Sbírka příkladů

Odraz a lom

Žán Pól Kastról

4. srpna 2022

Obsah

1 Zadání příkladů

Př. 1: Koutový odražeč

Řešení ⇒

Na koutový odražeč tvořený dvěma rovinnými zrcadly, která svírají úhel φ, dopadá paprsek světla pod úhlem α. Dvakrát se odrazí a vrací se zpět. Viz aplet v GeoGebře:

https://www.geogebra.org/m/Qbpe5nmr

a) Dokaž, že pokud jsou zrcadla vzájemně kolmá ($\varphi = 90°$), potom je vystupující paprsek **rovnoběžný** s dopadajícím paprskem a výsledek nezávisí na úhlu dopadu α (funkce *odrazky* na kole[a]).

b) Dokaž, že pokud zrcadla svírají úhel $\varphi = 45°$, potom je vystupující paprsek **kolmý** k dopadajícímu a výsledek nezávisí na úhlu dopadu α (funkce *přístroje na vytyčování kolmic*).

c) Dokaž, že pokud zrcadla svírají obecný úhel φ, potom vystupující paprsek svírá s dopadajícím úhel $\omega = 2\varphi$ a výsledek nezávisí na úhlu dopadu α (funkce *sextantu*[b]).

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Corner_reflector
[b] https://en.wikipedia.org/wiki/Sextant

http://www.opto.cz/fuka_havelka/t074.html#SEC8

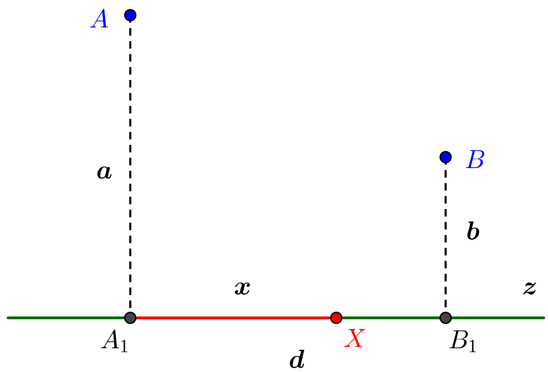
Př. 2: Poslušný paprsek a rovinné zrcadlo

Řešení ⇒

Na obrázku je vodorovné *rovinné* zrcadlo z a body A a B, jejichž vzdálenosti od zrcadla jsou po řadě a a b. Vodorovná vzdálenost bodů A, B je d. Poslušný paprsek světla se chce odrazem od zrcadla dostat z A do B a přitom za žádnou cenu neporušit zákon odrazu. Najdi bod X, ve kterém se musí odrazit. Úlohu řeš:

a) **početně** – vyjádři vzdálenost x bodu X od bodu A_1 (pravoúhlého průmětu bodu A do roviny zrcadla) pomocí známých vzdáleností a, b, d.

b) **graficky** – jako konstrukční úlohu.



Př. 3: BAR 01 – Zápřík na lom

Řešení ⇒

Světelný pa-prsek dopadá ze *vzduchu Božího duchu* ($\mathcal{VBD}$) do *vody* pod úhlem 42,25°. Pod jakým úhlem se láme? Index lomu vody je $1,33$, index lomu $\mathcal{VBD}$ je přibližně 1.

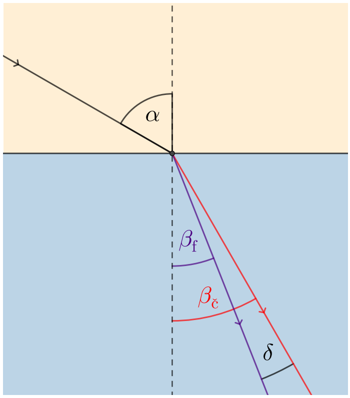
Př. 4: BAR 02 – Disperze světla

Řešení ⇒

Červené světlo má ve vodě rychlost $2{,}256 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, fialové $2{,}232 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Urči jejich indexy lomu. Rychlost světla ve vakuu je $2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Př. 5: BAR 03 – Rozklad světla
Řešení ⇒

Bílý paprsek dopadá ze vzduchu na *flintové* sklo[a] pod úhlem 60°.
Index lomu tohoto skla pro červené světlo je $n = 1,735$.
Index lomu tohoto skla pro fialové světlo je $n = 1,811$.
Urči úhel δ mezi lomeným červeným a fialovým paprskem.



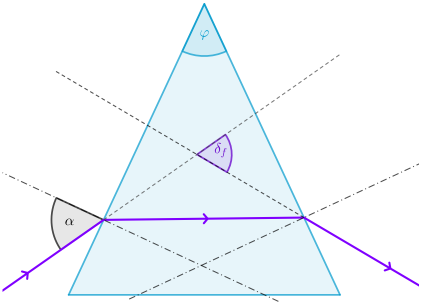
Bacha – v obrázku je kvůli přehlednosti úhel *delta* větší než ve skutečnosti. Skutečné poměry – viz aplet:

https://www.geogebra.org/m/dj2uf4xc

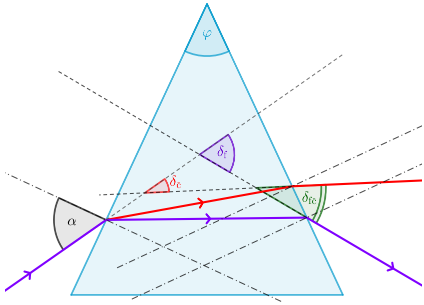
[a] https://cs.wikipedia.org/wiki/Flintov%C3%A9_sklo

