). Lichoběžník si rozdělíme na **obdélník** a **trojúhelník** (obr.4b).

- **Obdélník** má zřejmě obsah $S_\Box = v_0 \cdot t$.
- **Trojúhelník** je pravoúhlý s odvěsnami t a $a \cdot t$, takže jsho obsah je $S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$.
- Celková plocha **lichoběžníka** je tedy $S = S_\Box + S_\Delta = v_0 \cdot t + \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$.

Dráha, kterou těleso urazí za dobu t pohybem $\mathcal{RZPP}$ je tedy dána vztahem:

$$\boxed{s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{(dráha } \mathcal{RZPP} \text{ s nenulovou } v_0\text{)}} \tag{3}$$



(a) (b)

Obr. 5: Srovnání vztahů pro rychlost a dráhu $\mathcal{RZPP}$ pro $v_0 \neq 0$ a $v_0 = 0$.

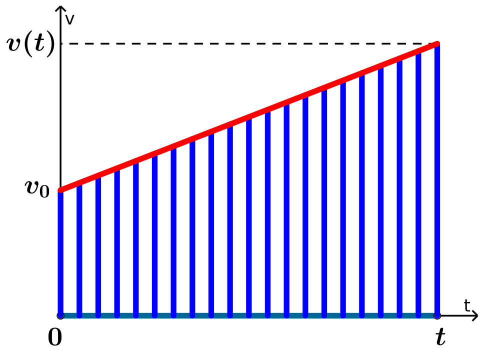
Rozbor vztahu (3)**:** Vidíme, že dráha je tvořena dvěma členy. První představuje zřejmě dráhu rovnoměrného pohybu s konstantní rychlostí v_0. Druhý je příspěvek k této dráze způsobený zrychlováním.

Speciální případy vzorce:

- Pro ($v_0 \neq 0$; $a = 0$) dostáváme samolitr vzorec pro pohyb rovnoměrný $s(t) = v_0 t$.
- Pro ($v_0 = 0$; $a \neq 0$) dostáváme jednodušší podobu vztahu pro dráhu:

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{(dráha } \mathcal{RZPP} \text{ s nulovou } v_0\text{)}} \tag{4}$$

Srovnání vztahů (3) a (4) máme krástně vyobrazeno v obr.5.



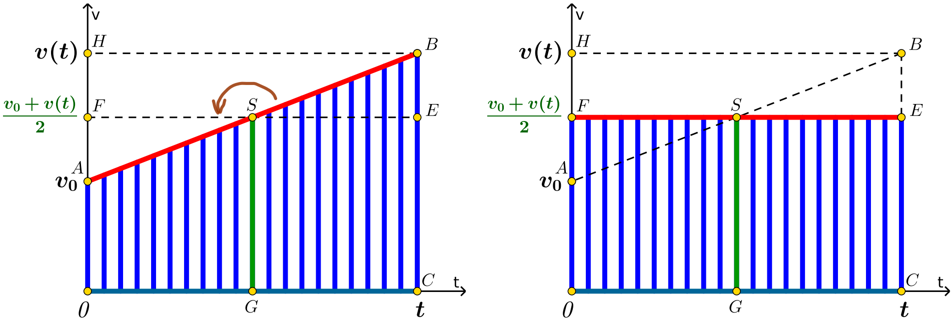
Obr. 6: Modré tyčky představují jednotlivé rychlosti, které se za dobu t objeví na tachometru auta. (Samozřejmě jich můžeme vyznačit jen konečný počet, ve skutečnosti jich je však nekonečně mnoho.) Každou z těchto **nekonečně mnoha** rychlostí jede auto **nekonečně krátkou** dobu dt, tedy všemi jede **stejně dlouho**. Všechny rychlosti mají tedy **stejnou váhu** a průměrnou rychlost můžeme spočítat jako jejich aritmetický průměr.

