

UVOD U GEOGEBRU

GeoGebra je specijalizirani besplatni matematički računalni program dinamične geometrije pisan u programskom jeziku Java. Osim geometrije, u GeoGebri se može raditi algebra, analiza, statistika i vjerojatnost. Mogućnosti koje nude GeoGebra pokrivaju cjelokupnu matematiku osnovne i srednje škole te dijelove matematičkih sadržaja koji se uče na fakultetima. Nudi mogućnosti konstruiranja geometrijskih likova i tijela, crtanja i proučavanja grafova funkcija, istraživanja mijenjanjem parametara, uspoređivanje s algebarskim i tabličnim prikazima i još mnogo toga.

Program je osmislio Markus Hohenwarter na Sveučilištu u Salzburgu za proučavanje matematike u školama. Prvu verziju programa napisao je 2001. godine kao svoj diplomski rad. Program ima podršku austrijske akademije znanosti, a dobio je i mnogo svjetskih nagrada od raznih obrazovnih institucija. Danas na razvoju ovog programa radi međunarodni tim programera.

Nekoliko prednosti koje nudi GeoGebra:

- moguće ju je instalirati na svakom računalu
- jednostavna je za korištenje
- doprinosi boljem razumijevanju nastavnog sadržaja
- daje mogućnost crtanja/konstruiranja većeg broja funkcija u kratkom vremenskom periodu
- daje mogućnost povezivanja grafičkog i algebarskog prikaza
- poboljšava motivaciju za rad kod učenika i doprinosi bržem i trajnijem usvajanju znanja
- omogućava razumijevanje mnogih matematičkih pojmova i veza između objekata
- daje mogućnost uočavanja promjena i samostalnog izvođenja zaključaka
- dostupnost materijala i mogućnost vježbe kod kuće
- razne opcije spremanja, ispisa i izvoza radova u formatu datoteke, slike, animacije, web stranice i sl.

Instalacija

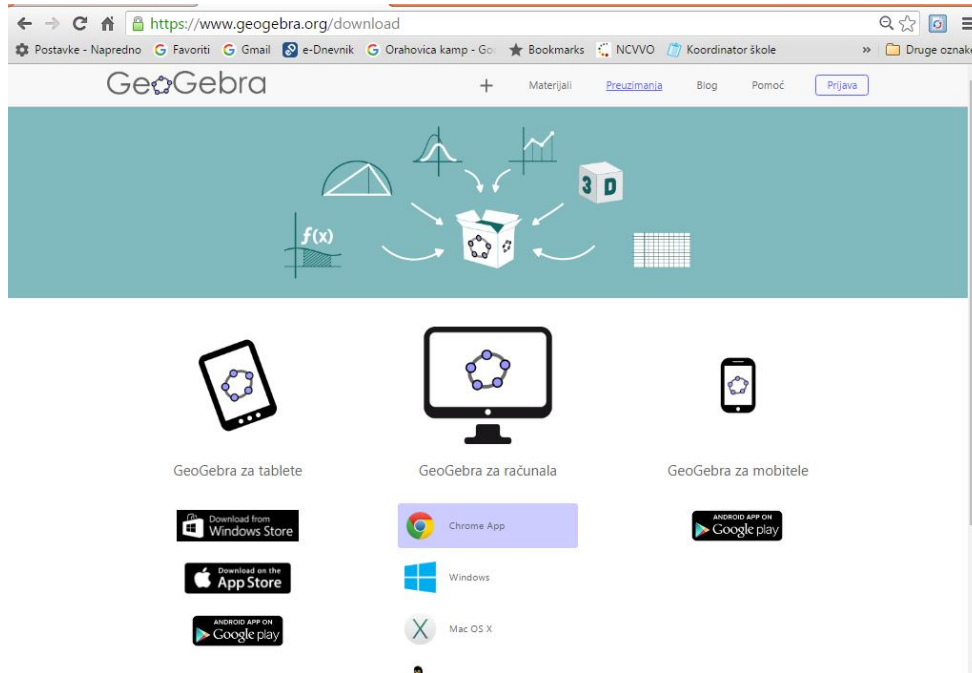
Preporuka je izraditi mapu u koju će se spremati sve datoteke tijekom rada.