Př. 6: Ala BAR 23 – Rozklad sv. hranolem
Řešení ⇒

Na skleněný hranol s lámavým úhlem $\varphi = 50°$ dopadá ze vzduchu pod úhlem $\alpha = 60°$ paprsek fialového světla. Index lomu skla pro tuto frekvenci je $n_f = 2$. Paprsek se ve skle láme ke kolmici a v místě, kde vystupuje ze skla zpět do vzduchu, se láme od kolmice. Vystupující paprsek je od vstupujícího odchýlen o úhel δ_f.



(a)



(b)

Urči:

a) Úhel $\delta_{\mathrm{f}} \rightarrow$ viz obr (a).

b) Fialový paprsek zaměníme za červený ($n_{\check{c}} = 1,5$). Urči obdobně úhel $\delta_{\check{c}}$.

c) Nyní dopadá na hranol paprsek bílého světla. Urči odchylku $\delta_{\mathrm{f\check{c}}}$ mezi vystupujícím fialovým a vystupujícím červeným paprskem $\rightarrow$ viz obr (b).

Př. 7: BAR 08 – Do dna! Řešení ⇒

Do dna jezera je zatlučen svisle sloup o výšce 1 m tak, že celý leží pod hladinou. Slunce je 30° nad obzorem. Urči délku stínu sloupu na dně. Index lomu vody je $\frac{4}{3}$.

Př. 8: Snellovo okno Řešení ⇒

Nejprve se pokochej následujícím apletem a odkazy. které jsou v něm uvedeny:

https://www.geogebra.org/m/wrqu7bxy

A teď vyřeš tyto úlohy:

Úloha 1 – BAR 10 – Kámen čintámani

V hloubce 2 m pod povrchem vody září *Kámen čintámani*[a] (berme jej jako bodový zdroj světla). Určete poloměr kruhu na povrchu vody, přes který vycházejí z kamene světelné paprsky z vody do vzduchu. Index lomu vody je $\frac{4}{3}$.

Úloha 2 – Podivná ryba Badys

Ryba Badys[b] se v hloubce 3 m dívá směrem k hladině.

a) Na jak velké ploše klidné hladiny vidí oblohu?

b) Pod jakým zorným úhlem pozoruje svět nad hladinou?

[a] O *Kamenu čintámani*: https://en.wikipedia.org/wiki/Cintamani

[b] O *Rybě Badys*: https://youtu.be/-0dw5mu7BVw.

2 Výsledky a řešení

Př. 1: Koutový odražeč

Zadání ⇒

Na koutový odražeč tvořený dvěma rovinnými zrcadly, která svírají úhel φ, dopadá paprsek světla pod úhlem α. Dvakrát se odrazí a vrací se zpět. Viz aplet v GeoGebře:

`https://www.geogebra.org/m/Qbpe5nmr`

a) Dokaž, že pokud jsou zrcadla vzájemně kolmá ($\varphi = 90°$), potom je vystupující paprsek **rovnoběžný** s dopadajícím paprskem a výsledek nezávisí na úhlu dopadu α (funkce *odrazky* na kole[a]).

b) Dokaž, že pokud zrcadla svírají úhel $\varphi = 45°$, potom je vystupující paprsek **kolmý** k dopadajícímu a výsledek nezávisí na úhlu dopadu α (funkce *přístroje na vytyčování kolmic*).

c) Dokaž, že pokud zrcadla svírají obecný úhel φ, potom vystupující paprsek svírá s dopadajícím úhel $\omega = 2\varphi$ a výsledek nezávisí na úhlu dopadu α (funkce *sextantu*[b]).

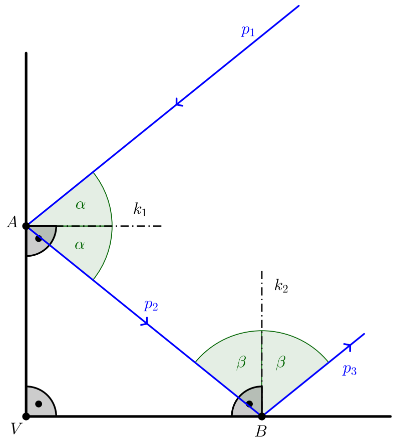
[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Corner_reflector

[b] https://en.wikipedia.org/wiki/Sextant

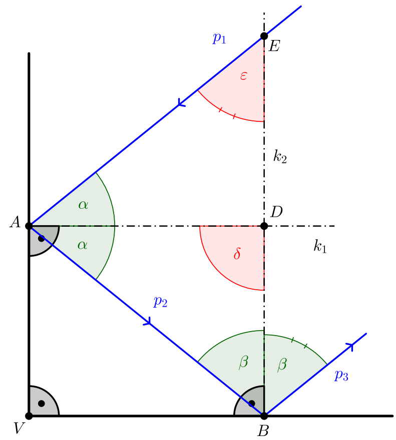
http://www.opto.cz/fuka_havelka/t074.html#SEC8

Řešení:

a) Pohleďmež na obrázek (a). Z něj nic moc nevyčumíme. Je potřeba jej trochu vylepšit. Prodloužíme trochu kolmice dopadu – viz obr. (b).



