Ruimtemeetkunde

www.karelappeltans.be

November 18, 2021

1 herhaling 2D

1.1 vectoren

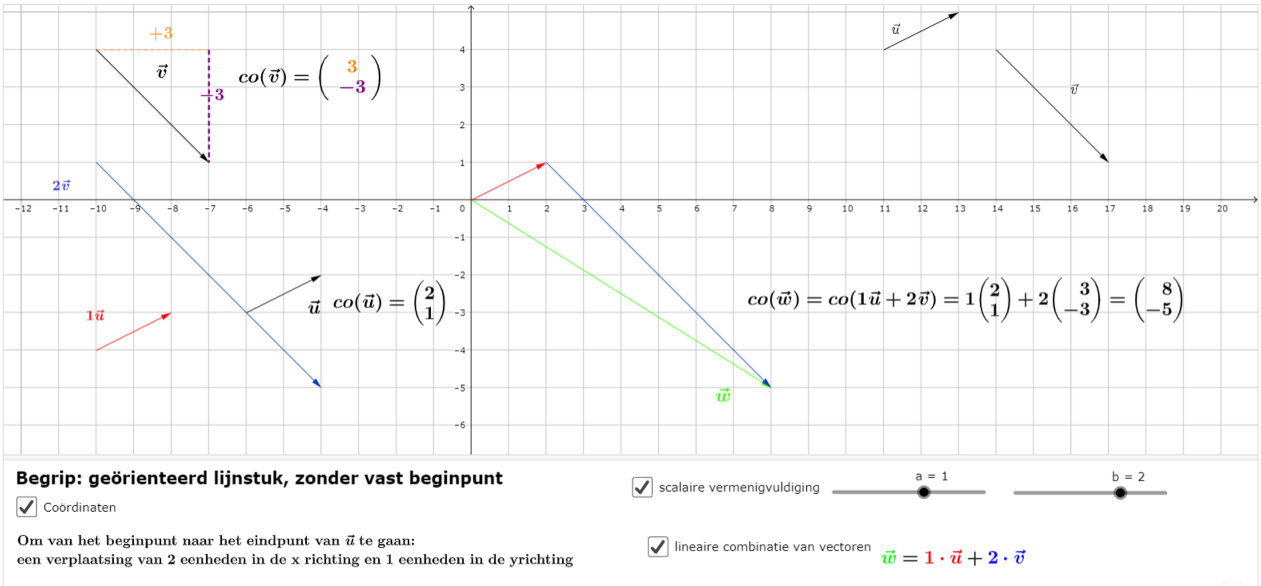


Figure 1: https://www.geogebra.org/m/cRmm4Ez4

1.2 vergelijking rechte

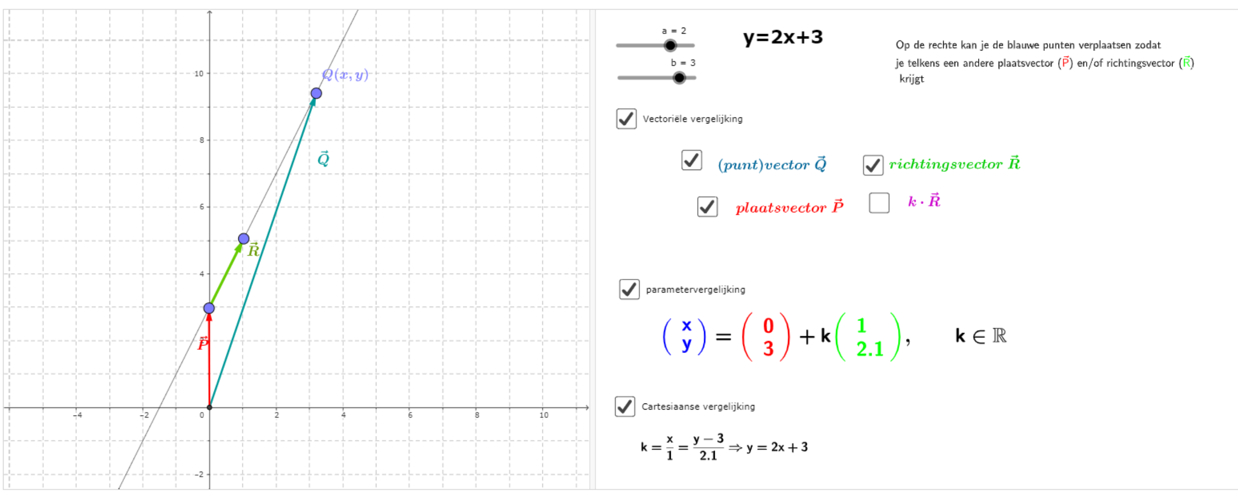


Figure 2: https://www.geogebra.org/m/vzmgsnny

2 punt

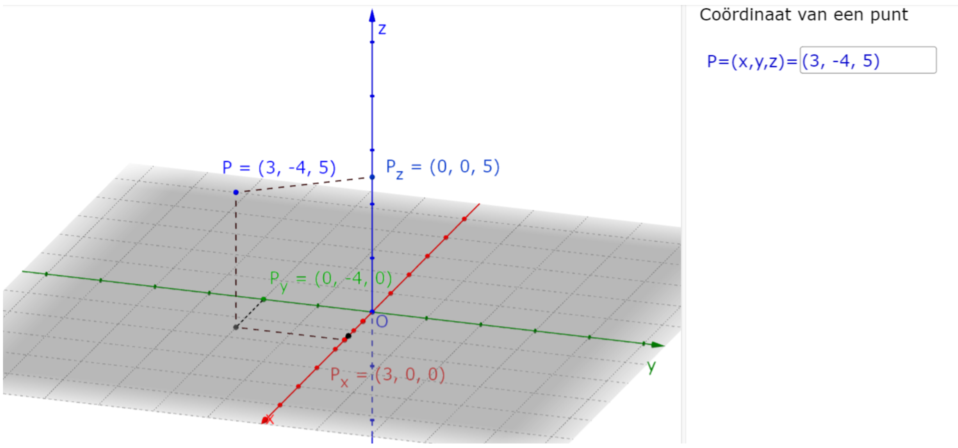


Figure 3: https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg

3 Vectoren

3.1 puntvector

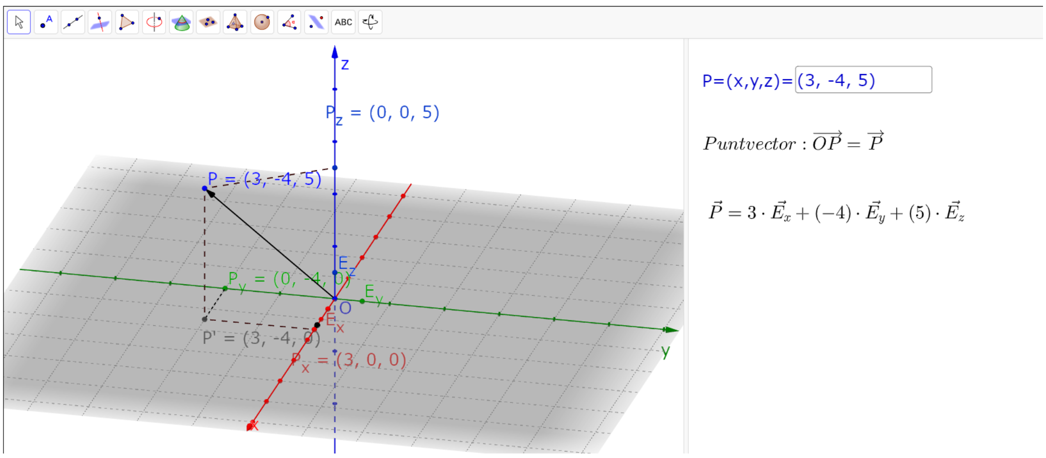


Figure 4: https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg

3.2 willekeurige vector

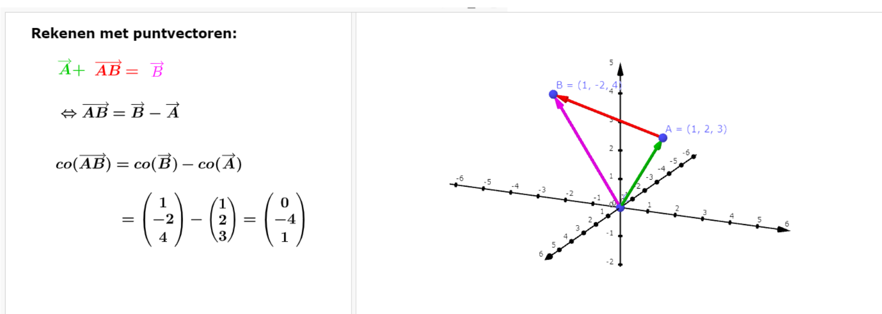


Figure 5: https://www.geogebra.org/m/msnt9fvp

3.3 norm en scalair product

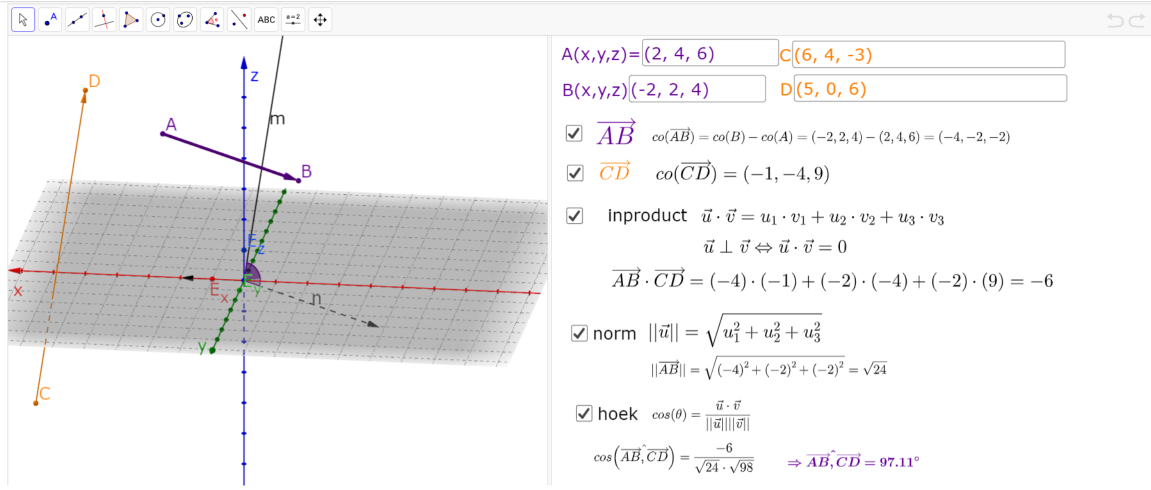


Figure 6: https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg

4 vectorruimte

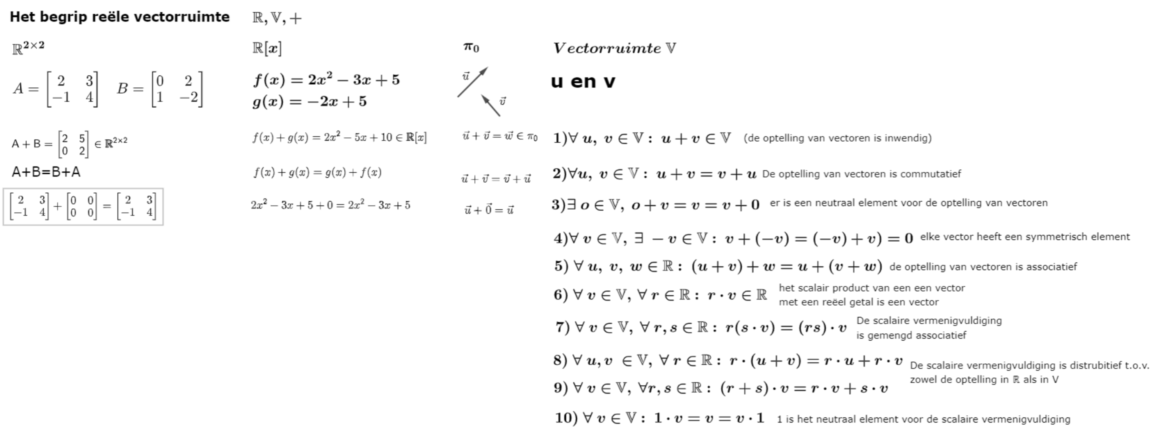


Figure 7: https://www.geogebra.org/m/fgsz7ma5

5 rechte

5.1 begripsvorming

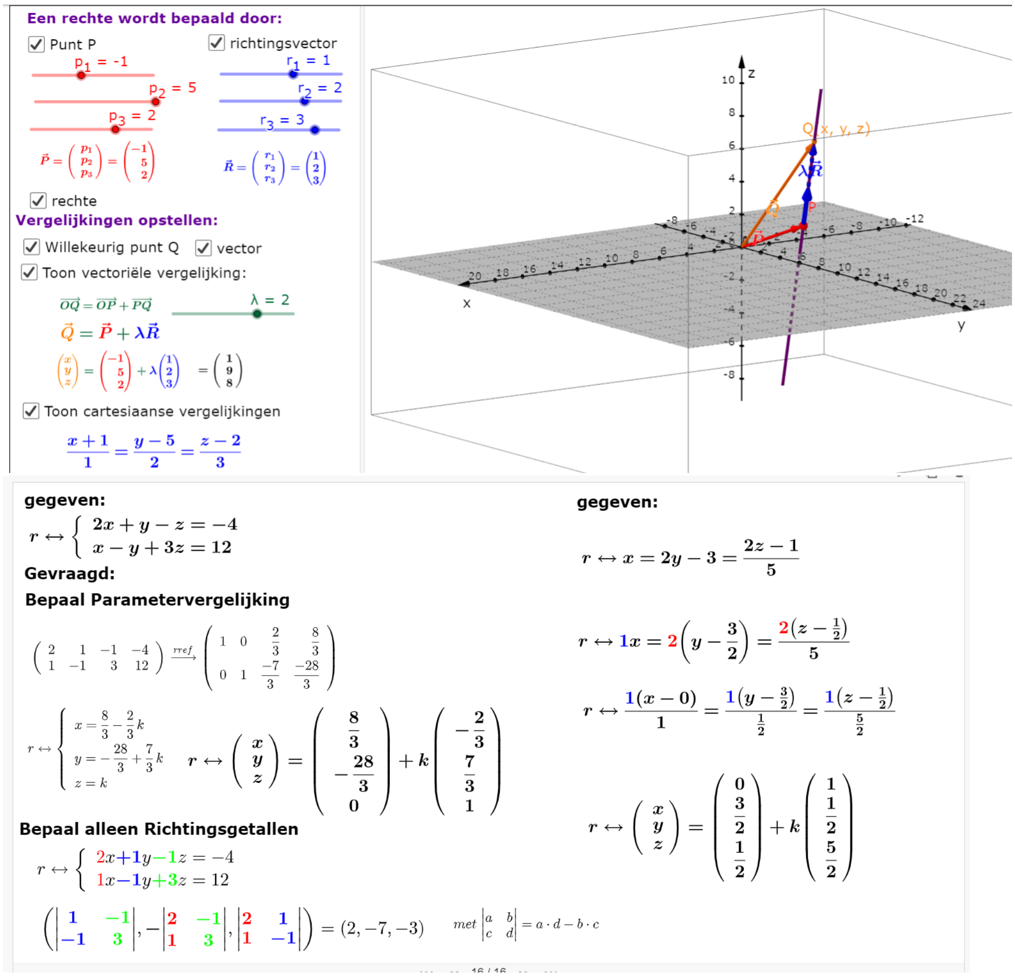


Figure 8: https://www.geogebra.org/m/h2NSnEu4

5.2 onderlinge stand twee rechten

5.2.1 mogelijke gevallen