Koraci instaliranja:

- otvoriti Internet preglednik i otići na stranicu <https://www.GeoGebra.org>
- kliknuti na gumb *Preuzimanja*
- odabrati *GeoGebra za računala*.

Program se automatski instalira na računalo, treba samo potvrditi sve poruke koje se mogu pojaviti s OK ili YES.

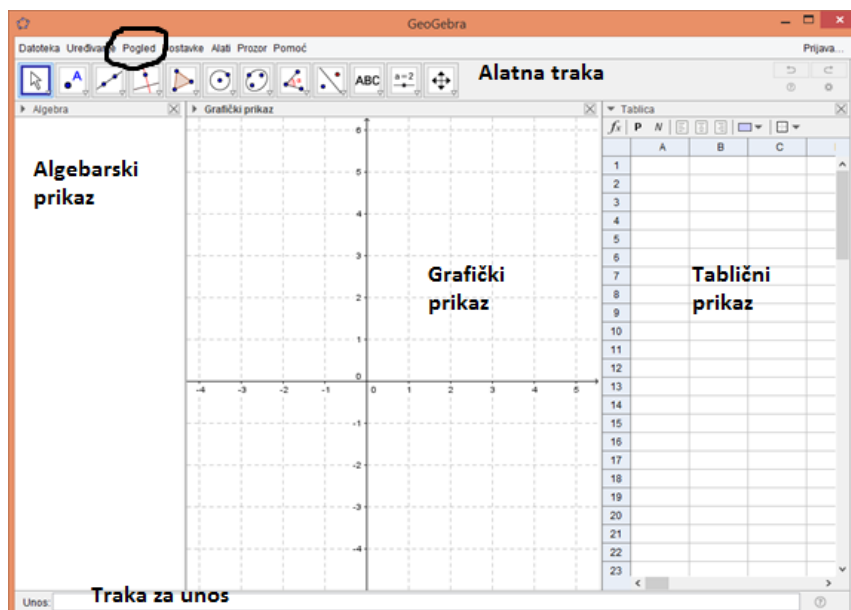
Jednom kad instalirate GeoGebru na svoje računalo, možete raditi i bez uključene internetske veze. Treba samo provjeravati dostupnost nadogradnje i instalirati je kako biste radili s najnovijom verzijom programa.



Slika 4.2.1. Početna stranica za instalaciju programa

GeoGebra ima tri različita načina promatranja matematičkih objekata: grafički (npr. točka, pravac, graf funkcije, vektora, likovi, tijela), algebarski (npr. koordinate točke, jednažba pravca, određivanje ekstrema) i tablični. Prikazi se odabiru u alatnoj traci u izborniku *Pogled*.

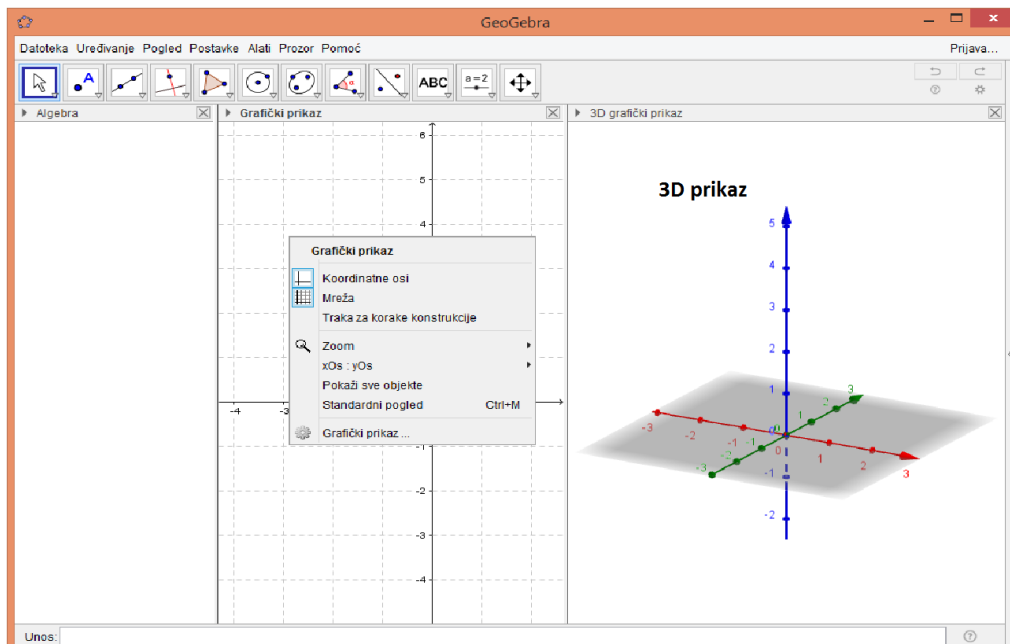
Zadatak: Kliknite i isprobajte prikaze.