(a)



(b)

Kolmice se protínají v bodě D a kolmice k_2 protíná dopadající paprsek v bodě E.

Chceme dokázat, že $p_1 \parallel p_2$. Jak se dokazuje rovnoběžnost dvou přímek v planimetrii? Například pomocí **střídavých** úhlů – kritériem rovnoběžnosti je jejich **rovnost**. V obr. (b) jsou přímky p_1 a p_2 proťaty přímkou BE a příslušné střídavé úhly jsou β a ε. Potřebujeme tedy dokázat, že $\varepsilon = \beta$.

Pohlédněmež na čtyřúhelník $AVBD$. Pač tři z jeho vnitřních úhlů jsou pravé, musí být pravý i zbylý úhel δ u vrcholu D.

Díky tomu je ΔADB pravoúhlý, takže platí

$$\alpha + \beta = 90° \tag{1}$$

Pravoúhlý je však i ΔADE, pročež platí

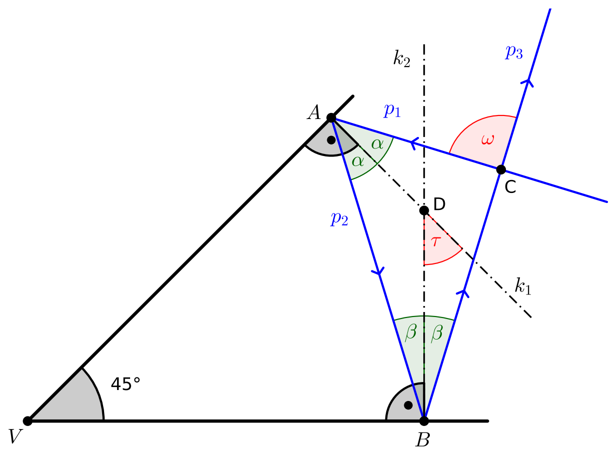
$$\alpha + \varepsilon = 90° \tag{2}$$

Z (1) a (2) dostáváme

$$\varepsilon = \beta,$$

což jsme chtěliť dokázat! Navíc úhel α jsme volili zcela libovolně, pročež rovnoběžnost paprsků nezávisí na úhlu dopadu. $\square$

b) Podívjmež se na obrázek:



Čtyřúhelník $AVBD$ má dva vnitřní úhly pravé, pročež musí být součet zbývajících vnitřních úhlů (u vrcholů V a D) roven 180°. Pádem tím je vnitřní úhel u vrcholu D nutně 135°. Rajt?

Ale díky tomu má vnější úhel u vrcholu D, jenž zove se τ, nutně hodnotu

$$\tau = 180° - 135° = 45°$$

.

Ale úhel τ je vnějším úhlem v ΔABD, takže platí

$$\tau = \alpha + \beta \tag{1}$$

Nyní pohlédněmež na ΔABC! Úhel ω je jeho vnějším úhlem u vrcholu C, pročež platí

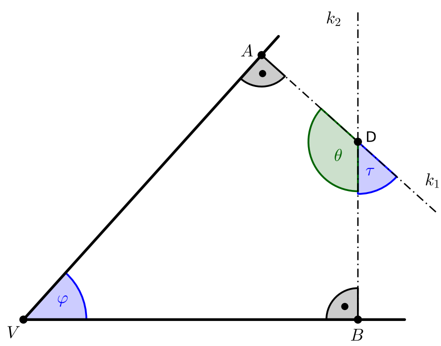
$$\omega = 2\alpha + 2\beta \tag{2}$$

Z (1) a (2) však ihned plyne

$$\omega = 2\tau = 2 \cdot 45° = 90°$$

A to jsme chtěli tak nějak, jak se říká lidově, vy volové, dokázat (navíc ω jak vidno nezávisí na úhlu dopadu)! □

c) Nyní musíme reflektovat jeden neodbytný pocit, který se vkrádá jako půlnoční zloděj do naší zahrádky s rajskými jablky. Příklad b) poukazuje (konkretně to, jak se vokázalo, že úhel τ má veli-kost 45°) na jednu vynikající planimetrickou poučku, která se opakovaně zjevuje na matematicko-fysikálních polích. Ano, správně tušíš – je to vznešená **Věta o dvou kolmicích** (viz následující obrázek):



Věta říká, že úhel mezi dvěma přímkami je roven úhlu mezi jejich kolmicemi:

$$\boxed{\varphi = \tau}$$

Zdůvodnění je jedno-duché – čtyřúhelník $AVBD$ má vnitřní úhly u vrcholů A a B pravé, takže součet zbylých dvou vnitřních úhlů u vrcholů V a D je 180° (čtyřúhelník se skládá ze dvou trojúhelníků), tedy

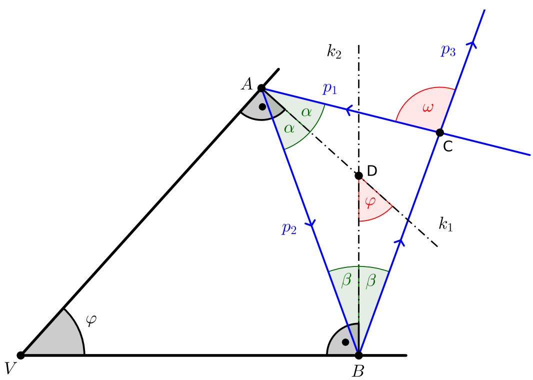
$$\varphi + \theta = 180° \tag{3}$$

Ale z obrázku vidíme, že platí též

$$\tau + \theta = 180° \tag{4}$$

Pročež $\varphi = \tau$.

