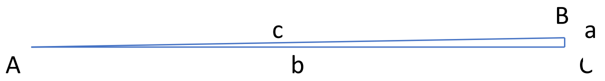
Diofantisk cirkel i planen med heltallig radius og centrum.

Den enkle metode til omformning fra et parentesløst udtryk til 'normalformen'. Skriv ligningen her.
WordMat's trekantsløser anvendes med input: A = 1° , C = 90° , b = 13



A = 1°
B = 89°
C = 90°

a = 0,22692
b = 13
c = 13,002

Lemma.

1: $x^2 + kx = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$

Bevis. Af første kvadratsætning følger at

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{k}{2} - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = x^2 + kx$$

2:

$$x^2 + ux + y^2 + vy + w = \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 + w$$

3: Betragt ligningen i x og y givet ved

$C: x^2 + ux + y^2 + vy + w = 0.\ \ u, v, w \ \in Z.$ Lad $t = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - w$

$$x^2 + ux + y^2 + vy + w = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u}{2}\right)^2 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 + w = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - w \Leftrightarrow \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 = t$$

$C\ er\ en\ cirkeligning\ \ \Leftrightarrow t > 0$

Lad $t = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - w$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{u}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{v}{2}\right)^2 = t \Leftrightarrow C\ er\ en\ cirkeligning\ \ \Leftrightarrow t > 0$

1: Hvis $t \in \mathbb{N}^2$ så er C cirkelligning for en cirkel med centrum i punkt $P = (\frac{-u}{2}, \frac{-v}{2})$ og med heltallig radius $\sqrt[2]{t}$.

2: Hvis $u \equiv 0\ Mod(2) \wedge v \equiv 0\ Mod(2) \wedge t \in \mathbb{N}^2$ så er C cirkelligning for en cirkel med heltallig radius $\sqrt[2]{t}$ og centrum i punkt $P = (\frac{-u}{2}, \frac{-v}{2})$, som har heltallige x- og y-koordinater.

Dvs. når u og v er lige heltal og t er et kvadrattal - perfect square - så er cirklens radius heltallig og dens centrum har heltallige x- og y-koordinater.

3: $w = 0, (u, v) = (4(m^2 - n^2), 8mn)$ genererer cirkler med radius

$$r = 2(m^2 + n^2) = \sqrt[2]{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2}$$

BEVIS: PYT tripler [i]

CAS

1	(u,v)=(4(m^2-n^2),8m*n) $\rightarrow\ (\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = \left(4\,m^2 - 4\,n^2,\ 8\,m\,n\right)$
2	((u/2)^2, (v/2)^2) = (((4m^2 - 4n^2)/2)^2, ((8m n)/2)^2) $\rightarrow\ \left(\frac{u^2}{4},\ \frac{v^2}{4}\right) = \left(4\,m^4 - 8\,m^2\,n^2 + 4\,n^4,\ 16\,m^2\,n^2\right)$
3	(u/2)^2+ (v/2)^2=4m^4 - 8m^2 n^2 + 4n^4+ 16m^2 n^2 $\rightarrow\ \frac{1}{4}\,u^2 + \frac{1}{4}\,v^2 = 4\,m^4 + 4\,n^4 + 8\,m^2\,n^2$
4	4m^4 - 8m^2 n^2 + 4n^4+ 16m^2 n^2 $\rightarrow\ 4\,m^4 + 4\,n^4 + 8\,m^2\,n^2$
5	(4m^4 + 4n^4 + 8m^2 n^2)^0.5 $\rightarrow\ 2\,m^2 + 2\,n^2$
6	

4: 3: $w = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - q^2, q\ \in Z, (u, v) = (4(m^2 - n^2), 8mn)$ genererer cirkler med radius $r = q$.

Bevis: $t = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - w = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - q^2\right) = q^2, \sqrt[2]{t} = \sqrt[2]{q^2} = q$

$$r = 2(m^2 + n^2) = \sqrt[2]{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2}$$

Heltalligt centrum og radius: $B: u \equiv 0\ Mod(2) \wedge v \equiv 0\ Mod(2) \wedge w = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 - q^2, q\ \in Z$

$P = (-2(m^2 - n^2), -4mn)$ og med heltallig radius $2(m^2 + n^2) = \sqrt[2]{\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2}$ $((/(\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$.

$w = 4(m^2 + n^2)^2 - q^2, C$ cirkel med centrum i P og radius q.

Ved brug af ovenstående lemma kan cirklens ligning omformes fra et parentesløst udtryk til 'normalformen'.