Slika 4.3.1. Tri načina promatranja objekata

Prilagodba koordinatnih osi i mreže

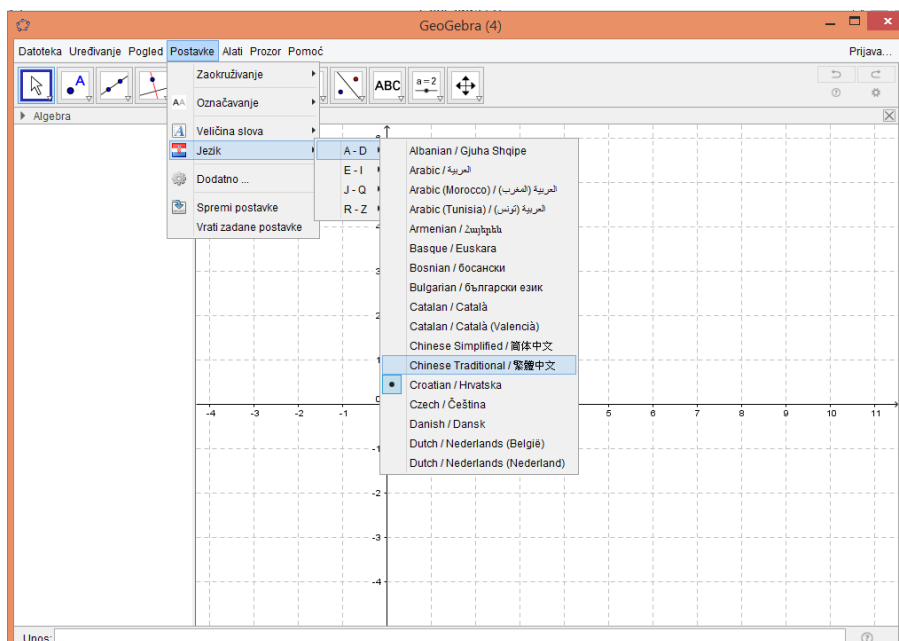
Desnim klikom miša otvara se prozor **Grafički prikaz** s dodatnim mogućnostima. Možete na primjer promijeniti vrstu crte koordinatnih osi (obična ili podebljana), odabrati mjernu jedinicu osi (mm, cm...) i postaviti razmak između oznaka veličina. Primijetite da možete prilagoditi svaku os zasebno odabirući karticu xOs ili yOs. Nadalje možete promijeniti omjer između osi i prikazati ili sakriti osi zasebno, promijeniti boju, vrstu crte mreže i postaviti udaljenost između linija mreže na proizvoljnu vrijednost.



Slika 4.3.2. Prilagodba koordinatnih osi i mreže

Izmjena postavki programa

GeoGebra pruža mogućnost mijenjanja i spremanja vaših omiljenih postavki koristeći izbornik *Postavke*. Na primjer možete promijeniti jezik, veličini slova i drugo. Kako biste sačuvali promjene, u istom izborniku treba odabrati opciju *Spremi postavke*.