Díky **Větě o dvou kolmicích** bude důkaz snadný (viz následující obr.).



V ΔABD platí:

$$\alpha + \beta = \varphi \tag{5}$$

V ΔABC platí:

$$2\alpha + 2\beta = \omega \tag{6}$$

Z (5) a (6) plyne:

$$\boxed{\omega = 2\varphi} \tag{7}$$

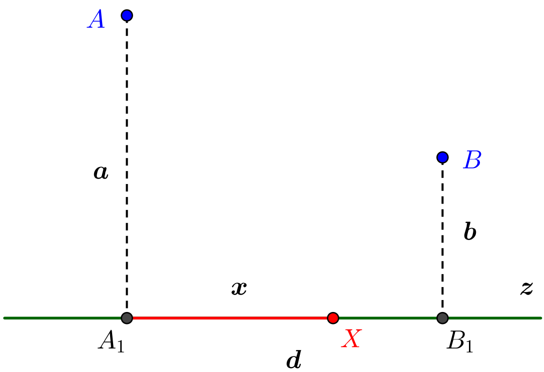
A protože jsme úhel α zvolili libovolně a ve vztahu (7) se nevyskytuje, vidíme, že vskutku zůstává ω nezávislé na změně úhlu dopadu. $\square$

Př. 2: Poslušný paprsek a rovinné zrcadlo Zadání ⇒

Na obrázku je vodorovné *rovinné* zrcadlo z a body A a B, jejichž vzdálenosti od zrcadla jsou po řadě a a b. Vodorovná vzdálenost bodů A, B je d. Poslušný paprsek světla se chce odrazem od zrcadla dostat z A do B a přitom za žádnou cenu neporušit zákon odrazu. Najdi bod X, ve kterém se musí odrazit. Úlohu řeš:

a) **početně** – vyjádři vzdálenost x bodu X od bodu A_1 (pravoúhlého průmětu bodu A do roviny zrcadla) pomocí známých vzdáleností a, b, d.

b) **graficky** – jako konstrukční úlohu.



Výsledek:

VÝSLEDEKSEM

Vyzavel:

Obsah...

Řešení:

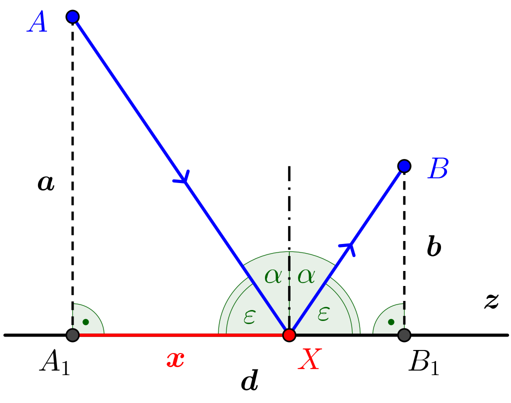
Podle zákona odrazu jsou úhly dopadu a odrazu shodné (v obrázku **??** jsou označeny α), ale z toho plyne, že $\measuredangle AXA_1 = \measuredangle BXB_1 = \varepsilon$. Dle věty (uu) potom platí $\Delta AXA_1 \sim \Delta BXB_1$. Zapíšeme poměry podobnosti

$$\frac{x}{a} = \frac{d-x}{b}$$

a odtud snadno vyjádříme x:

$$xb = ad - ax$$
$$x(a+b) = ad$$

$$\boxed{x = d \cdot \frac{a}{a+b}}$$



Generátor zadání:

Př. 3: BAR 01 – Zápřík na lom

Zadání ⇒

Světelný pa-prsek dopadá ze *vzduchu Božího duchu* ($\mathcal{VBD}$), jenž se vznáší nad vodami, do těchto vod pod úhlem 42,25°. Pod jakým úhlem se láme? Index lomu vody je $1,33$, index lomu $\mathcal{VBD}$ je přibližně 1.

Výsledek:

$$\beta \doteq 30{,}37°$$

Vyzavel:

Nejprve je dobré si **vy**psat **za**dané **ve**ličiny:

$$\begin{aligned} \alpha &= 42{,}25° \\ n_2 &= 1,33 \\ n_1 &= 1 \\ \beta &= ? \end{aligned}$$

– – – – – – – – – – – – – – –

Řešení:

No tak hele, *Snellák* říká:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

Odtud vyjádříme *methodou cvičených vopic* (**MECVIČOP**) sinus beta a nafrkáme tam zadané hodnoty:

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha \\ \sin\beta &= \frac{1}{1,33}\sin 42{,}25° \end{aligned}$$

$$\beta = \underline{\underline{30{,}37^\circ}}$$

Př. 4: BAR 02 – Disperze světla

Zadání ⇒

Červené světlo má ve vodě rychlost $2{,}256 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Fialové světlo má ve vodě rychlost $2{,}232 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Urči jejich indexy lomu. Rychlost světla ve vakuu je $2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Výsledek:

$n_{\text{č}} \doteq 1,329 \qquad n_{\text{f}} \doteq 1,343$

Vyzavel:

$$\begin{aligned} v_{\text{č}} &= 2{,}256 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ v_{\text{f}} &= 2{,}232 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ c &= 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ n_{\text{č}} &= ? \\ n_{\text{f}} &= ? \end{aligned}$$

– – – – – – – – – – – – – – –

Řešení:

Index lomu daného prostředí je definován jako poměr rychlosti světla ve vakuu a rychlosti světla v tomto prostředí:

$$n = \frac{c}{v} \tag{a}$$

Pročež:

$$\begin{aligned} n_{\text{č}} &= \frac{c}{v_{\text{č}}} \\ n_{\text{č}} &= \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{2{,}256 \cdot 10^8} \doteq \underline{\underline{1,329}} \end{aligned}$$

$$n_\text{f} = \frac{c}{v_\text{f}}$$

$$n_\text{f} = \frac{2{,}998 \cdot 10^8}{2{,}232 \cdot 10^8} \doteq \underline{\underline{1,343}}$$

Poznámka: Víme, že ve vakuu mají všechny barvy spektra stejnou rychlost. Ale vlétne-li světlo z vakua do libovolného prostředí (voda, olej, sklo, ...), tak se všechny barvy zpomalí, nikoli však stejně. **Nejméně** se zpomalí **červená** (jeden konec viditelného spektra, malé frekvence), **nejvíce** se zpomalí **fialová** (opačný konec viditelného spektra, velké frekvence):

$$\boxed{v_\text{č} > v_\text{f}}$$

Této závislosti rychlosti světla (v daném prostředí) na frekvenci se říká *disperze světla*.
Pač jsou index lomu a rychlost světla v daném prostředí nepřímo úměrné veličiny (viz (a)), platí, jak vidíme i z výpočtu:

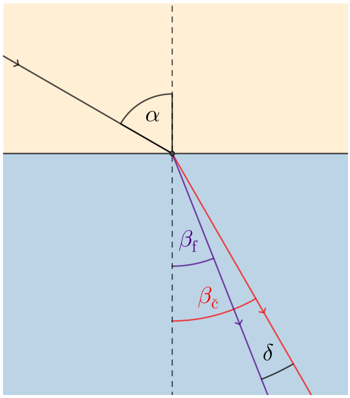
$$\boxed{n_\text{č} < n_\text{f}}$$

Pač rozdíly mezi indexy lomu jednotlivých barev spektra nejsou nijak velké, často při přibližných výpočtech disperzi ignorujeme a používáme zhruba průměrnou hodnotu indexu lomu, která odpovídá středu spektra (žlutozelená barva). Potom mluvíme prostě jen o indexu lomu světla v daném prostředí, aniž bychom specifikovali, o jakou barvu se jedná.
Nicméně disperzi nelze zanedbat vždy. Je totiž například příčinou *rozkladu světla* – viz příklad BAR 03.

Př. 5: BAR 03 – Rozklad světla

Zadání ⇒

Bílý paprsek dopadá ze vzduchu na *flintové* sklo[a] pod úhlem 60°.
Index lomu tohoto skla pro červené světlo je $n_{č} = 1,735$.
Index lomu tohoto skla pro fialové světlo je $n_{f} = 1,811$.
Urči úhel δ mezi lomeným červeným a fialovým paprskem.



Bacha – v obrázku kvůli přehlednosti je úhel *delta* větší než ve skutečnosti. Skutečné poměry – viz aplet:

https://www.geogebra.org/m/dj2uf4xc

[a] https://cs.wikipedia.org/wiki/Flintov%C3%A9_sklo

Výsledek:

$\delta = 1{,}376°$

Vyzavel:

$$\alpha_{č} = \alpha_{f} = 60°$$

$$n_{\check{c}} = 1,735$$
$$n_{\mathrm{f}} = 1,811$$
$$\delta = ?$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

Řešení:

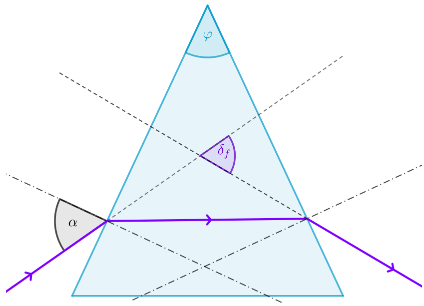
Snellák říká:
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$
Pač první prostředí je $\mathcal{VBD}$, je $n_1 = 1$ a pro jednotlivé barvy dostáváme:

$$\sin\beta_{\check{c}} = \frac{\sin\alpha_{\check{c}}}{n_{\check{c}}} = \frac{\sin 60°}{1,735} \rightarrow \beta_{\check{c}} = 29{,}944°$$
$$\sin\beta_{\mathrm{f}} = \frac{\sin\alpha_{\mathrm{f}}}{n_{\mathrm{f}}} = \frac{\sin 60°}{1,811} \rightarrow \beta_{\mathrm{f}} = 28{,}568°$$
$$\delta = \beta_{\check{c}} - \beta_{\mathrm{f}} = \underline{\underline{1{,}376°}}$$

