Die allgemeine Form der quadratischen Funktion

Wir wissen:

Scheitelpunkt S mit $S = (d|e)$ für Scheitelpunktform:

$$y = a(x-d)^2 + e \text{ und } a \neq 0.$$

Herleitung der allgemeinen Form der quadratischen Funktion:

$a(x-d)^2 + e$	2. binomische Formel
$= a(x^2 - 2dx + d^2) + e$	Klammer auflösen; ausmultiplizieren mit a
$= ax^2 - 2adx + ad^2 + e$	Neue Variablen einführen: b und c
$= ax^2 + bx + c$	$\boldsymbol{b \coloneqq -2ad}$ $\boldsymbol{c \coloneqq ad^2 + e}$

Anwendung:

a) Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt S, wenn die **allgemeine Form: y=** $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ mit $a \neq 0$ gegeben ist?

b) Gib die zugehörige Scheitelpunktform an.

1. Berechnung von d:

$$b = -2ad \quad | \div (-2a)$$

$$\frac{b}{-2a} = d$$

$$\boldsymbol{d = -\frac{b}{2a}}$$

2. Berechnung von e:

$$c = ad^2 + e \quad | -ad^2$$

$$c - ad^2 = e \quad | \, d := -\frac{b}{2a}$$

$$c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = e$$

$$c - \frac{b^2}{4a} = e$$

$$e = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\boldsymbol{e = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

Merke:

Scheitelpunkt: $S = \left(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Beispiel

Gegeben: $f(x) = 8x^2 - 32x + 33$
Gesucht: a) Scheitelpunkt S b) Scheitelpunktform

Lösung zu a):

1. Lies aus $f(x) = 8x^2 - 32x + 33$ die Koeffizienten a, b und c ab.

   $a = 8$
   $b = -32$
   $c = 33$

2. Berechne x_S mit $\boldsymbol{x_S = -\frac{b}{2a}}$.

$$x_S = -\frac{(-32)}{2 \cdot 8}$$

$$= 2$$

3. Berechne y_S mit $\boldsymbol{y_S = \frac{4ac - b^2}{4a}}$.

$$y_S = \frac{4 \cdot 8 \cdot 33 - (-32)^2}{4 \cdot 8}$$

$$= 1$$

4. Scheitelpunkt S mit $S = (2|1)$.

Lösung zu b): Scheitelpunktform: $y = 8(x - 2)^2 + 1$.