Slika 4.3.3. Izmjena postavki programa

Opće napomene

Naziv objekata

Točke: U GeoGebri se točke označavaju velikim slovima. Samo utipkajte naziv (npr., A, P) i znak jednakosti ispred koordinata u traci za unos.

Primjeri: $C = (2, 4)$, $P = (1 \ 180^\circ)$, Kompleksni = $2 + i$

- **Vektori:** Kako bi se napravila razlika između točaka i vektora, vektorima se u GeoGebri pridjeljuju nazivi s malim slovima. Ponovo utipkajte naziv (npr. v, u) i znak jednakosti ispred koordinata vektora.

Primjer: $v = (1, 3)$, $u = (3 \ 90^\circ)$, kompleksni = $1 - 2i$

- **Pravci, kružnice, konike:** Ovim se objektima mogu pridijeliti nazivi tako da se utipka naziv pa dvotočka ispred njihove jednadžbe.

Primjeri: $g: y = x + 3$, $c: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$, $hip: x^2 - y^2 = 2$

- **Funkcije:** Funkciju možete imenovati tako da utipkate na primjer, $f(x)$ ili $g(x)$ = ispred funkcijske jednadžbe.

Primjeri: $h(x) = 2x + 4$, $q(x) = x^2$, $trig(x) = \sin(x)$

U nazivima objekata možete koristiti indekse pomoću crte, na primjer A_1 se upisuje kao A_1 i s_{AB} se upisuje kao $s_{\{AB\}}$.

Izmjena vrijednosti

Vrijednosti nezavisnih objekata možemo mijenjati na dva načina:

- **Izmijenite** postojeću vrijednost novom tako da unesete naziv i novu vrijednost objekta u *traku za unos*.
 Primjer: Želite li promijeniti vrijednost postojećeg broja $a = 3$, utipkajte $a = 5$ u *traku za unos* i pritisnite tipku *Enter*.
- **Uredite algebarski prikaz:** Aktivirajte alat *Pomicanje* i kliknite dvaput na objekt u *algebarskom prikazu*. Time ćete otvoriti tekstualno polje u kojem možete urediti vrijednost objekta. Pritisnite tipku *Enter* za prihvatanje vaših izmjena.

Geometrijske konstrukcije i alati











Koristeći alate **Alatne trake** možete vršiti konstrukcije u **grafičkom prikazu** pomoću miša. Istovremeno će se odgovarajuće koordinate i jednadžbe prikazivati u **algebarskom prikazu**. Odaberite bilo koji alat za konstrukciju iz alatne trake i pročitajte pomoć/opis. **Traku za unos** možete koristiti za izravan unos koordinata, jednadžbi, naredbi i funkcija. Pritiskom tipke *Enter* objekt se prikazuje u grafičkom prikazu, a u algebarskom prikazu vidite njegov algebarski zapis. GeoGebra nudi široki popis naredbi koje se mogu unijeti u traku za unos.





















Slika 4.4.1. Alatna traka














Opis nekih alata i način korištenja











1. Alati za pomicanje	
Pomicanje	Nakon odabira ovog alata klikom na željeni objekt odaberemo ga i nakon toga ga možemo pomicati, brisati i sl. Za odabir više objekata odjednom potrebno je držati pritisnutu tipku CTRL.
Rotacija oko točke	Najprije izaberite točku za središte vrtnje. Potom možete slobodno zakretati objekt oko središta povlačeći ga mišem.