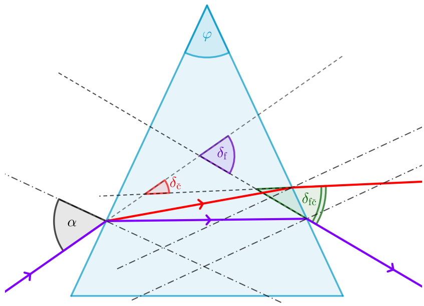
Poznámka: Vidíme, že v důsledku *disperze* světla (závislosti rychlosti barvy na její frekvenci) se při přechodu bílého světla z vakua (vzduchu) do nějakého „pomalejšího“ prostředí láme každá barva pod jiným úhlem.
Nejvíce se láme *fialový* konec spektra – fialová je **nejvíce zpomalená** a má **největší** index lomu.
Neméně se láme *červený* konec spektra – červená je **nejméně zpomalená** a má **nejmenší** index lomu.
Paprsky ostatních barev viditelného spektra leží mezi fialovým a červeným paprskem.
Tomuto oddělení jednotlivých barev v důsledku disperze se říká **rozklad světla**.

Př. 6: Ala BAR 23 – Rozklad sv. hranolem Zadání ⇒

Na skleněný hranol s lámavým úhlem $\varphi = 50°$ dopadá ze vzduchu pod úhlem $\alpha = 60°$ paprsek fialového světla. Index lomu skla pro tuto frekvenci je $n_\mathrm{f} = 2$. Paprsek se ve skle láme ke kolmici a v místě, kde vystupuje ze skla zpět do vzduchu, se láme od kolmice. Vystupující paprsek je od vstupujícího odchýlen o úhel δ_f.



(a)



(b)

Urči:

a) Úhel δ_f → viz obr (a).

b) Fialový paprsek zaměníme za červený ($n_\mathrm{č} = 1,5$). Urči obdobně úhel $\delta_\mathrm{č}$.

c) Nyní dopadá na hranol paprsek bílého světla. Urči odchylku $\delta_\mathrm{fč}$ mezi vystupujícím fialovým a vystupujícím červeným paprskem → viz obr (b).

Výsledek:

$\delta_\mathrm{f} \doteq 65{,}52°$ $\qquad \delta_\mathrm{č} \doteq 32{,}43°$ $\qquad \delta_\mathrm{fč} \doteq 33{,}09°$

Vyzavel:

$$\varphi = 50° \qquad \delta_{\mathrm{f}} = ?$$
$$\alpha = 60° \qquad \delta_{\mathrm{č}} = ?$$
$$n_{\mathrm{f}} = 2 \qquad \delta_{\mathrm{fč}} = ?$$
$$n_{\mathrm{č}} = 1,5$$

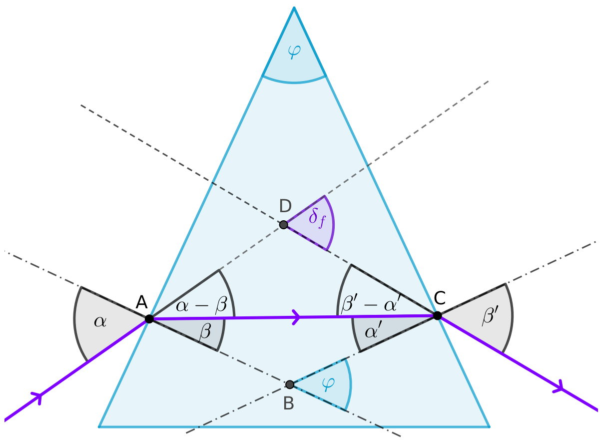
Řešení:

a) Čummež na obrázek (c). V bodě A nastává první lom (ke kolmici). Pro úhly dopadu α a lomu β platí *Snellák*:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{n_{\mathrm{f}}}{1} = n_{\mathrm{f}}$$

Odtud

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n_{\mathrm{f}}} \to \beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_{\mathrm{f}}}\right) \tag{a}$$



(c)

Obdobně v bodě C nastává druhý lom (od kolmice). Pro úhly dopadu α' a lomu β' platí *Snellák*:

$$\frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{1}{n_\mathrm{f}}$$

Odtud

$$\sin\beta' = n_\mathrm{f}\sin\alpha' \to \ \beta' = \arcsin\left(n_\mathrm{f}\sin\alpha'\right) \tag{b}$$

Nyní si povšimněme, že v trojúhelníku ABC je vnější úhel při vrcholu B roven lámavému úhlu φ (věta o dvou kolmicích) a pro vnější úhel v trojúhelníku platí

$$\alpha' + \beta = \varphi \to \ \alpha' = \varphi - \beta \tag{c}$$

Obdobně platí v trojúhelníku ACD

$$\delta_\mathrm{f} = \alpha - \beta + \beta' - \alpha' \tag{d}$$

Dosadíme-li (c) do (d), úhel β se odečte a dostáváme

$$\boxed{\delta_\mathrm{f} = \alpha + \beta' - \varphi} \tag{e}$$

Do (b) dosadíme (c) a máme

$$\beta' = \arcsin\left(n_\mathrm{f}\sin(\varphi - \beta)\right)$$

Sem ještě za β dosadíme (a):

$$\beta' = \arcsin\left\{n_\mathrm{f}\sin\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_\mathrm{f}}\right)\right]\right\} \tag{f}$$