Opgaver med cirkelligninger.

Omskriv ligningerne nedenfor på standardformen for cirkelligninger og udfyld de tomme celler med centrumspunktet og radius.

			Centrum P	r
1	$x^2 + 14x + y^2 - 12y + 21 = 0$			
2	$x^2 + 10x + y^2 - 24y = 0$			
3	$x^2 - 16x + y^2 + 30y = 0$			
4	$x^2 - 40x + y^2 - 42y = 0$			
5	$x^2 - 50x + y^2 + 120y = 0$			
6	$x^2 + 24x + y^2 - 32y = 0$			
7	$x^2 + 24x + y^2 - 18y = 0$			
8	$x^2 + 24x + y^2 + 70y = 0$			
9	$x^2 + 16x + y^2 + 12y = 0$			
10	$x^2 + 14x + y^2 + 48y = 0$			
11	$x^2 - 20x + y^2 + 48y = 0$			
12	$12: x^2 + 36x + y^2 + 48y = 0$			
13	$13: x^2 - 64x + y^2 + 48y = 0$			
14	$14: x^2 - 90x + y^2 + 48y = 0$			
15	$15: x^2 + 286x + y^2 + 48y = 0$			

Eksempel.

1: $x^2 + 14x + y^2 - 12y + 21 = 0$

2: $x^2 + 10x + y^2 - 24y = 0$

3: $x^2 - 16x + y^2 + 30y = 0$

4: $x^2 - 40x + y^2 - 42y = 0$

5: $x^2 - 50x + y^2 + 120y = 0$

6: $x^2 + 24x + y^2 - 32y = 0$

7: $x^2 + 24x + y^2 - 18y = 0$

8: $x^2 + 24x + y^2 + 70y = 0$

9: $x^2 + 16x + y^2 + 12y = 0$

10: $x^2 + 14x + y^2 + 48y = 0$

11: $x^2 - 20x + y^2 + 48y = 0$

12: $x^2 + 36x + y^2 + 48y = 0$

13: $x^2 - 64x + y^2 + 48y = 0$

14: $x^2 - 90x + y^2 + 48y = 0$

15: $x^2 + 286x + y^2 + 48y = 0$

Løsninger.

2:

$x^2 + 10x + y^2 - 24y = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 - 25 + (y-12)^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 169 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-12)^2 = 13^2$

3:

$x^2 - 16x + y^2 + 30y = 0 \Leftrightarrow (x-8)^2 - 64 + (y+15)^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow$

$(x-8)^2 + (y+15)^2 = 289 \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-12)^2 = 17^2$

1:

$$x^2 + 14x + y^2 - 12y + 21 = 0 \Leftrightarrow (x+7)^2 - 49 + (y-6)^2 - 36 + 21 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+7)^2 + (y-6)^2 = 64 \Leftrightarrow (x+7)^2 + (y-6)^2 = 8^2$$

---

i

CAS

1	(u,v)=(4(m^2-n^2),8m*n) $\rightarrow\ (\mathbf{u},\ \mathbf{v}) = (4\ \mathbf{m}^2 - 4\ \mathbf{n}^2,\ 8\ \mathbf{m}\ \mathbf{n})$
2	((u/2)^2, (v/2)^2) = (((4m² - 4n²)/2)^2, ((8m n)/2)^2) $\rightarrow\ \left(\frac{\mathbf{u}^2}{4},\ \frac{\mathbf{v}^2}{4}\right) = (4\ \mathbf{m}^4 - 8\ \mathbf{m}^2\ \mathbf{n}^2 + 4\ \mathbf{n}^4,\ 16\ \mathbf{m}^2\ \mathbf{n}^2)$
3	(u/2)^2+ (v/2)^2=4m⁴ - 8m² n² + 4n⁴+ 16m² n² $\rightarrow\ \frac{1}{4}\ \mathbf{u}^2 + \frac{1}{4}\ \mathbf{v}^2 = 4\ \mathbf{m}^4 + 4\ \mathbf{n}^4 + 8\ \mathbf{m}^2\ \mathbf{n}^2$
4	4m⁴ - 8m² n² + 4n⁴+ 16m² n² $\rightarrow\ 4\ \mathbf{m}^4 + 4\ \mathbf{n}^4 + 8\ \mathbf{m}^2\ \mathbf{n}^2$
5	(4m⁴ + 4n⁴ + 8m² n²)^0.5 $\rightarrow\ 2\ \mathbf{m}^2 + 2\ \mathbf{n}^2$
6	