
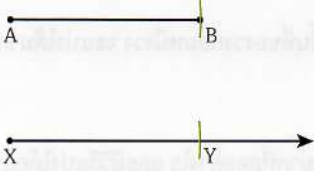


4.2 การสร้างและการให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้าง

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า การสร้างทางเรขาคณิตใช้เครื่องมือเพียงเส้นตรงและวงเวียนในการสร้างรูปเรขาคณิต
ให้นักเรียนพิจารณาการให้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต 6 ข้อ ที่เป็นพื้นฐานของการสร้างรูปเรขาคณิต
ทั่วไปต่อไปนี้ พร้อมทั้งเติมเหตุผลลงในช่องว่าง

1. การสร้างส่วนของเส้นตรงให้ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
<p>กำหนดให้ \overline{AB} เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง</p>  <p>สร้าง \overline{XY} ให้มีความยาวเท่ากับความยาวของ \overline{AB} ได้ดังรูป</p> 	<p>จากรูปที่สร้าง จะได้ $XY = AB$</p> <p>เพราะว่า ในการสร้าง \overline{XY} ใช้รัศมียาวเท่ากับ AB</p>

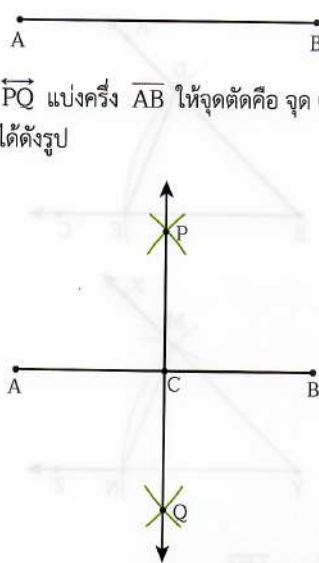
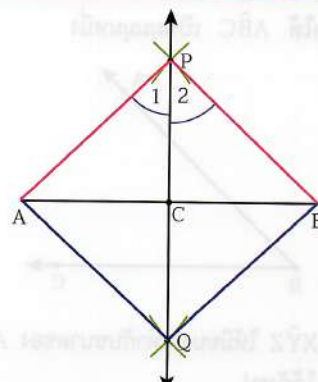


มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP
เพื่อศึกษาขั้นตอนการสร้างพื้นฐานทาง
เรขาคณิตข้อที่ 1-6 โดยใช้เทคโนโลยีได้ที่
<http://ipst.me/9153>

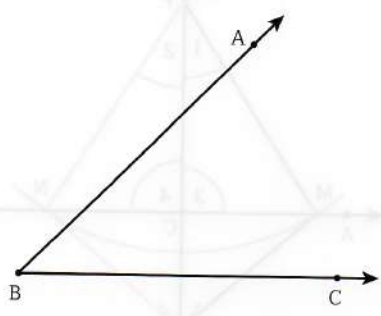
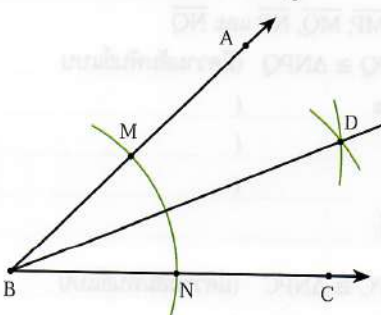


2. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
<p>กำหนดให้ \overline{AB} เป็นส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง</p>  <p>สร้าง \overline{PQ} แบ่งครึ่ง \overline{AB} ให้จุดตัดคือ จุด C ได้ดังรูป</p>	 <p>ลาก \overline{AP}, \overline{PB}, \overline{AQ} และ \overline{QB}</p> <p>$\triangle APQ \cong \triangle BPQ$ (มีความสัมพันธ์แบบ ค.ด.ด.)</p> <p>เพราะ $AP = BP$ (จากการสร้างใช้รัศมียาวเท่ากัน)</p> <p>$AQ = BQ$ (จากการสร้างใช้รัศมียาวเท่ากัน)</p> <p>$PQ = PQ$ (\overline{PQ} เป็นด้านร่วม)</p> <p>จะได้ $\hat{1} = \hat{2}$ (มุมคูที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ จะมีขนาดเท่ากัน)</p> <p>$\triangle APC \cong \triangle BPC$ (มีความสัมพันธ์แบบ _____)</p> <p>เพราะ _____ (_____)</p> <p>_____ (_____)</p> <p>_____ (_____)</p> <p>จะได้ _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>_____</p>

