

Problemas tipo Selectividad con enunciado contextualizado y con pregunta conceptual

CURSO

2ºBach
Mates II

TEMA

Tema 3: Ampliación
derivabilidad

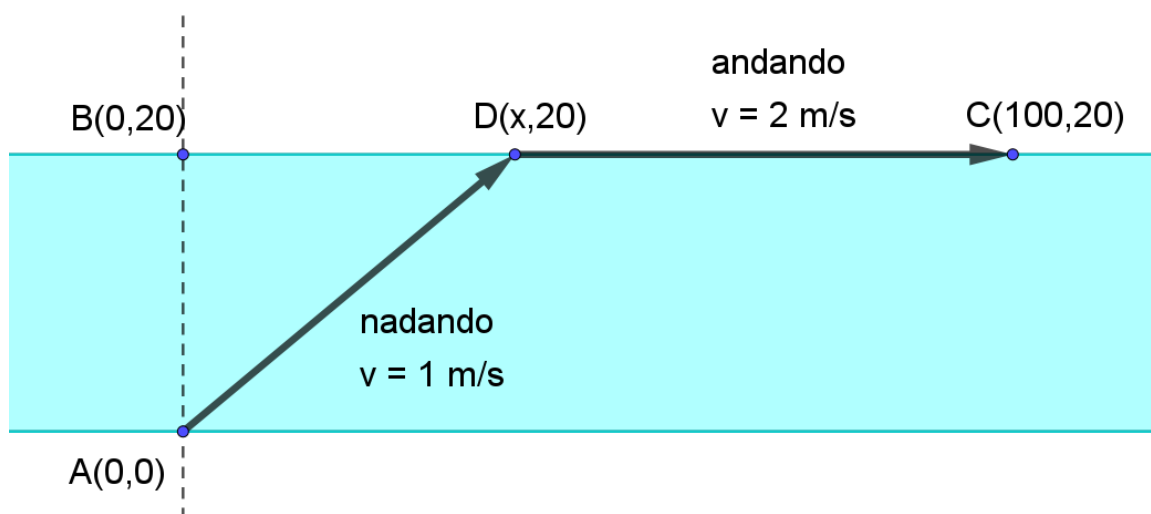
WWW.DANIPARTAL.NET

Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

PROBLEMA 1

Un joven se sitúa en el punto A en una orilla de un río de 20 metros de ancho. Sea B el punto de la orilla opuesta justo enfrente de A. El joven desea llegar a un punto C situado a 100 metros de B, en la orilla opuesta de A. Para ello, puede cruzar a nado desde A hasta un cierto punto D situado entre B y C a una velocidad de 1 m/s. Luego, puede continuar a pie de D a C a una velocidad de 2 m/s. ¿A qué distancia debe estar el punto D de B para que el joven llegue de A a C en el menor tiempo posible?

Un dibujo esquemático, en dos dimensiones, nos ayuda mucho a entender el problema. Es muy recomendable dar coordenadas en el plano a los puntos A, B, C y D.



Asumimos que el río no lleva corriente, por lo que no afecta el módulo de la velocidad final a nado. Y suponemos movimientos rectilíneos uniformes, con velocidad constante.

La velocidad media es igual al espacio recorrido entre el tiempo empleado. Por lo tanto:

$$t_{total} = t_{nadando} + t_{caminando}$$
$$t_{total} = \frac{\text{espacio}_{nadando}}{\text{velocidad}_{nadando}} + \frac{\text{espacio}_{caminando}}{\text{velocidad}_{caminando}}$$

El espacio recorrido nadando se obtiene con la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los puntos ABD. La altura del triángulo es 20 metros y la anchura es x .

Problemas tipo Selectividad con enunciado de contexto y con pregunta conceptual
La altura y la anchura son los catetos del triángulo rectángulo. Por lo tanto:

$$espacio_{nadando} = +\sqrt{20^2 + x^2}$$

El espacio recorrido caminando es la distancia que separa los puntos D y C, que están alineados en la misma recta horizontal.

$$espacio_{caminando} = 100 - x$$

Conocemos las velocidades en cada tramo. En consecuencia:

$$t_{total} = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{1} + \frac{100 - x}{2}$$

Esta es la función a minimizar. Su dominio es toda la recta real, porque el discriminante de la raíz siempre es una cantidad positiva. Nos centraremos en los valores de $x \geq 0$ ya que, por el contexto, necesitamos que el nadador se acerque (y no se aleje) del punto final C.