2. Alati za točku	
 Točka	Klikom na crtaču plohu grafičkog prikaza konstruira se nova točka. Klikom na dužinu, zraku, pravac ili graf funkcije konstruira se točka koja pripada tom objektu.
 Točka na objektu	Konstruira točku na odabranom objektu. Alatom za pomicanje može se pomicati, ali samo po pridruženom objektu.
 Priveži / Odvoji točku	Kako biste privezali točku za putanju ili područje, kliknite na točku, a zatim na putanju ili područje. Od tog trenutka točka će se moći pomicati samo duž putanje ili unutar područja. Za odvajanje točke koja je definirana kao točka putanje ili područja, jednostavno kliknite na točku dok je označen ovaj alat.
 Sjecište	Odaberete li dva objekta, sva će sjecišta biti konstruirana ako je to moguće, dok klikom na mjesto na ekranu gdje se sijeku dva objekta dobivamo samo to određeno sjecište.
 Polovište ili središte	Klikom na dvije točke (početnu i završnu) ili dužinu dobije se polovište.
 Kompleksan broj	Kliknite na grafički prikaz i dobit ćete novi kompleksni broj.
 Ekstrem	Klikom na funkciju prikazuje njene ekstreme u grafičkom prikazu, a u algebarskom su prikazane koordinate tih ekstrema.
 Nultočke	Klikom na funkciju prikazuje njene nultočke.
3. Alati za crte	
 Pravac	Kliknuti na jednu pa drugu točku ili kliknuti na dva nova mjesta na crtačoj plohi kako biste dobili pravac.
 Dužina	Odaberite dvije točke kako biste napravili dužinu između njih. U algebarskom prozoru zapisana je duljina te dužine.




	<p>Dužina zadane duljine</p>	<p>Kliknite na točku A koja bi trebala biti početna točka dužine. U dijaloškom okviru koji se pojavi upišite željenu duljinu a te dužine.</p>
	<p>Zraka</p>	<p>Odabirom točke A i točke B crta se polupravac s početnom točkom A i prolazi točkom B. U algebarskom prozoru vidi se jednačba pravca nositelja.</p>
	<p>Razlomljena crta</p>	<p>Odaberite najmanje tri točke kao vrhove izlomljene crte i ponovno kliknite na početnu točku kako biste završili konstrukciju otvorene izlomljene crte.</p>
	<p>Vektor između dviju točaka</p>	<p>Konstruira vektor nakon što označite početnu i krajnju točku vektora.</p>
	<p>Vektor iz točke</p>	<p>Odaberite točku A i vektor v da biste dobili točku $B = A + v$ i novi vektor \overrightarrow{AB}.</p>
<p>4. Posebni alati za pravac</p>		
	<p>Okomica</p>	<p>Odabirom pravca (ili dužine) i točke konstruirat ćete pravac kroz odabranu točku okomit na odabrani pravac.</p>
	<p>Usporednica</p>	<p>Odabirom pravca (ili dužine) i točke konstruirat ćete pravac kroz odabranu točku paralelan (usporedan) s odabranim pravcem.</p>
	<p>Simetrala dužine</p>	<p>Odabirom dužine (ili označavanjem početne i završne točke) konstruira se simetrala dužine (okomica na dužinu kroz njezino polovište).</p>
	<p>Simetrala kuta</p>	<p>Odabirom triju točaka A, B i C konstruirat ćete simetralu kuta koji čine ove tri točke, gdje je B vrh. Odabirom dvaju pravaca konstruirat ćete dvije simetrale kuta zadanog para pravaca.</p>
	<p>Tangente</p>	<p>Odabir točke A i krivulje k daje sve tangente na k koje prolaze kroz A. Odabir pravca p i krivulje k daje sve tangente na k koje su usporedne s pravcem p. Odabir točke A i funkcije f daje sve tangente od f u diralištu s apscisom $x = x(A)$. Odabir dviju kružnica c i d daje sve zajedničke tangente ovih dviju kružnica (najviše 4).</p>

5. Alati za mnogokut	
 Mnogokut	<p>Odaberite najmanje tri točke koje će biti vrhovi mnogokuta i zatim ponovno kliknite na početnu točku kako biste završili mnogokut. Držeći pritisnutu tipku Alt dok konstruirate mnogokut, moći ćete dobiti kutove koji su višekratnici od 15°.</p>
 Pravilni mnogokut	<p>Odaberite dvije točke A i B i zadajte broj vrhova n u tekstualnom polju dijaloškog prozora koji će se pojaviti. Tako ćete dobiti pravilni mnogokut s n vrhova uključujući A i B.</p>
 Kruti mnogokut	<p>Odaberite najmanje tri nezavisne točke koje će biti vrhovi mnogokuta i zatim ponovno kliknite na početnu točku kako biste završili mnogokut. Dobiveni mnogokut zadržat će svoj izgled: moći ćete ga jedino pomicati i rotirati pomoću vrhova.</p>
 Vektorski mnogokut	<p>Odaberite najmanje tri nezavisne točke koje će biti vrhovi mnogokuta. Kliknite ponovno na prvu točku kako biste zatvorili mnogokut. Dobiveni mnogokut zadržat će oblik povlačenjem početne točke, a ostali vrhovi (za razliku od krutog mnogokuta) mogu se slobodno pomicati i tako mijenati oblik mnogokuta.</p>
6. Alati za kružnicu i luk	
 Kružnica određena središtem i polumjerom	<p>Prvo kliknuti na željeno središte, a potom na rubnu točku. Konstruira se kružnica sa zadanim središtem ili rubnom točkom. Isto tako može se u traku za unos unijeti duljina polumjera.</p>
 Šestar	<p>Odaberite dužinu ili dvije točke (početnu i krajnju) za polumjer. Zatim kliknite na crtaću plohu i označite središte.</p>
 Kružnica kroz tri točke	<p>Odabirom triju točaka određuje se kružnica kroz te tri točke.</p>
 Polukružnica određena dvjema točkama	<p>Odabir točaka A i B daje polukružnicu nad dužinom \overline{AB}.</p>

 Kružni luk	Odabir triju točkaka A, B, C daje kružni luk sa središtem A , početnom točkom B i krajnjom točkom C .
 Kružni luk	Odabirom tri točke dobiva se kružni luk kroz te tri točke.
 Kružni isječak	Odabir triju točkaka A, B, C konstruira kružni isječak sa središtem A , početnom točkom B i krajnjom točkom C . Napomena: točka C ne mora ležati na isječku.
 Kružni isječak	Odabirom tri točke dobiva se kružni isječak koji pripada kružnom luku kroz te tri točke.
7. Alati za konike (krivulje 2. reda)	
 Elipsa	Odabirom dva žarišta elipse (hiperbole), a zatim treće točke koja pripada elipsi (hiperboli), nastaje elipsa (hiperbola) čija je jednačba vidljiva u algebarskom zapisu.
 Hiperbola	
 Parabola	Odabirom žarišta i ravnalice parabole nastaje parabola.
8. Alati za mjerenje	
 Kut	Ovaj alat daje veličinu označenog kuta.
 Kut zadane veličine	Nakon odabira dviju točkaka otvara se dijaloško polje u koje se upisuje veličinu kuta.
 Udaljenost ili duljina	Klikom na objekte može se izmjeriti udaljenost između dvije točke, dva pravca ili točke i pravca.
 Površina	Odaberite mnogokut, kružnicu ili koniku i za rezultat dobije se površina.
 Nagib	Odabirom pravca dobije se njegov nagib.
 Izradi listu	U grafičkom prikazu jednostavno prevucite sivi pravokutnik preko objekata koje želite u listi. Tada kliknite na gumb ovog alata kako biste napravili listu označenih objekata.

9. Transformacijski alati		
	Zrcaljenje preko pravca	Oсна simetrija. Odabere se objekt za zrcaljenje, a potom se klikne na pravac (os simetrije) preko kojeg se zrcali.
	Zrcaljenje preko točke	Centralna simetrija. Odabere se objekt za zrcaljenje, a potom se klikne na točku preko koje će se zrcaliti (središte simetrije).
	Rotacija oko točke	Odabere se objekt koji treba rotirati, a potom se klikne na točku koja će biti središte rotacije. U otvoreno dijaloško polje upisuje se kut rotacije.
	Translacija objekta za vektor	Odabere se objekt i klikne na vektor.
	Rastezanje objekta iz točke	Homotetija. Odabere se objekt i klikne se na točku koja će biti centar homotetije. Otvara se dijaloško polje u koje u koje se upisuje koeficijent homotetije.
10. Posebni alati za objekt		
	Tekst	Klikom na crtaću plohu kreira se novi tekst na tom mjestu. Klikom na točku kreira se tekst čiji je položaj vezan uz tu točku. U navodnike se upisuje željeni tekst. Izvan navodnika može se dodati znak + i neka vrijednost iz algebarskog prozora koja se onda dinamički mijenja.
	Slika	Ovaj način omogućuje umetanje slika u konstrukciju. Klikom na crtaću plohu određuje se položaj lijevog donjeg ugla slike. Klikom na točku određuje se točka na koju se veže lijevi donji ugao slike. Nakon toga otvara se dijaloški prozor za otvaranje datoteke.
	Olovka	Alat Olovka omogućava pisanje ili crtanje slobodnom rukom po grafičkom prikaz.
	Lik crtan prostoručno	Skiciranje funkcije ili geometrijskog oblika povlačenjem miša.
	Veza između dva objekta	Označe se dva objekta da se dobije informacija o njihovom međusobnom odnosu.

 Ispitivač funkcije	<p>Upišite funkciju koju želite ispitivati. Tada izaberite ovaj alat.</p>
<h3>11. Akcijski alati</h3>	
 Klizač	<p>Kliknite na slobodnu površinu grafičkog prikaza kako biste izradili klizače za brojeve ili kutove. Dijaloški okvir omogućit će vam da zadate Naziv, Interval [min, max] i Korak povećanja broja, odnosno kuta, kao i položaj (horizontalan ili vertikalni) i Širinu klizača (u pikselima) te Brzinu i Ponavljanje za animaciju.</p>
 Potvrđni okvir	<p>Klikom na grafički prikaz kreira se potvrđni okvir (vidi logičke varijable) za prikaz ili skrivanje jednog ili više objekata. U dijaloškom okviru koji se pojavio možete specificirati na koje objekte želite utjecati iz kontrolnog okvira.</p>
 Gumb	<p>Kliknite na grafički prikaz kako biste umetnuli gumb. U dijaloškom okviru koji se pojavio možete postaviti njegov natpis i skriptiranje Na klik.</p>
 Tekstualno polje	<p>Kliknite na grafički prikaz i dobit ćete a tekstualno polje. Pojavit će se dijaloški okvir u kojem možete postaviti natpis i povezane objekte.</p>
<h3>12. Opći alati</h3>	
 Pomicanje grafičkog prikaza	<p>Povlačenje i ispuštanje da bi se promijenio položaj ishodišta koordinatnog sustava. Crtaću plohu možete pomicati i istovremenim pritiskom tipke Ctrl i povlačenjem miša.</p>
 Povećanje	<p>Klikom bilo gdje na crtaću plohu ona se povećava.</p>
 Smanjenje	<p>Klikom bilo gdje na crtaću plohu ona se smanjuje.</p>
 Pokaži / sakrij objekt	<p>Klikne se na objekt da bi ga pokazali, odnosno sakrili. Svi objekti odabrani za skrivanje bit će naglašeni. Promjena nastupa kada kliknete na bilo koje dugme u alatnoj traci.</p>

 Pokaži / sakrij oznaku	Klikne se na objekt da bi pokazali, odnosno sakrili njegovu oznaku.
 Prenositelj oblikovanja	Ovim načinom prenose se svojstva objekta kao što su boja, veličina, vrsta crte itd. s jednog objekta na nekoliko drugih. Najprije se klikne na objekt čija se svojstva prenose, a potom na objekte kojima se žele pridijeliti ta svojstva.
 Izbriši	Klikne se na objekt koji se želi izbrisati.



Slika 4.4.2. Traka za unos

Traka za unos smještena je na dnu GeoGebrinog prozora. Možete ju sakriti ili pokazati pomoću izbornika Pogled. Pomoću nje možemo izraditi ili mijenjati matematičke objekte direktno, koristeći njihove algebarske reprezentacije (npr. vrijednosti, koordinate, jednadžbe).