Na závěr prdněmež (f) do (e) a máme

$$\boxed{\delta_\mathrm{f} = \alpha - \varphi + \arcsin\left\{n_\mathrm{f}\sin\left[\varphi - \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n_\mathrm{f}}\right)\right]\right\}} \tag{g}$$

Dosadíme zadané hodnoty

$$\delta_{\mathrm{f}} = 60^\circ - 50^\circ + \arcsin\left\{2\sin\left[50^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin 60^\circ}{2}\right)\right]\right\}$$

a dostáváme

$$\underline{\underline{\delta_{\mathrm{f}} \doteq 65{,}52^\circ}}$$

b) Pro červené světlo stačí do (g) dosadit místo n_{f} index lomu červeného světla $n_{\mathrm{č}} = 1,5$ a dostáváme

$$\underline{\underline{\delta_{\mathrm{č}} \doteq 32{,}43^\circ}}$$

c) Pro odchylku mezi fialovým a červeným paprskem platí zřejmě (jak potvrzuje i obrázek (b))

$$\delta_{\mathrm{fč}} = \delta_{\mathrm{f}} - \delta_{\mathrm{č}}$$

Po dosazení dostáváme

$$\underline{\underline{\delta_{\mathrm{fč}} \doteq 33{,}09^\circ}}$$

Poznámka: Příklad není nutné řešit za každou cenu obecně. Komu se nelíbí vzorce (f) a (g), ten si může úhel β' vypočítat postupně. Ze vztahu (a) vypočítat β, z (c) určit α', potom z (b) dostane β' a to frkne do (e)!

Generátor zadání:

Následující aplet v *Geově Gebře* krástně vokazuje celou situaci a umožňuje generovat další zadání.

https://www.geogebra.org/m/p6vaajhh

Další info o rozkladu:

https://en.wikipedia.org/wiki/Prism

Př. 7: BAR 08 – Do dna! Zadání ⇒

Do dna jezera je zatlučen svisle sloup o výšce 1 m tak, že celý leží pod hladinou. Slunce je 30° nad obzorem. Urči délku stínu sloupu na dně. Index lomu vody je $\frac{4}{3}$.

Výsledek:

$$\ell \doteq 0{,}85\,\mathrm{m}$$

Vyzavel:

$h = 1\,\mathrm{m}$

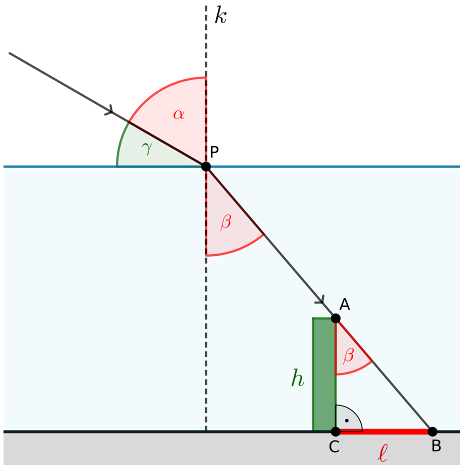
$\gamma = 30°$

$n_1 = 1$

$n_2 = \dfrac{4}{3}$

– – – –

$\ell = ?$



Řešení 1:

Paprsek dopadá v bodě P na hladinu (viz obr.). Bacha, že zadaný úhel (výška slunce nad obzorem) není úhel dopadu, pač ten se měří od kolmice dopadu k! Proto jsme ho označili ve *vyzavelu* jako γ a úhel dopadu bude jeho doplněk do pravého úhlu:

$$\alpha = 90° - \gamma = 90° - 30° = 60°$$

- Ze **Snelláku** určíme nejprve úhel lomu β:

$$n_2 \sin\beta = n_1 \sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{n_1}{n_2}\sin\alpha \tag{a}$$
$$\sin\beta = \frac{1}{\frac{4}{3}}\sin 60°$$
$$\sin\beta = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$
$$\beta \doteq \underline{\underline{40{,}51°}}$$

- Z ΔABC určíme ℓ. Pač u vrcholu A je rovněž úhel β (úhly souhlasné), dostáváme:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\ell}{h}$$
$$\ell = h\cdot\operatorname{tg}\beta \tag{b}$$
$$\ell = 1\cdot\operatorname{tg}40{,}51°$$
$$\ell \doteq \underline{\underline{0{,}85\,\mathrm{m}}}$$

Řešení 2 – obecné:

Ze vztahu (a) vyjádříme úhel lomu pomocí funkce *arkus sinus*:

$$\beta = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)$$

a dosadíme do (b):

$$\boxed{\ell = h\cdot\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)\right]} \tag{c}$$

Řešení 3 – obecné:

Vyjádříme v (b) tangens β pomocí sinus β:

$$\ell = h\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = h\cdot\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

Sem dosadíme z (a):

$$\ell = h \cdot \frac{\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2}} = h \cdot \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\alpha}}$$

Vtáhneme-li n_2 pod odmocninu, dostáváme

$$\boxed{\ell = h \cdot \frac{n_1 \sin\alpha}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha}}} \tag{d}$$