Además, por el contexto, no tiene sentido una distancia horizontal mayor a 100. Por lo que podemos acotar el dominio al intervalo cerrado $[0, 100]$.

$$t' = \frac{2x}{2\sqrt{400 + x^2}} - \frac{1}{2} \rightarrow t' = \frac{x}{\sqrt{400 + x^2}} - \frac{1}{2} \rightarrow t' = \frac{2x - \sqrt{400 + x^2}}{2\sqrt{400 + x^2}}$$

$$t' = 0 \rightarrow 2x - \sqrt{400 + x^2} = 0 \rightarrow 2x = \sqrt{400 + x^2}$$

Elevamos ambos miembros al cuadrado.

$$4x^2 = 400 + x^2 \rightarrow 3x^2 = 400 \rightarrow x = +\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55 \text{ m} \rightarrow \text{punto crítico}$$

Como hemos indicado, nos quedamos solo con los valores mayores o iguales a cero en el estudio de los extremos relativos.

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$$\left[0, \frac{20\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow t'(1) < 0 \rightarrow t(x) \text{ estrictamente decreciente}$$

$$\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}, 100\right] \rightarrow t' > 0 \rightarrow t(x) \text{ estrictamente creciente}$$

El valor $x = +\frac{20\sqrt{3}}{3}$ minimiza el tiempo. Al ser el único extremo relativo en el intervalo de definición, tenemos garantizado que también será mínimo absoluto.

Conclusión de distancias:

$$\overline{DB} = x = \frac{20\sqrt{3}}{3} \text{ metros}$$

PROBLEMA 2

Se han realizado varios estudios para determinar el modo en que se transmiten los bulos en cierta red social. Un primer estudio ha establecido que el número (aproximado) de personas $f(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función:

$$f(t) = \frac{18}{1 + 2^{-t+3}}$$

donde t representa el tiempo (en días).

- Según este modelo, ¿cuántas personas empiezan a difundir el bulo?
- A medida que transcurre el tiempo, ¿está limitado el número de personas que conocen el bulo? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?
- En un segundo estudio, han simplificado el modelo anterior y han establecido que el número (aproximado) de personas $g(t)$ (expresado en miles) que conocen y difunden un bulo viene dado por la función:

$$g(t) = \frac{18}{\pi} \arctan(t - 3) + 9$$

donde t representa el tiempo (en días).

Según este segundo modelo, ¿en qué momento empieza a disminuir la velocidad a la que se propaga el bulo? ¿Cuántas personas conocen en dicho momento el bulo?

- El número inicial de personas se conoce con la imagen de la función en el tiempo inicial $t=0$.

$$f(0) = \frac{18}{1 + 2^{-0+3}} = \frac{18}{9} = 2 \rightarrow 2.000 \text{ personas}$$

- El comportamiento de la función en el infinito nos ofrece información sobre si la imagen de la función está acotada, o si crece de manera indefinida.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{18}{1 + 2^{-t+3}} = \text{evaluar} = \frac{18}{1 + 2^{-\infty}} = \frac{18}{1 + 0} = 18$$

Existe AH en $y = 18$. Por lo que la función nunca alcanza la cota superior de 18.000 personas, por mucho tiempo que pase desde el inicio del bulo.

- La función arcotangente es continua en toda la recta real. No obstante, nos interesa el comportamiento de la función para $t \geq 0$.

¡Ojo! La velocidad de propagación es la derivada de la función que determina el número de personas que conocen el bulo. Por lo tanto, no nos están pidiendo estudiar la monotonía de $g(t)$; están pidiendo estudiar la monotonía de $g'(t)$.

Si una función da la imagen de un valor, la derivada de esa función da la velocidad con que cambia la imagen. Y estudiar cuándo disminuye la velocidad implica estudiar la monotonía de la función derivada.

$$g'(t) = \frac{18}{\pi} \frac{1}{1 + (t - 3)^2} \rightarrow \text{a la derivada de } g(t) \text{ la llamamos } h(t) = \frac{18}{\pi} \frac{1}{1 + (t - 3)^2}$$

Y ahora estudiamos la monotonía de $h(t)$. El dominio de $h(t)$ también es toda la recta real, porque el denominador siempre es positivo y, por lo tanto, nunca se anula.