2 Odvození přes průměrnou rychlost

Ól rait. Budu uvažovat takto. Fáro A začne zrychlovat z rychlosti v_0 a po čase t dosáhne rychlosti $v(t) = v_0 + at$. Jakou urazí dráhu? Stejnou, jako auto B, které by jelo celou dobu t konstantní rychlostí rovnou **průměrné rychlosti** auta A. Tato dráha je tedy dána vzorcem pro dráhu rovnoměrného pohybu:

$$\boxed{s_{\mathcal{RZPP}} = v_p \cdot t} \tag{5}$$

Průměrná rychlost $\mathcal{RZPP}$: Vzniká otázka, jak zjistit průměrnou rychlost $\mathcal{RZPP}$? Víme, že průměrná rychlost obecně není rovna aritmetickému průměru rychlostí, ale váženému průměru. Nicméně pokud mají všechny rychlosti **stejnou váhu** – tedy pokud jimi jede fáro stejnou dobu, potom aritmetický průměr můžeme použít. A to je naštěstí v našem případě splněno (viz popis u obr.6).



(a) Lichoběžník přeměníme...

(b) ... na obdélník

Obr. 7: Určení aritmetického průměru 21 tyček s rovnoměrně se zvětšujícími délkami.

https://www.geogebra.org/m/ftndc2uh

Proto získáme průměrnou rychlost jako aritmetický průměr jednotlivých rychlostí:

$$\boxed{v_p = \bar{v}} \tag{6}$$

Aritmetický průměr rychlostí: Další otázkou ale je, jak udělat aritmetický průměr z nekonečně mnoha hodnot, kterými rychlost fára na nějakém časovém úseku prochází. Budeme snad muset sčítat nekonečně mnoho hodnot a dělit to nekonečnem? Naštěstí to lze obejít geniální fintou.

Vezměme nejprve konečný počet rychlostí. V obrázku obr.7a je vyznačeno 21 modrých tyček – rychlostí, jejichž aritmetický průměr je roven jejich součtu vydělenému 21. Výpočet součtu rychlostí si nyní **usnadníme**. Vezmeme střed S úsečky AB a otočíme kolem něj trojúhelník SEB o 180°. Tím se lichoběžník $AOCB$ z obrázku 7a změní na obdélník $FOCE$. O co se zkrátily délky modrých tyček vpravo od centrální zelené tyčky SG, o to se prodloužily délky modrých tyček vlevo od SG. Celkový součet délek tyček (rychlostí) se tím tedy nezměnil. Součet délek všech 21 tyček je tedy $21 \cdot |SG|$. Ale délka tyčky SG je zřejmě rovna aritmetickému průměru délek nejkratší (AO) a nejdelší (BC) tyčky. Součet délek všech 21 tyček je tedy

$$21 \cdot \frac{|AO| + |BC|}{2}$$

a průměrná délka jedné tyčky je

$$\frac{\cancel{21} \cdot \frac{|AO| + |BC|}{2}}{\cancel{21}} = \frac{|AO| + |BC|}{2}$$

Povšimněme si, že průměrná délka tyčky vůbec nezávisí na počtu tyček (měli jsme jich 21), protože ten se ve výpočtu **vykrátí**. Proto můžeme v mysli počet tyček zvyšovat libovolně až do nekonečna, ale průměrná délka bude stále rovna aritmetickému průměru délek krajních tyček[1]!

Přitom fysikálně je $|AO| = v_0$ a $|BC| = v(t)$, takže pro průměrnou rychlost $\mathcal{RZPP}$ dostáváme

$$\boxed{v_p = \frac{v_0 + v(t)}{2} \quad \text{(průměrná rychlost } \mathcal{RZPP}\text{)}} \tag{7}$$

kde $v(0)$ je počáteční a $v(t)$ je koncová rychlost. Slovně:

[1]

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot \frac{|AO| + |BC|}{2}}{n} = \frac{|AO| + |BC|}{2}$$

Průměrná rychlost $\mathcal{RZPP}$ je rovna *aritmetickému průměru* počáteční a koncové rychlosti.

Pro rychlost $\mathcal{RZPP}$ platí $v(t) = v_0 + at$, což dosadíme do vztahu (7):

$$v_P = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = \frac{2v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2} \tag{8}$$

Potom dle (5) dostáváme pro dráhu $\mathcal{RZPP}$:

$$s_{\mathcal{RZPP}} = v_p \cdot t = \left(v_0 + \frac{at}{2}\right) \cdot t$$

a po roznásobení máme:

$$\boxed{s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

což je přesně vztah (3), který jsme již předtím odvodili jiným způsobem.