จากรูปที่สร้าง จะได้ \overline{PQ} แบ่งครึ่ง \overline{AB} ที่จุด C เพราะว่า $AC = BC$

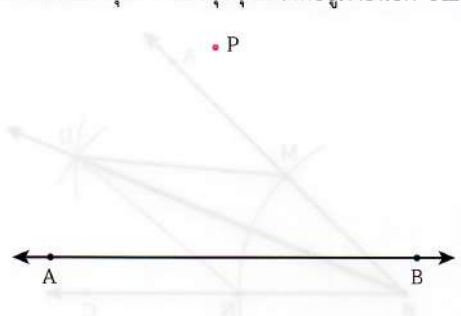
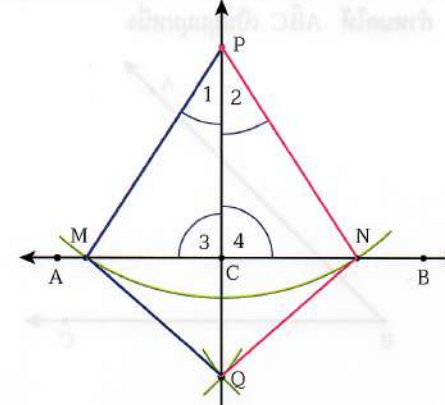
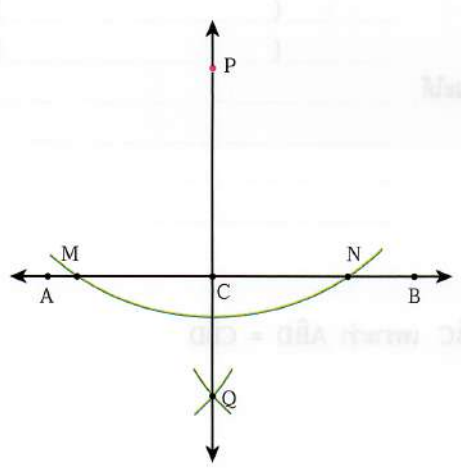
4. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
<p>กำหนดให้ \widehat{ABC} เป็นมุมมุมหนึ่ง</p>  <p>สร้าง \overrightarrow{BD} แบ่งครึ่ง \widehat{ABC} ได้ดังรูป</p> 	<p>ลาก \overline{MD} และ \overline{ND}</p> <p>$\triangle BMD \cong \triangle BND$ (มีความสัมพันธ์แบบ.....)</p> <p>เพราะ (.....)</p> <p>(.....)</p> <p>(.....)</p> <p>จะได้</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

จากรูปที่สร้าง จะได้ \overrightarrow{BD} แบ่งครึ่ง \widehat{ABC} เพราะว่า $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$



5. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างพื้นฐาน	การให้เหตุผล
<p>กำหนดให้ จุด P เป็นจุดจุดหนึ่งที่อยู่ภายนอก \overleftrightarrow{AB}</p> 	
<p>สร้าง \overleftrightarrow{PQ} ตั้งฉากกับ \overleftrightarrow{AB} ให้จุดตัด คือ จุด C ได้ดังรูป</p> 	<p>ลาก \overline{MP}, \overline{MQ}, \overline{NP} และ \overline{NQ}</p> <p>$\triangle MPQ \cong \triangle NPQ$ (มีความสัมพันธ์แบบ)</p> <p>เพราะ (.....)</p> <p>(.....)</p> <p>(.....)</p> <p>จะได้</p> <p>$\triangle MPC \cong \triangle NPC$ (มีความสัมพันธ์แบบ)</p> <p>เพราะ (.....)</p> <p>(.....)</p> <p>(.....)</p> <p>จะได้</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p> <p>.....</p>

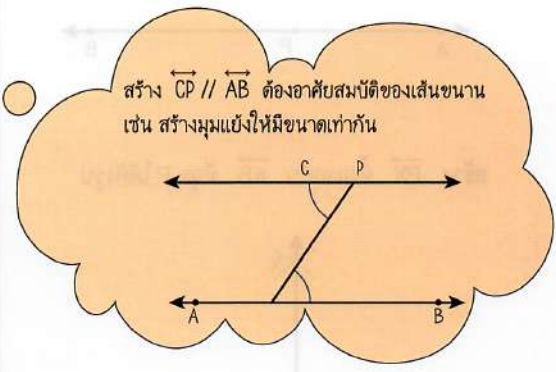
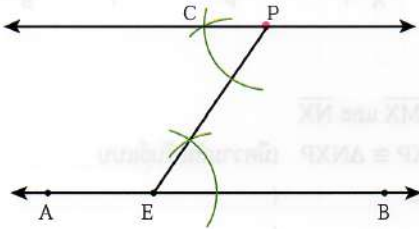
จากรูปที่สร้าง จะได้ \overleftrightarrow{PQ} ตั้งฉากกับ \overleftrightarrow{AB} ที่จุด C เพราะว่า $\widehat{ACP} = \widehat{BCP} = 90^\circ$

เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต 6 ข้อ ข้างต้นไปใช้ในการสร้างรูปเรขาคณิตต่าง ๆ เช่น รูปสามเหลี่ยม และรูปสี่เหลี่ยม ให้มีลักษณะตามที่โจทย์กำหนด และพิสูจน์ว่าผลการสร้างเป็นจริง ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดจุด P อยู่ภายนอก \vec{AB} จงสร้างเส้นตรงผ่านจุด P และขนานกับ \vec{AB} พร้อมทั้งแสดงเหตุผล

กำหนดให้ จุด P อยู่ภายนอก \vec{AB}
ต้องการสร้าง \vec{CP} ผ่านจุด P และขนานกับ \vec{AB}

สร้าง



สร้าง $\vec{CP} \parallel \vec{AB}$ ต้องอาศัยสมบัติของเส้นขนาน เช่น สร้างมุมแย้งให้มีขนาดเท่ากัน

1. กำหนดจุด E เป็นจุดจุดหนึ่ง บน \vec{AB} แล้วลาก \vec{EP}
2. สร้าง \vec{EPC} ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของ \vec{BEP} โดย \vec{EPC} และ \vec{BEP} เป็นมุมแย้งกัน
3. ลาก \vec{CP}

จะได้ \vec{CP} ผ่านจุด P และขนานกับ \vec{AB}

พิสูจน์ เนื่องจาก $\vec{EPC} = \vec{BEP}$
ดังนั้น \vec{CP} ขนานกับ \vec{AB}

(จากการสร้าง)
(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

นั่นคือ \vec{CP} ผ่านจุด P และขนานกับ \vec{AB}



มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP เพื่อศึกษาขั้นตอนการสร้างตามตัวอย่างที่ 1 โดยใช้เทคโนโลยีได้ที่ <http://ipst.me/9154>





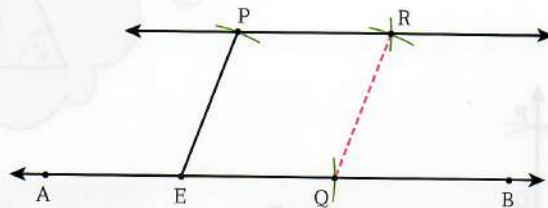


ข้าวกสองจะ ในตัวอย่างที่ 1 นี้ น่าจะมี
วิธีสร้างแบบอื่น ได้อีกไหมนะ



คิดว่าน่าจะมึนะ ลองสร้างเป็น
รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ดีไหม

การสร้างเส้นขนานดังกล่าว โดยใช้สมบัติของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ทำได้ดังนี้



สร้าง

- กำหนดจุด E เป็นจุดจุดหนึ่งบน \overleftrightarrow{AB} โดยที่เมื่อลาก \overline{EP} แล้ว \overline{EP} ไม่ตั้งฉากกับ \overleftrightarrow{AB}
- ใช้จุด E เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ EP เขียนส่วนโค้งตัด \overleftrightarrow{AB} ให้จุดตัดคือ จุด Q
- ใช้จุด P และจุด Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ EP เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด R
- ลาก \overleftrightarrow{PR}

จะได้ \overleftrightarrow{PR} ผ่านจุด P และขนานกับ \overleftrightarrow{AB}

พิสูจน์

ลาก \overline{QR}

เนื่องจาก $EP = PR = RQ = QE$

(จากการสร้างใช้รัศมียาวเท่ากัน)

จะได้ $\square EPRQ$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

(มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน และไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก)

ดังนั้น $\overleftrightarrow{PR} \parallel \overleftrightarrow{EQ}$

(ด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนขนานกัน)

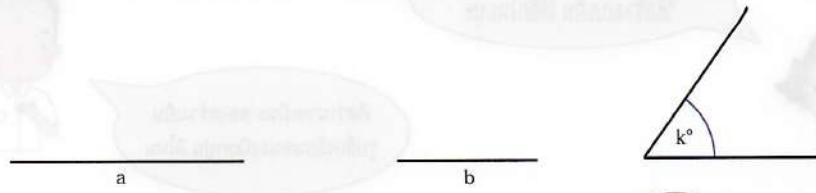
นั่นคือ \overleftrightarrow{PR} ผ่านจุด P และขนานกับ \overleftrightarrow{AB}