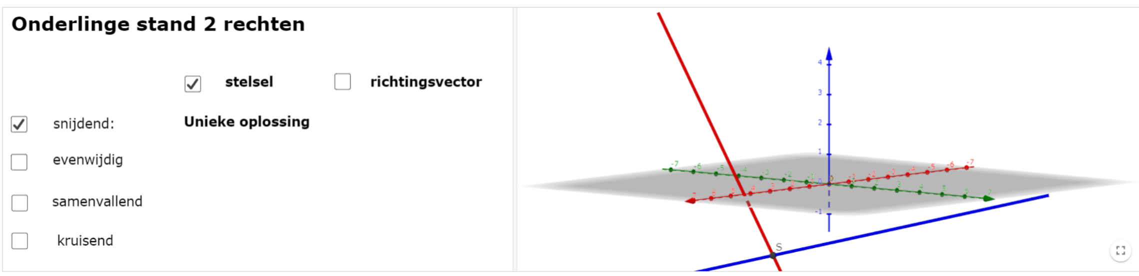


Figure 9: https://www.geogebra.org/m/tmzxrbbh

5.2.2 snijdende rechten

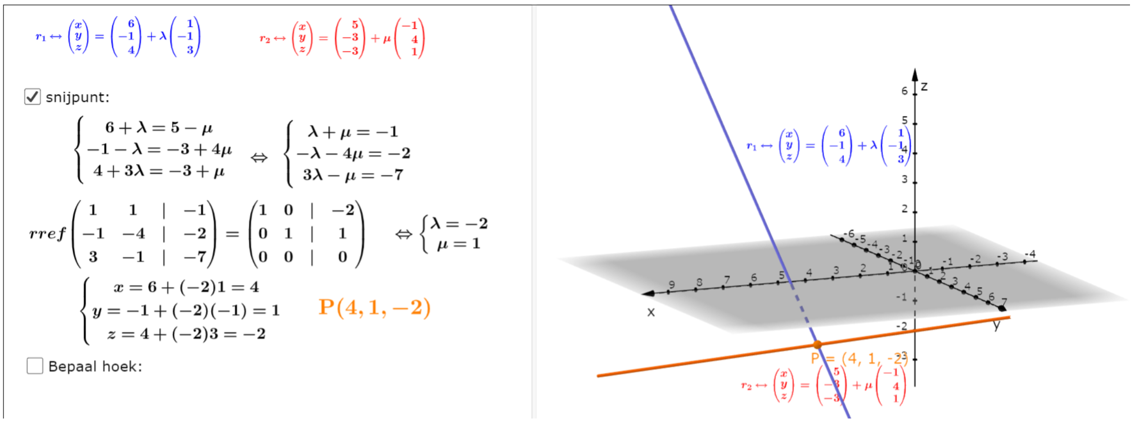


Figure 10: https://www.geogebra.org/m/tmzxrbbh

6 vlak

6.1 begripsvorming

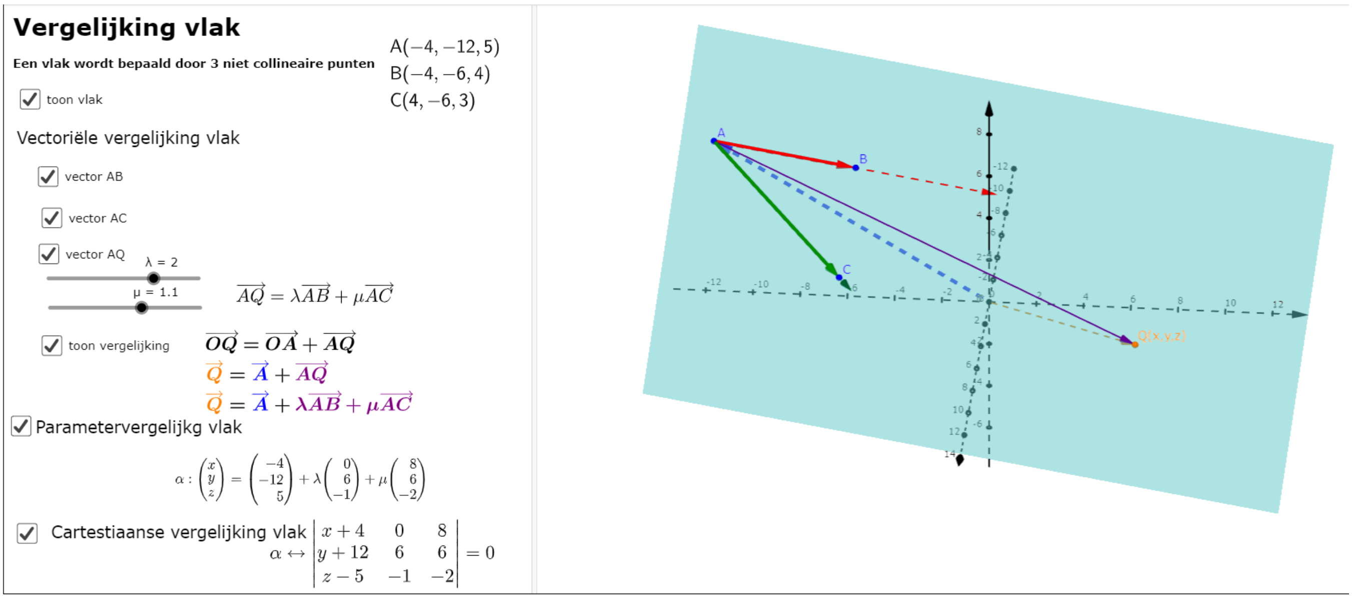


Figure 11: https://www.geogebra.org/m/tyxzar6k

6.2 onderlinge stand twee vlakken

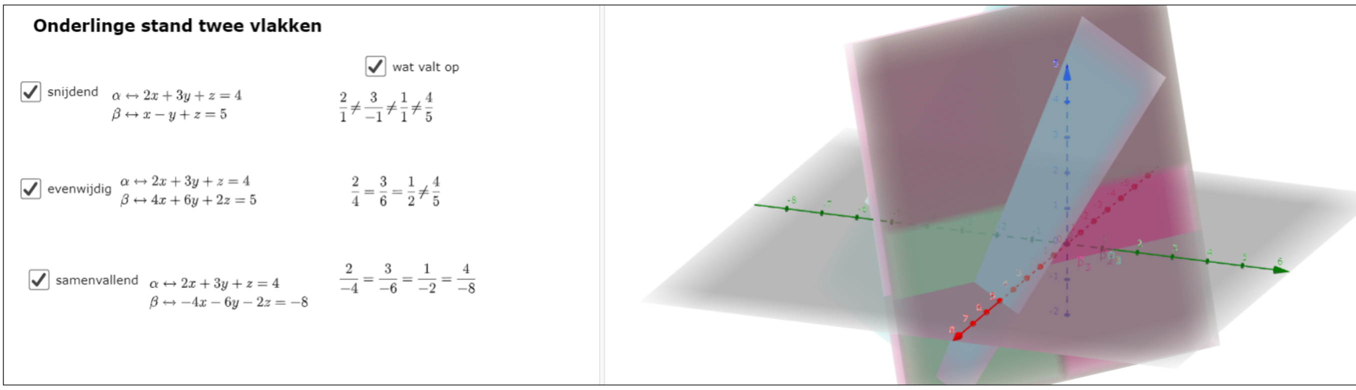


Figure 12: https://www.geogebra.org/m/r3tjnhga

6.3 vlakkenwaaier

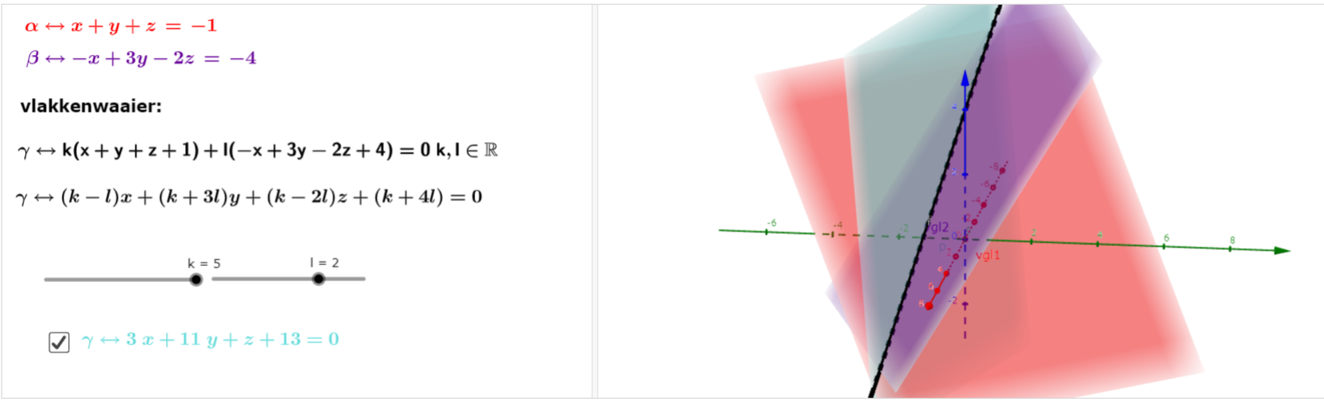


Figure 13: https://www.geogebra.org/m/zkqecuwg