Problemas tipo Selectividad con enunciado de contexto y con pregunta conceptual

$$h'(t) = \frac{18}{\pi} \cdot \frac{-2(t-3)}{[1+(t-3)^2]^2} \rightarrow h'(t) = 0 \rightarrow -36(t-3) = 0 \rightarrow t = 3 \text{ punto crítico}$$

Miramos el signo de la derivada en los siguientes intervalos (consideramos tiempos mayores o iguales que cero).

$$[0,3) \rightarrow h'(t) > 0 \rightarrow h(t) \text{ estrictamente creciente}$$

$$(3, \infty) \rightarrow h'(t) < 0 \rightarrow h(t) \text{ estrictamente decreciente}$$

Conclusión: $t = 3$ horas es un máximo relativo de la función derivada de $g(t)$. Por lo que el máximo de la velocidad de propagación se alcanza en $t = 3$ horas. A partir de ese tiempo, la velocidad de propagación disminuye. Y en ese momento, el número de personas que conocen el bulo se obtiene con la imagen de la función original.

$$g(3) = \frac{18}{\pi} \arctg(3-3) + 9 = 0 + 9 = 9 \rightarrow 9.000 \text{ personas}$$

PROBLEMA 3

El número de moléculas en una placa de ensayo viene dado por la función $f(x) = e^{x^2-2x}$ expresado en miles de moléculas, donde $x \in [0, 5]$ indica el tiempo en horas.

a) Realiza el estudio del crecimiento de dicha función. ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima? ¿En qué momento se alcanzan?

b) ¿Cuál es la velocidad de crecimiento a las tres horas? ¿Cuál es la velocidad media de crecimiento en el intervalo $[0, 5]$?

a) El dominio de la función es toda la recta real, por ser el exponente de la exponencial un polinomio.

$$f'(x) = e^{x^2-2x} \cdot (2x - 2) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow x = 1 \in [0, 5]$$

Evaluamos la derivada a la izquierda y a la derecha del punto crítico.

$$[0, 1) \rightarrow f'(0,5) < 0 \rightarrow f(x) \text{ estrictamente decreciente}$$

$$(1, 5] \rightarrow f'(4) > 0 \rightarrow f(x) \text{ estrictamente creciente}$$

En $x = 1$ encontramos un mínimo relativo. Para responder a la pregunta debemos comparar la imagen del mínimo relativo con las imágenes de los puntos de inicio y final del intervalo.

$$f(0) = e^0 = 1 \rightarrow 1.000 \text{ moléculas}$$

$$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37 \rightarrow 370 \text{ moléculas}$$

$$f(5) = e^{15} \rightarrow 1000 \cdot e^{15} \text{ moléculas}$$

El mínimo absoluto se alcanza en el mínimo relativo $x = 1$. Mientras que el máximo absoluto se alcanza en el punto de cierre del intervalo $x = 5$.

b) ¡Ojo! La velocidad de crecimiento es la derivada de la función original. Cuando tenemos una función que devuelve la imagen de lo que sea (distancia, número de personas, concentración de una sustancia, etc.), la derivada de la función ofrece la velocidad de crecimiento de la función original.

$$f'(x) = e^{x^2-2x} \cdot (2x - 2)$$

$$f'(3) = e^3 \cdot (2 \cdot 3 - 2) = 80,34 \rightarrow \text{velocidad instantánea de 80.340 moléculas por hora}$$

La velocidad media, como estudiamos en 1º Bach al introducir el concepto de derivada, es una aplicación de la Tasa de Variación Media de la función en un intervalo $[a, b]$.

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$TVM = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{e^{15} - 1.000}{5} \approx 653.603,47$$

La velocidad media es de aproximadamente 653.603.470 moléculas por hora.

PROBLEMA 4

Se considera la

PROBLEMA 5

Se considera la

PROBLEMA 6

Sea la función

PROBLEMA 7

Trinidad, una

PROBLEMA 8

Un periódico digital

En ambos tiempos la derivada es positiva, por lo que la función audiencia crece en ambos instantes. Esto ya lo sabíamos de los apartados anteriores.

El valor de la derivada en $t=10$ es menor que el valor de la derivada en $t=1$, por lo que la velocidad de crecimiento se atenúa. Es decir, con el paso del tiempo, se ralentiza el crecimiento de la audiencia.

PROBLEMA 9

La velocidad media

PROBLEMA 10

Estudia y representa