(\overline{EQ} อยู่บน \overleftrightarrow{AB})

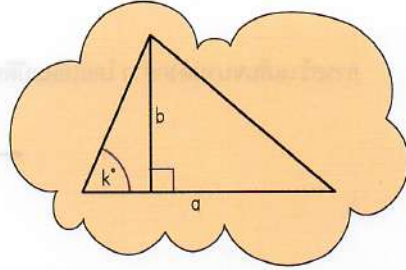


จากตัวอย่างข้างต้น เพื่อน ๆ จะเห็นว่าการสร้างเส้นตรงให้ผ่าน
จุดจุดหนึ่งที่อยู่นอกเส้นตรงที่กำหนดให้ และให้ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้
ถ้าใช้วิธีสร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนจะทำได้ง่ายและรวดเร็วกว่า

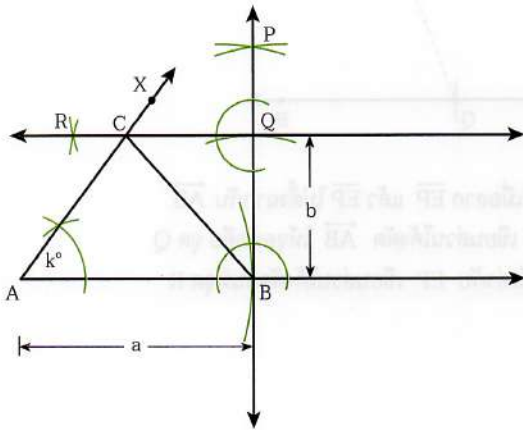
ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีฐานยาวเท่ากับ a หน่วย สูงเท่ากับ b หน่วย และมุมที่ฐานมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับ k องศา ดังรูป พร้อมทั้งแสดงเหตุผล



วิเคราะห์รูปที่ต้องการสร้าง



สร้าง



แนวคิด สร้างเส้นขนานกับฐานของรูปสามเหลี่ยมและให้เส้นขนานอยู่ห่างจากฐาน b หน่วย จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับฐาน จะมีความสูงเท่ากับ b หน่วย

1. สร้าง \overline{AB} ยาว a หน่วย
2. ที่จุด B สร้าง \overline{PB} ตั้งฉากกับ \overline{AB}
3. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ b หน่วย เขียนส่วนโค้งตัด \overline{BP} ให้จุดตัดคือ จุด Q
4. สร้าง \overline{RQ} ตั้งฉากกับ \overline{BP} ที่จุด Q จะได้ \overline{RQ} ขนานกับ \overline{AB}
5. ที่จุด A สร้าง \widehat{XAB} ให้มีขนาดเท่ากับ k องศา และให้ \overline{AX} ตัด \overline{RQ} ให้จุดตัดคือ จุด C จะได้จุด C อยู่ห่างจาก \overline{AB} เท่ากับ b หน่วย
6. ลาก \overline{BC}

จะได้ $\triangle ABC$ มีฐาน AB ยาว a หน่วย ความสูง b หน่วย และ \widehat{CAB} มีขนาดเท่ากับ k องศา

พิสูจน์

เนื่องจาก $\widehat{ABQ} = \widehat{BQR} = 90^\circ$ จะได้ $\widehat{ABQ} + \widehat{BQR} = 180^\circ$ ดังนั้น \overrightarrow{RQ} ขนานกับ \overrightarrow{AB} เนื่องจาก $BQ = b$ หน่วยจะได้ แต่ละจุดซึ่งอยู่บน \overrightarrow{RQ} จะอยู่
ห่างจาก \overrightarrow{AB} เท่ากับ b หน่วยดังนั้น ความสูงของ $\triangle ABC$ จึงเท่ากับ b หน่วย $\widehat{CAB} = k^\circ$ นั่นคือ $\triangle ABC$ มี $AB = a$ หน่วย สูง b หน่วย และ $\widehat{CAB} = k^\circ$

(จากการสร้าง)

(สมบัติของการเท่ากัน)

(ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศาแล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

(จากการสร้าง)

(ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากัน)

(จากการสร้าง และ \widehat{XAB} กับ \widehat{CAB} เป็นมุมเดียวกัน)