6.4 onderlinge stand rechte en vlak

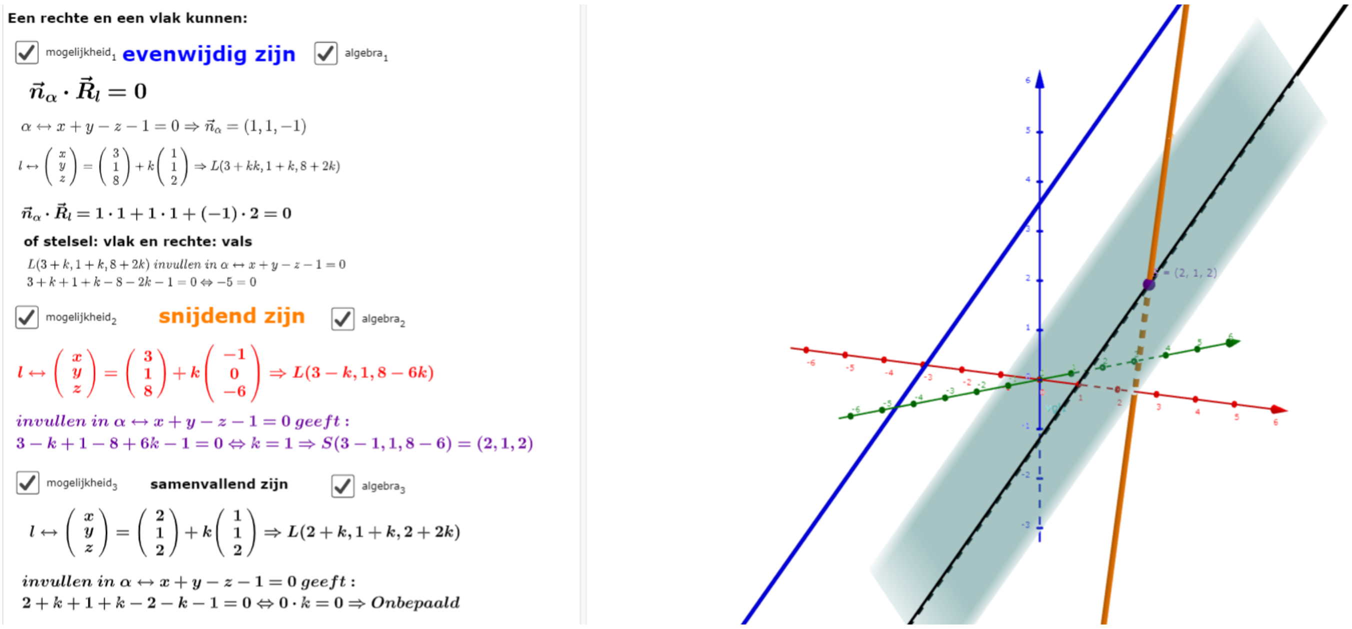


Figure 14: https://www.geogebra.org/m/qpjszrty

7 loodrechte stand

7.1 norm&scalair product van twee vectoren

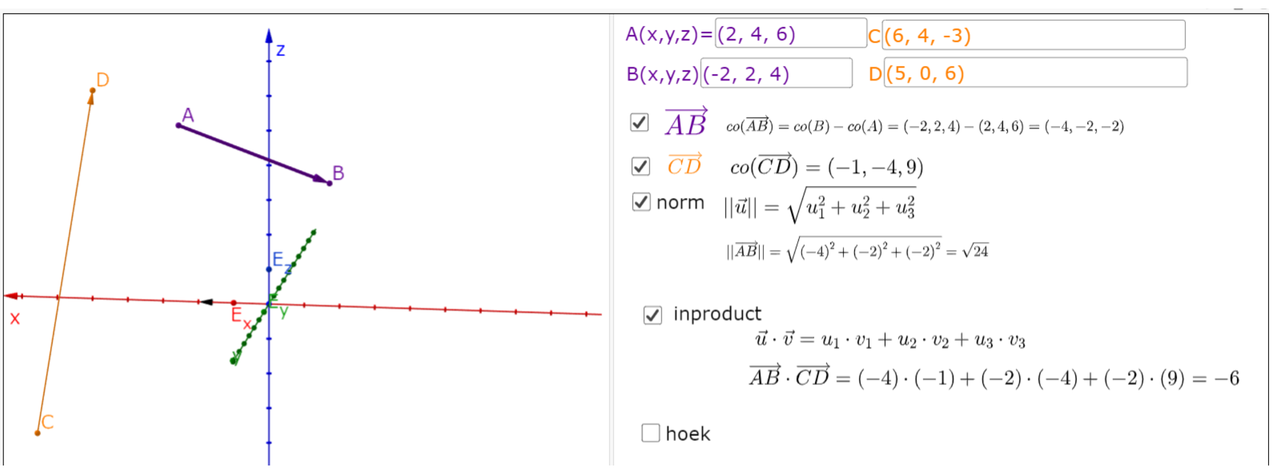


Figure 15: https://www.geogebra.org/m/Up7HKEmg

7.2 loodrechte stand van twee rechten

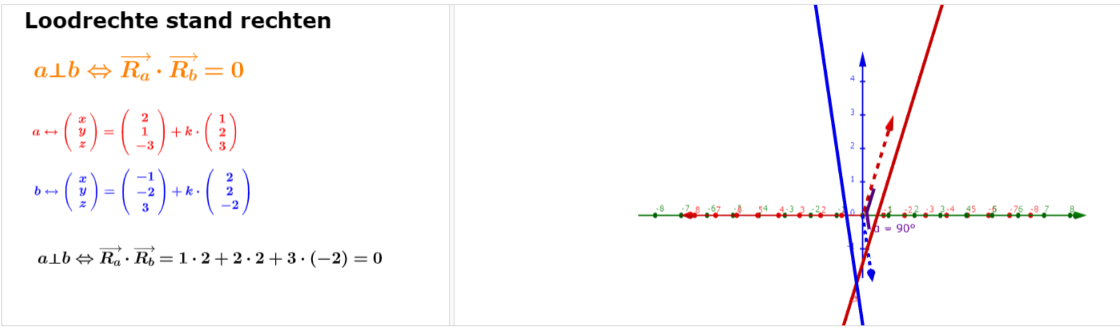


Figure 16: https://www.geogebra.org/m/furru9tk

7.3 normaalvectoren van vlakken

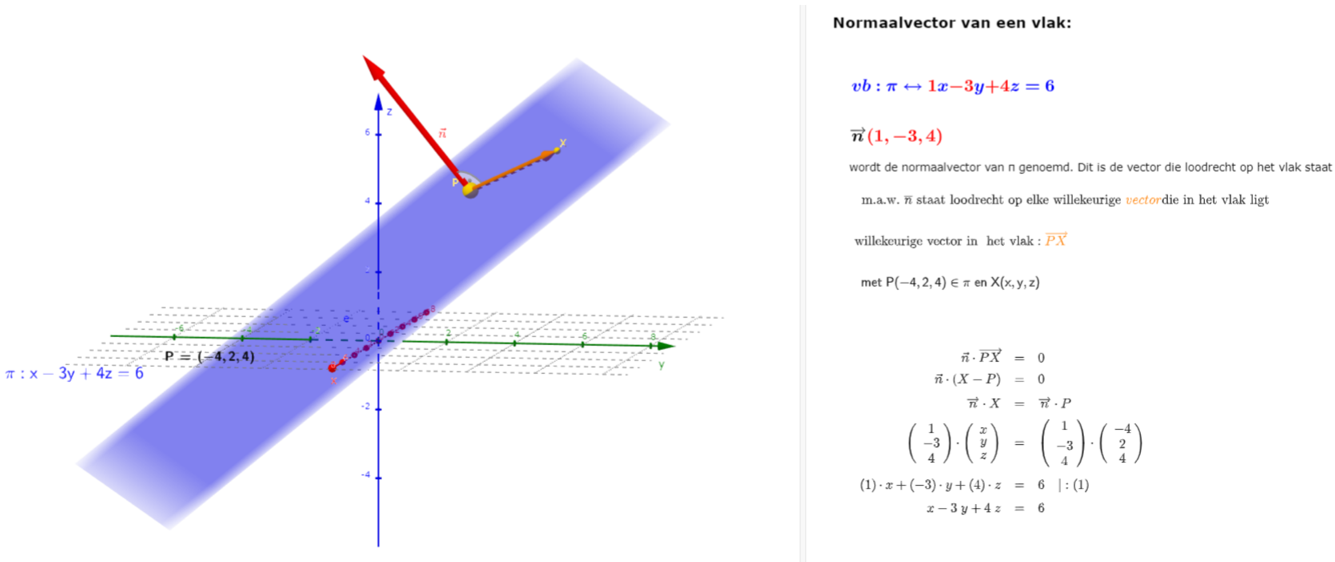


Figure 17: https://www.geogebra.org/m/tyxzar6k

7.4 loodrechte stand van twee vlakken

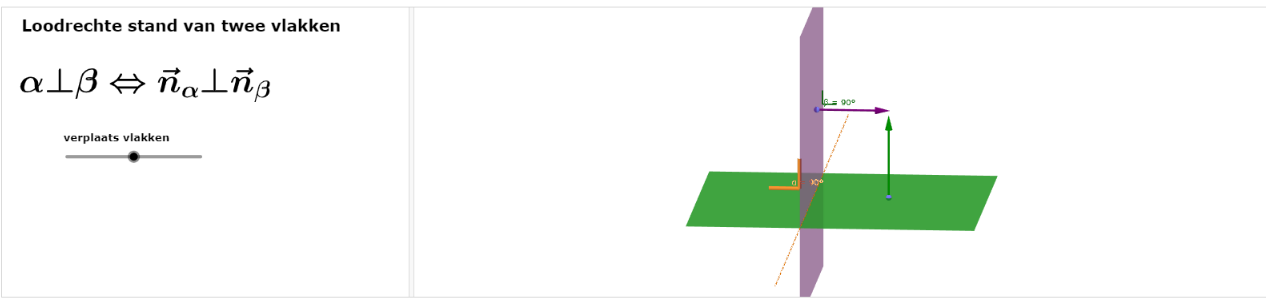


Figure 18: https://www.geogebra.org/m/r3tjnhga

8 afstanden

8.1 afstand tussen twee punten

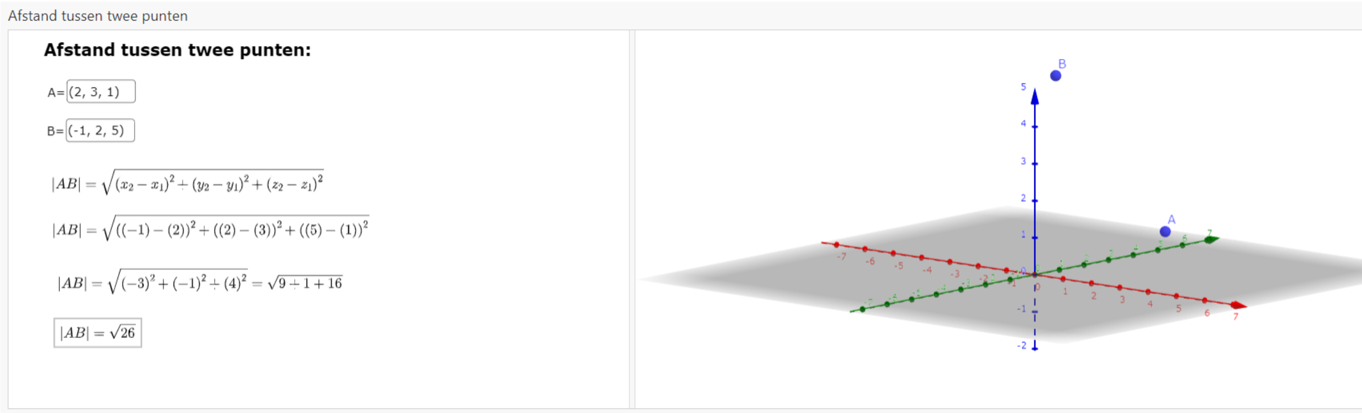


Figure 19: https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv

8.2 afstand tussen punt en rechte

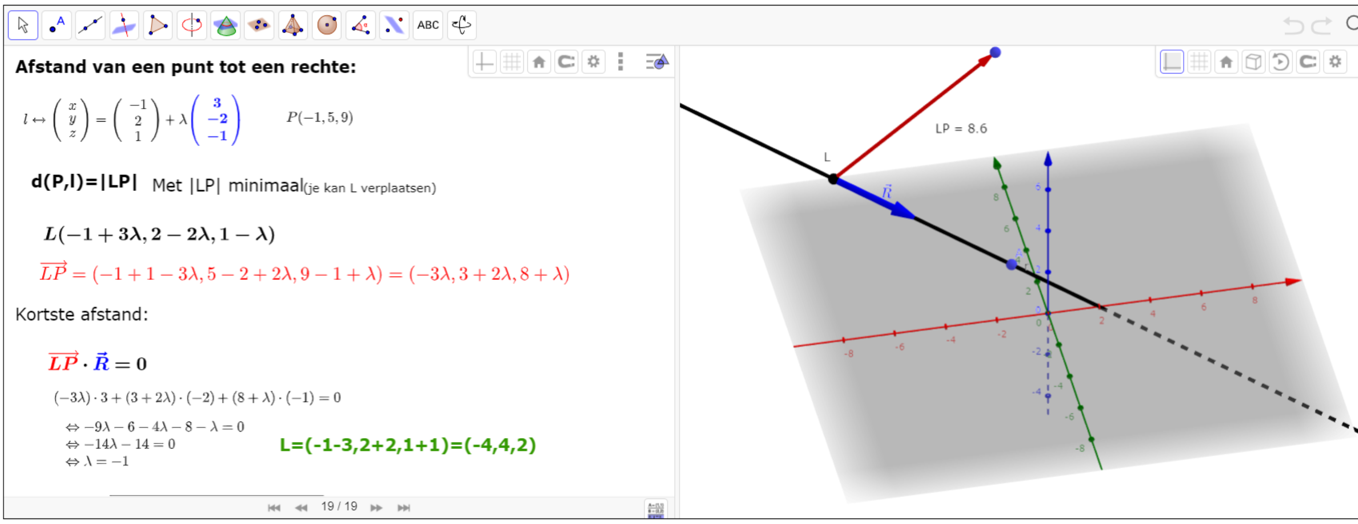


Figure 20: https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv

8.3 afstand tussen twee kruisende rechten

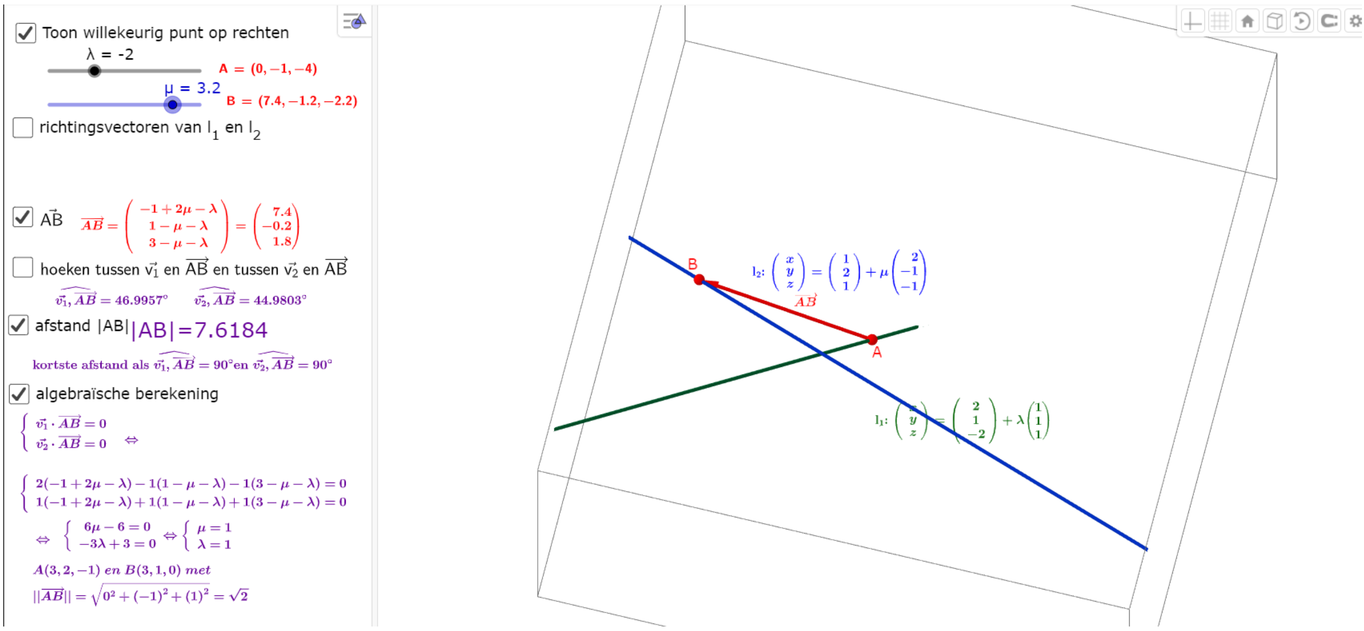
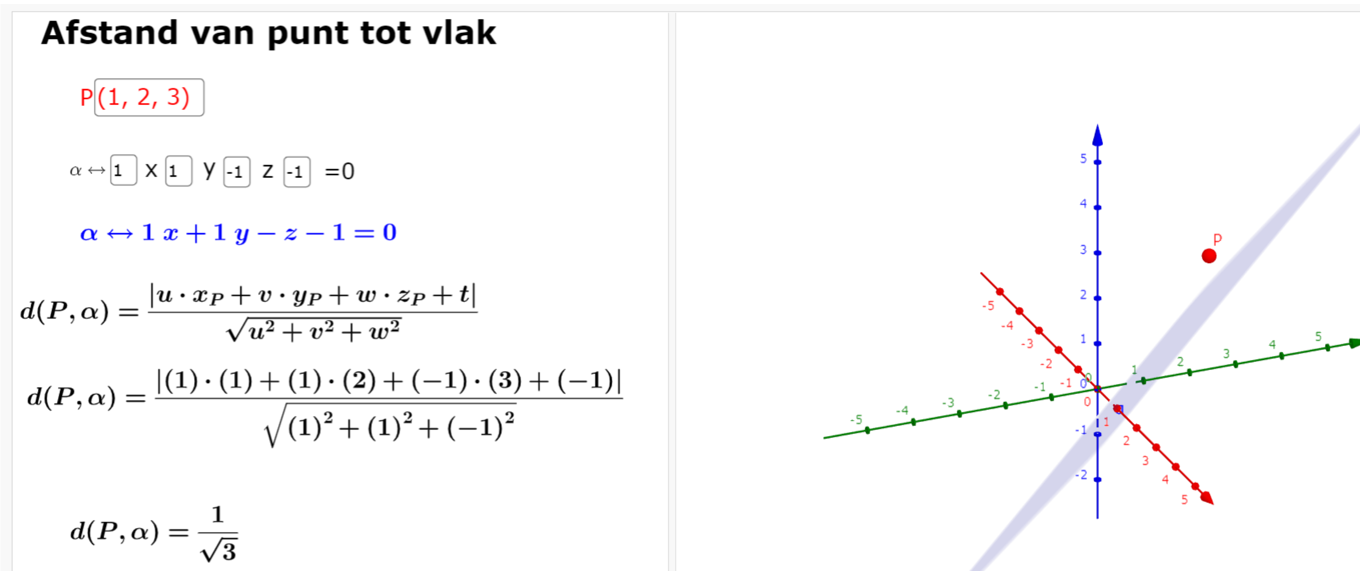


