# Problemas – Tema 1

# CCSS Problemas - 10 - regla de LHopital

**1. Calcula el límite** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{sen(2x)}$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{0}{0}$ → Aplicamos L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+6x)}{sen(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{6}{1+6x}}{\cos(2x)\cdot 2}=(evaluar)=\frac{6}{2}=3$$

**2. Calcula el límite** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=(evaluar)=\frac{0}{0}\ \rightarrow \text{indeterminación} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=(evaluar)=1$$

**3. Calcula** $\lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+x+2}{3e^x}$

Al evaluar obtenemos la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ → Aplicamos L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+x+2}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+1}{3e^x} = \frac{\infty}{\infty} \quad \rightarrow \text{Aplicamos L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4e^x+1}{3e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4e^x}{3e^x} = (\textit{simplificar exponencial}) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

**4. Calcula el número real $m$ que cumple $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$**

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación

Aplicamos L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{m}{1+mx}}{2\cos(2x)}=\frac{m}{2}$$

Igualamos el límite a $3$ , como exige el enunciado → $m=6$

**5. Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula $a$ y el valor del límite.**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)=(m.c.m.)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln x-a(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación $\frac{0}{0}$

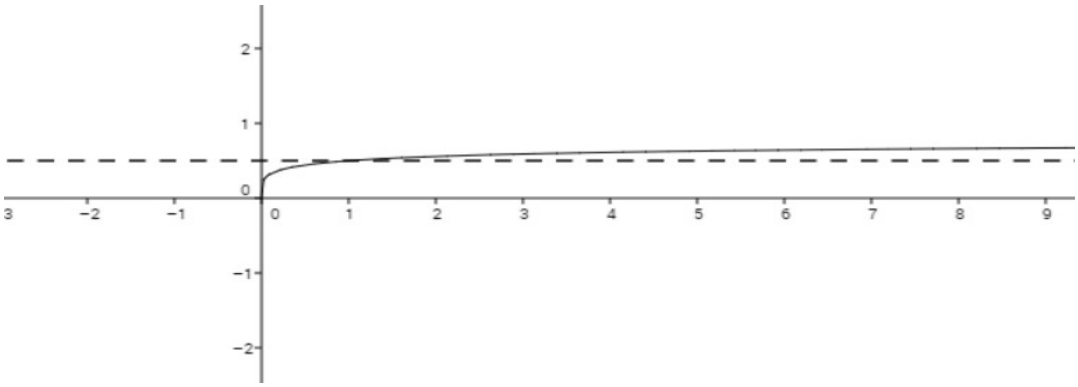
Aplicamos la regla de L'Hôpital → $\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\cdot\ln x-a(x-1)}{(x-1)\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x+1-a}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\frac{1-a}{0}$$

Las condiciones del enunciado marcan que el límite sea finito, por lo que al tener un cociente con denominador igual a 0, necesitamos que el numerador también sea nulo para que el límite no se dispare a infinito → $a=1$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2}{x(x+1)}\right)=\frac{1}{2}$$

*Gráfica de* $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$ *y de la recta horizontal* $y=\frac{1}{2}$



**6. Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de $a$ y $b$ .**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

Derivamos numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+b+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\frac{b}{0}$$

Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador también tienda a $0$ → $b=0$ .

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,a+\cos(x)}{2[\cos(x^2)+x\cdot(-2\cdot x\cdot sen(x^2))]}=\frac{2\,a+1}{2[1+0]}=\frac{2\,a+1}{2}$$

Según el enunciado el límite debe converger a $1$ → $\frac{2\,a+1}{2}=1$ → $2\,a+1=2$ → $a=\frac{1}{2}$