มุมเทคโนโลยี

นักเรียนสามารถดาวน์โหลดไฟล์ GSP
เพื่อศึกษาการสร้างตามตัวอย่างที่ 2
โดยใช้เทคโนโลยีได้ที่
<http://ipst.me/9155>



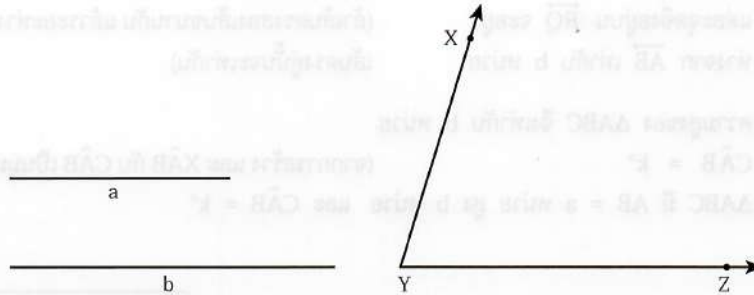
แบบฝึกหัด 4.2

1. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะเป็นไปตามที่โจทย์กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยไม่ต้องพิสูจน์

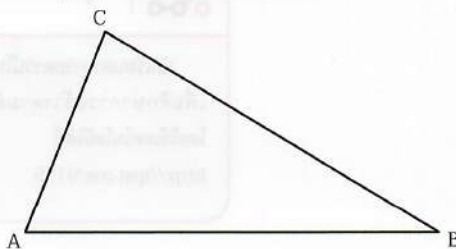
1) กำหนด \widehat{XYZ} และส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาว a หน่วย และ b หน่วย ดังรูป

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมีขนาดเท่ากับครึ่งหนึ่งของขนาดของ \widehat{XYZ}

ด้านที่เป็นแขนของมุมที่สร้างยาวเท่ากับ a หน่วย และ b หน่วย

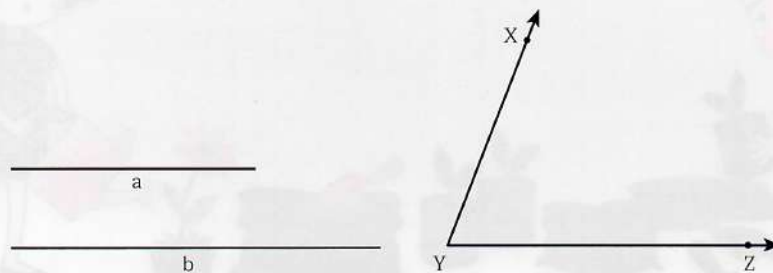


2) กำหนด รูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป

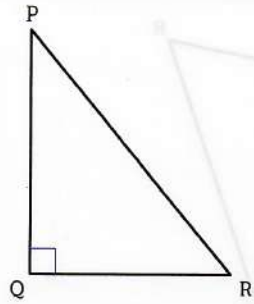


จงสร้าง ΔXYZ ให้ $XY = \frac{1}{2}AB + AC$
 $\widehat{XYZ} = 2(\widehat{ABC})$ และ $YZ = BC$

3) กำหนด \widehat{XYZ} จงสร้าง ΔABC ที่ $\widehat{ABC} = \widehat{XYZ}$ จุด E อยู่บน \overline{AC} โดยให้ \overline{BE} แบ่งครึ่ง \widehat{ABC}
 $BE = a$ หน่วย และ $AB = b$ หน่วย ดังรูป

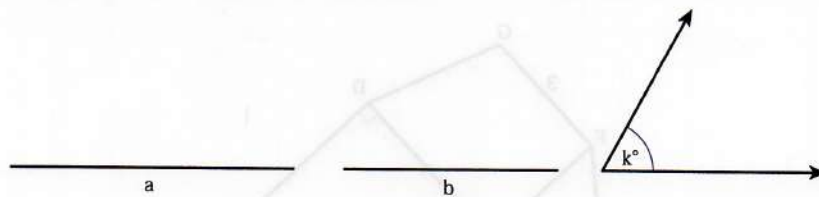


- 4) กำหนด $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังรูป

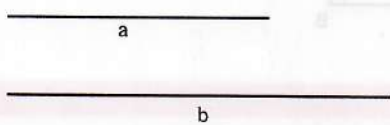


จงสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีด้านประกอบมุมยอดยาวเท่ากับ PR และฐานยาวเป็นสองเท่าของ QR

- 5) จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี \overline{AB} เป็นฐาน มีความสูง b หน่วย $\widehat{BAC} = k^\circ$ และเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด C มายัง \overline{AB} ยาว a หน่วย ดังรูป

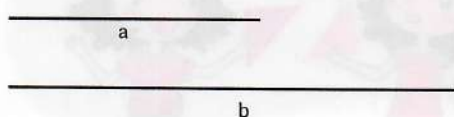


2. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส A มีความยาวของแต่ละด้านเท่ากับ a หน่วย รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส B มีความยาวของแต่ละด้านเท่ากับ b หน่วย ดังรูป



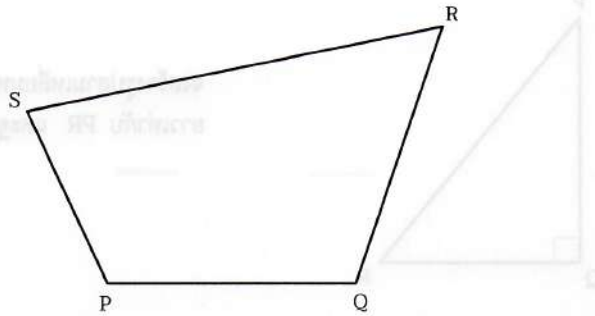
จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส A และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส B พร้อมทั้งแสดงเหตุผล

3. กำหนดส่วนของเส้นตรงสองเส้นที่ยาว a และ b หน่วย ดังรูป

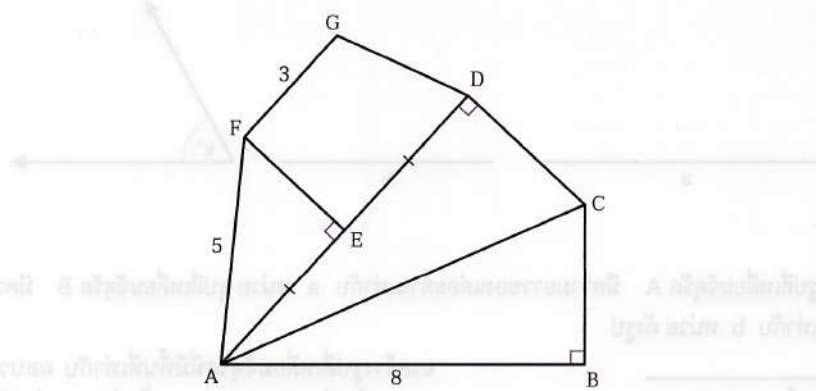


- 1) จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าวที่มีด้านประกอบมุมมุมหนึ่งยาว a หน่วย และ b หน่วย โดยไม่ต้องแสดงเหตุผล
- 2) จากข้อ 1) นักเรียนสร้างได้กี่รูป จงอธิบาย

4. จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งให้เท่ากันทุกประการกับ $\square PQRS$ ที่กำหนดให้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผล



5. กำหนดให้ \overline{AC} เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม \widehat{DAB} และ $\overline{FG} \parallel \overline{AD}$ จงหาว่า $\square ADGF$ มีพื้นที่ที่เท่าไร





กิจกรรม : สำรวจพื้นที่รูปสามเหลี่ยม

จงสร้างตามเงื่อนไขการสร้างในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. สร้าง $\triangle ABC$ ใด ๆ 1 รูป
2. สร้าง \overline{XY} ให้ผ่านจุด C และขนานกับ \overline{AB}
3. กำหนดจุด D, E และ F เป็นจุดบน \overline{XY}
4. ลาก $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{AE}, \overline{BE}, \overline{AF}$ และ \overline{BF}

ให้นักเรียนสำรวจพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป จากนั้นสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม และตอบคำถามต่อไปนี้

คำถาม 1: $\triangle ADB, \triangle AEB$ และ $\triangle AFB$ แต่ละรูปมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ABC$ หรือไม่ เพราะเหตุใด

คำถาม 2: นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมที่มี \overline{AB} เป็นฐาน และมีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของ $\triangle ABC$ มีกี่รูป และรูปสามเหลี่ยมเหล่านั้นมีจุดยอดอยู่ที่ใด



ชวนคิด 4.4

กำหนด $\triangle PQR$ จงสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่ของ $\triangle PQR$ ให้น้อย 2 วิธี ที่แตกต่างกัน พร้อมทั้งให้เหตุผล



ชวนคิด 4.5

จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กำหนดให้ ให้น้อย 2 วิธี ที่แตกต่างกัน พร้อมทั้งให้เหตุผล