Figure 21: https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv

8.4 afstand tussen punt en vlak



$$\alpha \leftrightarrow 1\,x + 1\,y - z - 1 = 0$$

$$d(P,\alpha) = \frac{|u \cdot x_P + v \cdot y_P + w \cdot z_P + t|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

$$d(P,\alpha) = \frac{|(1)\cdot(1) + (1)\cdot(2) + (-1)\cdot(3) + (-1)|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}$$

$$d(P,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Figure 22: https://www.geogebra.org/m/a7fx9aqv

9 hoeken

9.1 tussen 2 rechten

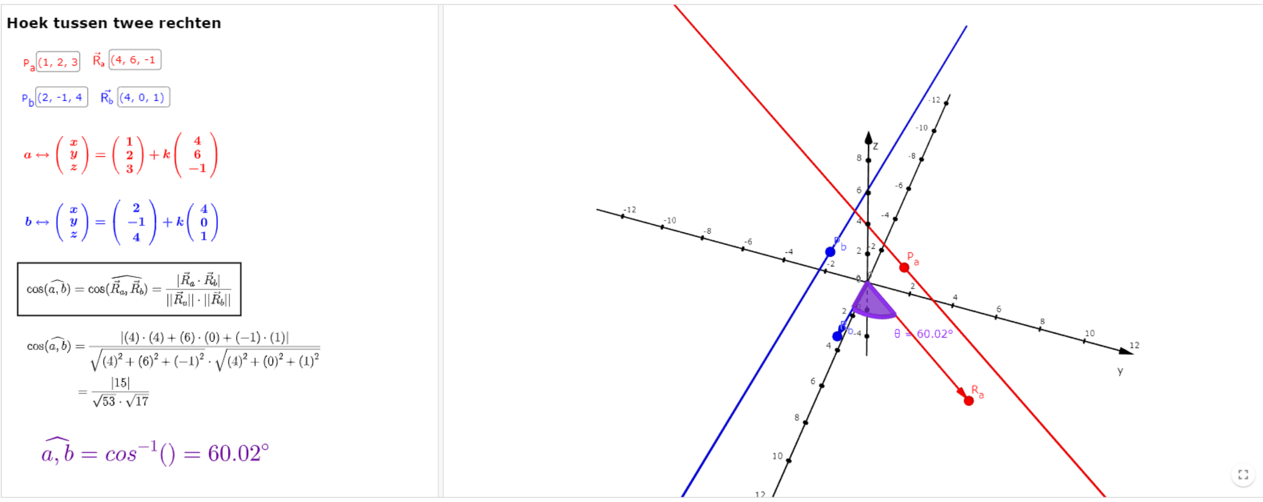


Figure 23: https://www.geogebra.org/m/furru9tk

9.2 tussen 2 snijdende vlakken

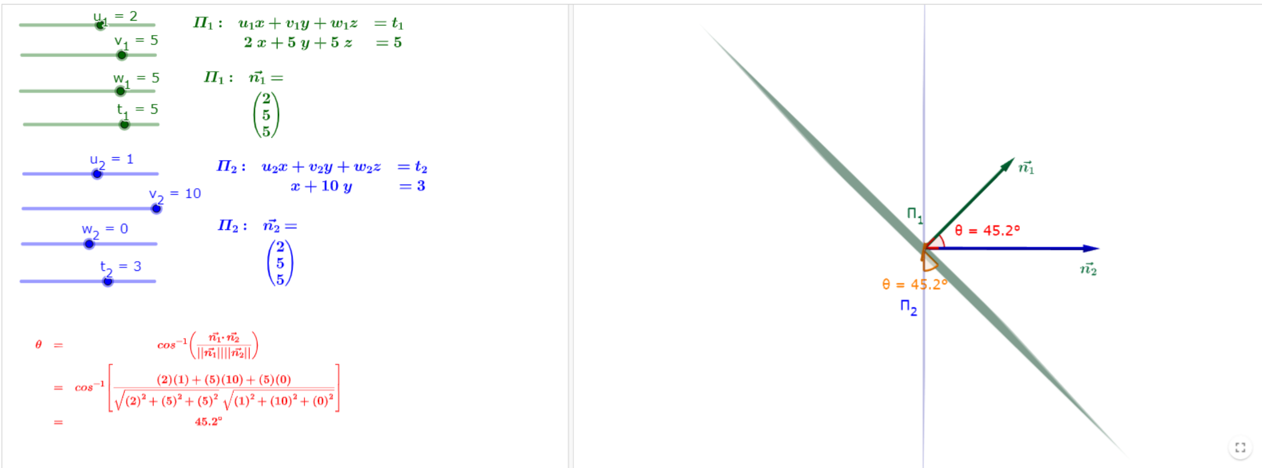


Figure 24: https://www.geogebra.org/m/r3tjnhga

9.3 tussen een rechte en een vlak

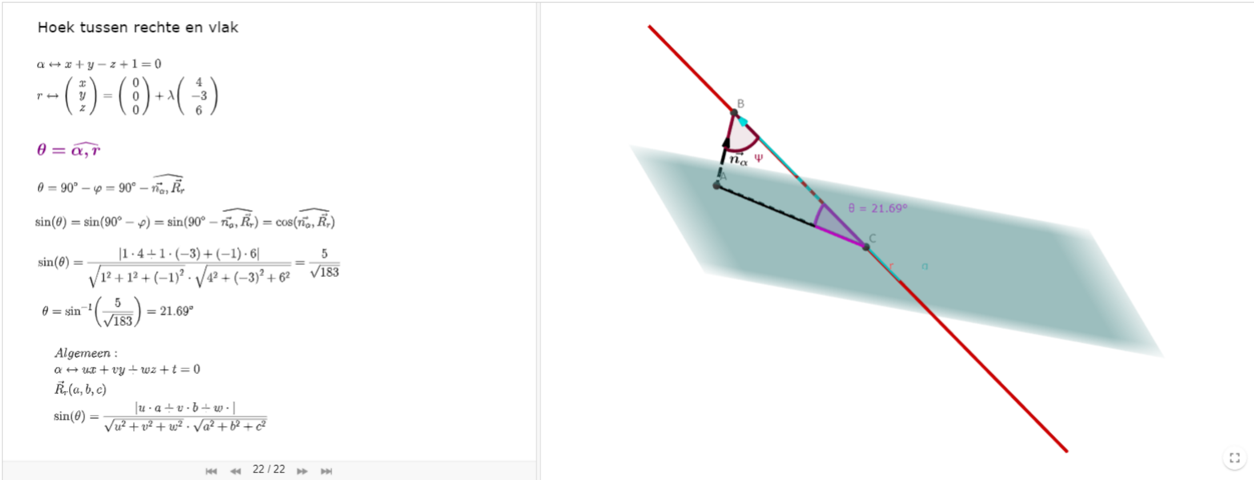


Figure 25: https://www.geogebra.org/m/qpjszrty

10 meetkundige plaatsen

10.1 bollen

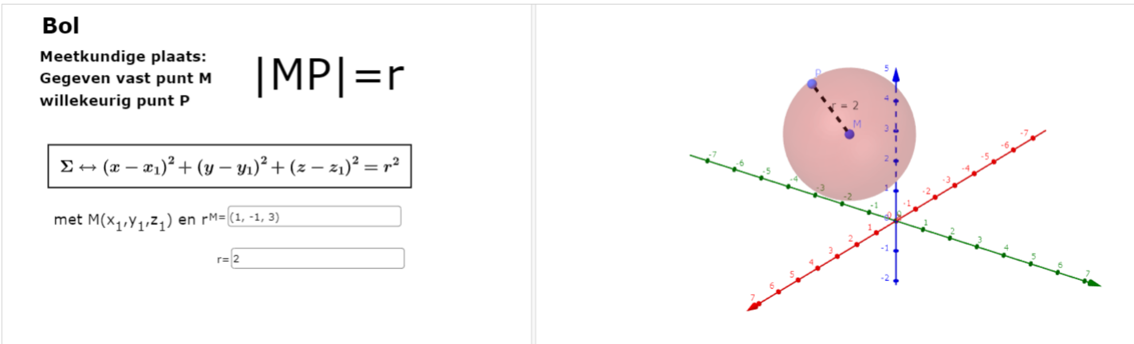


Figure 26: https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd

10.2 middelloodvlakken

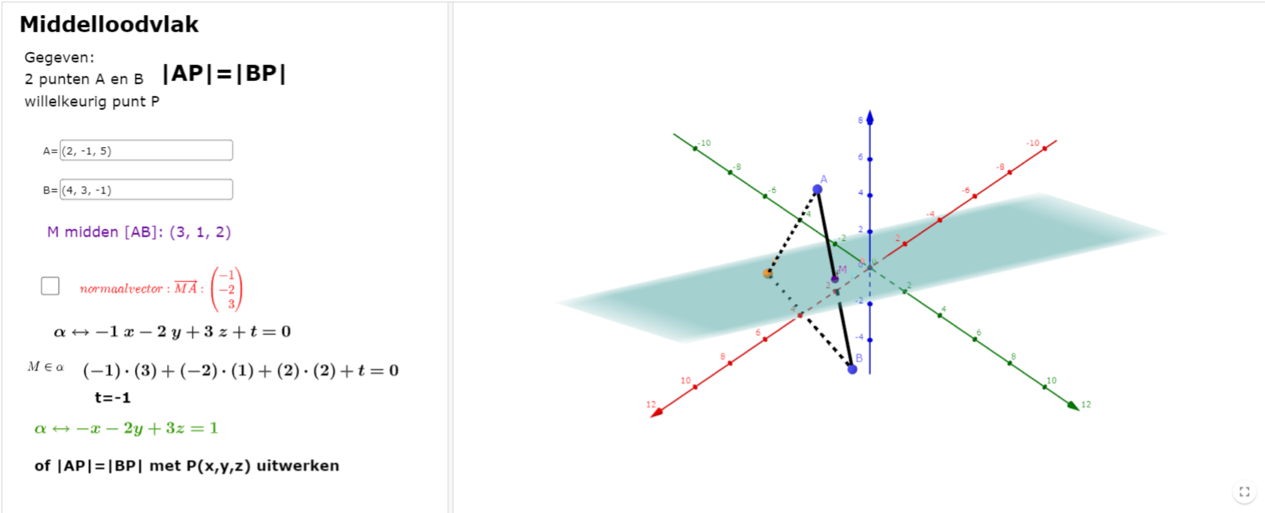


Figure 27: https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd

10.3 bissectorvlakken

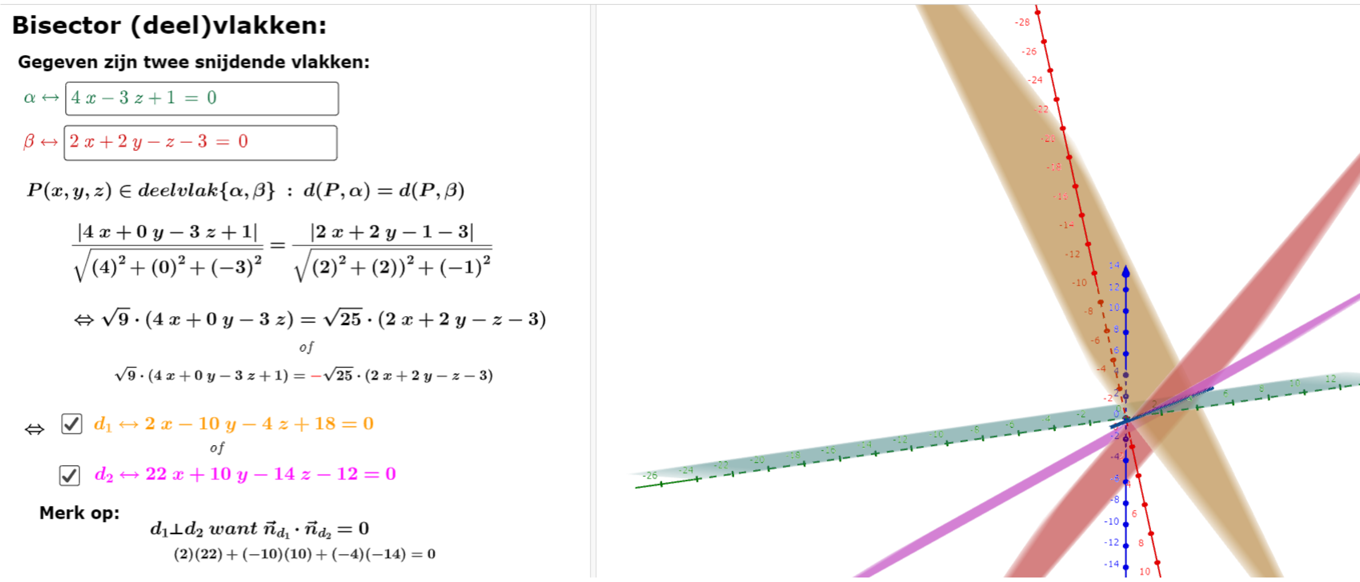


Figure 28: https://www.geogebra.org/m/jsffxvqd

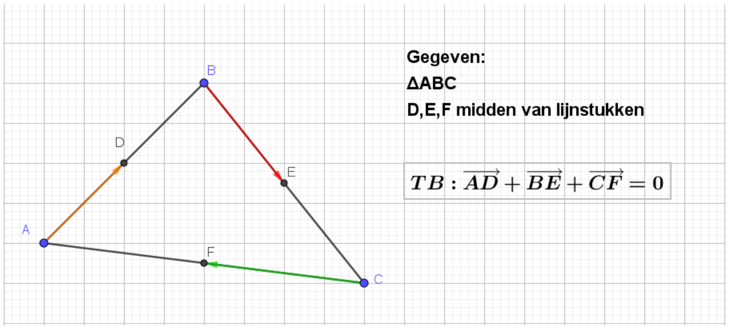
11 Toepassing

Van foto's tot 3-dimensionale modellen: de wiskunde achter virtuele realiteit

12 Oefeningen

12.1 vectoren

1. Bewijs:



2. midden van een lijnstuk

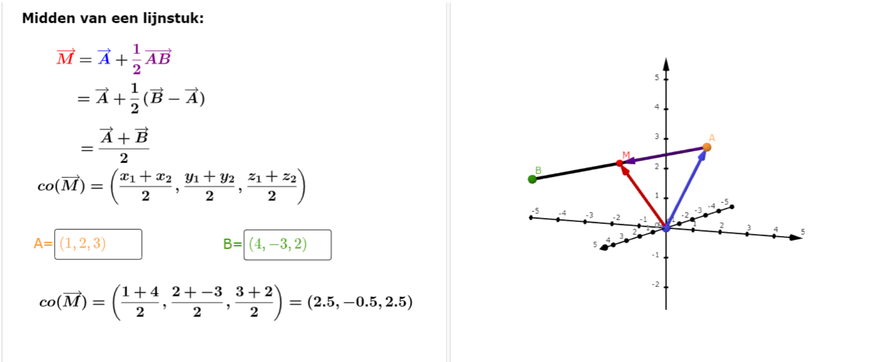


Figure 29: https://www.geogebra.org/m/msnt9fvp

3. zwaartepunt van een driehoek

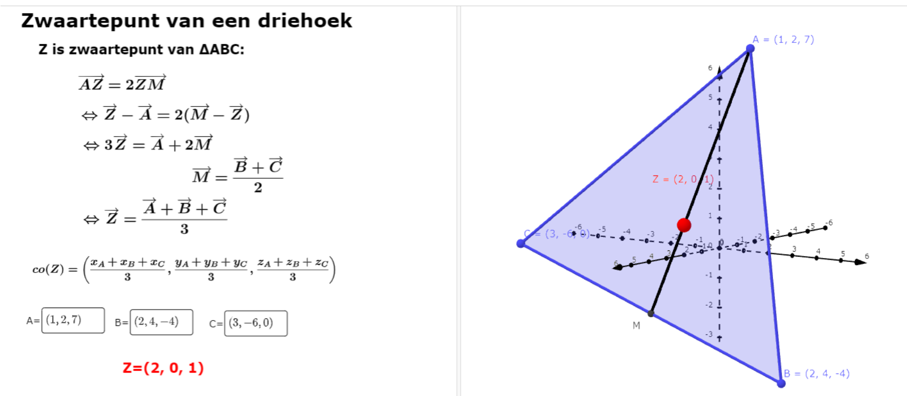


Figure 30: https://www.geogebra.org/m/msnt9fvp

4. Bewijs

VABCD is a pyramid with a rectangular base ABCD.

Relative to some appropriate axes,

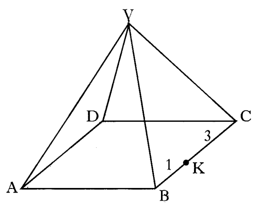
$\overrightarrow{VA}$ represents $-7\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}$

$\overrightarrow{AB}$ represents $6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$

$\overrightarrow{AD}$ represents $8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

K divides BC in the ratio 1:3.

Find $\overrightarrow{VK}$ in component form.



3

5. oefening 51 uit bundel

6. Geef VV, PV van CV $y = -x + 4$

12.2 ijkingsproeven

1. Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel en de rechte r met parametervergelijking $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$. Verder hebben we twee vlakken v_1 en v_2 met vergelijkingen $v_1 \leftrightarrow x + 2y + 3z = 3$ en $v_2 \leftrightarrow x + y + z = 6$. Welk van de volgende uitspraken is waar?

   (a) de rechte r is evenwijdig met het vlak v_1
   (b) de rechte r is evenwijdig met het vlak v_2
   (c) de rechte r staat loodrecht op het vlak v_1
   (d) de rechte r staat loodrecht op het vlak v_2

   (antw: d)

2. Gegeven: het vlak $\alpha \leftrightarrow 4x - 2y + 4z = 1$ en het punt $P(1, 1, 1)$. Er zijn twee vlakken β evenwijdig met α zodat de afstand van het vlak α tot het vlak β gelijk is aan de afstand tussen het punt P en het vlak α. Welk van de onderstaande vergelijkingen is een cartesiaanse vergelijking van één van deze vlakken β?

   (a) $4x - 2y + 4z = -8$
   (b) $4x - 2y + 4z = -4$
   (c) $4x - 2y + 4z = \frac{1}{6}$
   (d) $4x - 2y + 4z = \frac{11}{6}$

   (antw: b)

3. Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel en de rechte r met parametervergelijking $r \leftrightarrow \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 2 \\ z = -3t + 2, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$. Welk van de onderstaande vectoren is evenwijdig met de rechte r?

   (a) $(1, -1, 1)$
   (b) $(1, 0, 1)$
   (c) $(1, 1, 1)$
   (d) $(1, 2, 1)$

   (antw. b)

4. Beschouw de driedimensionale ruimte met cartesiaans assenstelsel, het punt P(0,1,-1) en de rechte r met parametervergelijking $r \leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$. Wat is de x-coördinaat van het punt op de rechte r dat het dichtst bij het punt P ligt?

   (a) $\frac{1}{14}$
   (b) $\frac{3}{14}$
   (c) 1
   (d) 3

   (antw.b)

12.3 Toepassing

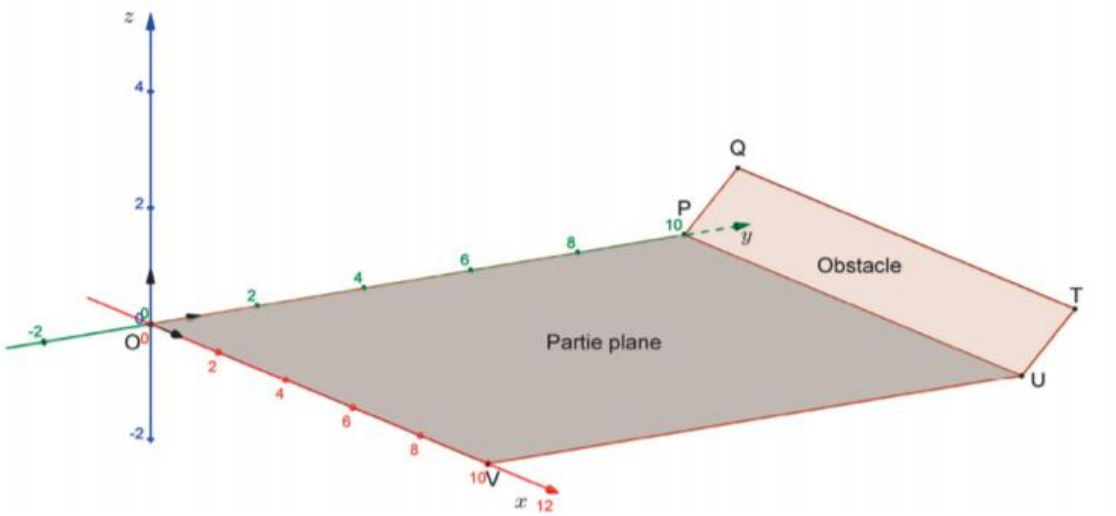
Meetkundig probleem met diverse hulpmiddelen voorstellen en oplossen

Alex et Élisa, deux pilotes de drones, s'entraînent sur un terrain constitué d'une partie plane qui est bordée par un obstacle.

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, une unité correspondant à dix mètres. Pour modéliser le relief de la zone, on définit six points O, P, Q, T, U et V par leurs coordonnées dans ce repère :

$$O(0\,;0\,;0),\ P(0\,;10\,;0),\ Q(0\,;11\,;1),\ T(10\,;11\,;1),\ U(10\,;10\,;0) \text{ et } V(10\,;0\,;0)$$

La partie plane est délimitée par le rectangle OPUV et l'obstacle par le rectangle PQTU.



Les deux drones sont assimilables à deux points et on suppose qu'ils suivent des trajectoires rectilignes :

- le drone d'Alex suit la trajectoire portée par la droite (AB) avec $A(2\,;4\,;0{,}25)$ et $B(2\,;6\,;0{,}75)$;
- le drone d'Élisa suit la trajectoire portée par la droite (CD) avec $C(4\,;6\,;0{,}25)$ et $D(2\,;6\,;0{,}25)$.

Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2.
   a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(0\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).

3. Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées$\left(2\,;\,\frac{37}{3}\,;\,\frac{7}{3}\right)$.
4. Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.

L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.

Pour cela, on considère un point M de la droite (AB) et un point N de la droite (CD).

Il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = a\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CN}} = b\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

On s'intéresse donc à la distance MN.

1. Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ sont $(2-2b\,;2-2a\,;\,-0{,}5a)$.

2. On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance MN est minimale lorsque la droite (MN) est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).
   Démontrer alors que la distance MN est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

3. En déduire la valeur minimale de la distance MN puis conclure.