Zde bude pěkně vycházet číselné dosazení:

$$\ell = 1 \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{16}{9} - 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{16}{9} - \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{37}{36}}} = \frac{3\sqrt{111}}{37} \doteq \underline{\underline{0{,}85\,\mathrm{m}}}$$

Poznámka:

Každé ze tří uvedených řešení má své kouzlo a je osobité jako tři krásné stromy v *Hovnopožárském hvozdu*!
První řešení je přímé a praktické. Je to hotové raz dva. Nevýhodou je dvojí zaokrouhlování a absence obecného vzorce.
Druhé řešení dává obecný vztah (c), který je možné opakovaně, zcela zdarma používat, s lehkostí *Olče Trhenda*, když používal opakovaně svou *Henryho* opakovačku!
Třetí řešení dává také obecný vztah (d), který je sice složitější než vztah (c), ale vyniká neokázalou noblesou a vznešeností, pač používá jen jednu goniometrickou funkci!

Generátor zadání:

https://www.geogebra.org/m/tcz48vqs

Př. 8: Snellovo okno

Zadání ⇒

Nejprve se pokochej následujícím apletem a odkazy. které jsou v něm uvedeny:

https://www.geogebra.org/m/wrqu7bxy

A teď vyřeš tyto úlohy:

Úloha 1 – BAR 10 – Kámen čintámani

V hloubce 2 m pod povrchem vody září *Kámen čintámani*[a] (berme jej jako bodový zdroj světla). Určete poloměr kruhu na povrchu vody, přes který vycházejí z kamene světelné paprsky z vody do vzduchu. Index lomu vody je $\frac{4}{3}$.

Úloha 2 – Podivná ryba Badys

Ryba Badys[b] se v hloubce 3 m dívá směrem k hladině.

a) Na jak velké ploše klidné hladiny vidí oblohu?
b) Pod jakým zorným úhlem pozoruje svět nad hladinou?

[a] O *Kamenu čintámani*: https://en.wikipedia.org/wiki/Cintamani
[b] O *Rybě Badys*: https://youtu.be/-0dw5mu7BVw.

Výsledek úlohy 1 – BAR 10:

VÝSLEDEKSEM

Výsledek úlohy 2 – Podivná ryba Badys:

VÝSLEDEKSEM

Vyzavel úlohy 1 – BAR 10:

$$h = 2\,\mathrm{m}$$

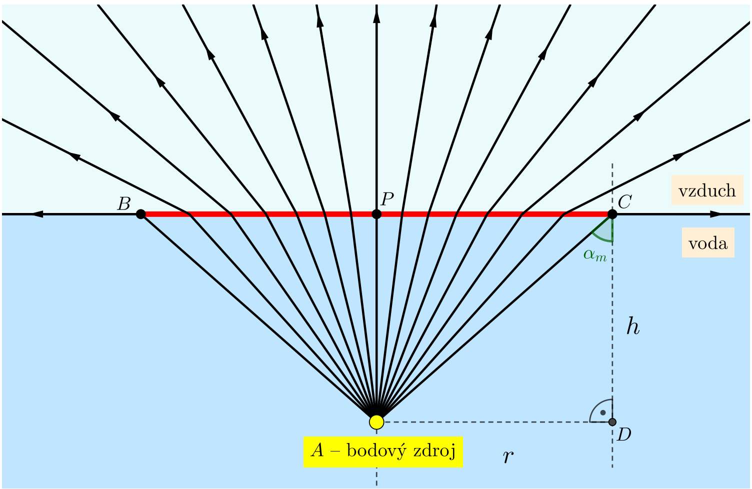
$$n_{voda} = \frac{4}{3}$$

$$------$$

$$r = ?$$

Řešení úlohy 1 – BAR 10:

Je to triviální – pohleďmež na obrázek:



Paprsek, který dopadá na hladinu v bodě C pod *mezným úhlem* α_m, se láme pod úhlem 90°. Jeho intenzita je však již nulová a veškeré světlo se v C pouze odráží zpět pod hladinu (odražený paprsek není zakreslen). Z ΔADC vidíme, že pro poloměr *Snellova* *okna* $|PC| = r$ platí:

$$\operatorname{tg}\alpha_m = \frac{r}{h} \to \; r = h \cdot \operatorname{tg}\alpha_m \tag{a}$$

Pro mezný úhel plyne ze *Snelláku*:

$$n_{voda} \cdot \sin\alpha_m = n_{vzduch} \cdot \sin 90°$$

Pač $\sin 90° = 1$, máme

$$\sin\alpha_m = \frac{n_{vzduch}}{n_{voda}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \to \; \alpha_m = \arcsin\frac{3}{4} \doteq 48{,}6° \tag{b}$$

Prdneme-li (b) do (a), dostáváme

$$r = h \cdot \operatorname{tg}\left[\arcsin\left(\frac{n_{vzduch}}{n_{voda}}\right)\right] = 2 \cdot \operatorname{tg} 48{,}6° \doteq \underline{\underline{2{,}3\,\mathrm{m}}}$$

Vyzavel úlohy 2 – Podivná ryba Badys:

Obsah...

Řešení úlohy 2 – Podivná ryba Badys:

ŘEŠENÍSEM Úlohu naleznete v matfyzácké sbírce, kde jsou pěkné obrázky: http://reseneulohy.cz/1643/na-jak-velke-plose-vidi-ryba-oblohu-

Generátor zadání: