

Verloop van functies m.b.v. afgeleide beschrijven

www.karelappeltans.be

January 22, 2023

1 Doelstelling

Hoe kan de grafiek van een functie, bijvoorbeeld $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ bekomen worden m.b.v. de afgeleide functie(s)?

2 Voorafgaande stellingen

2.1 Middelwaardestelling (van Lagrange)

Stel dat f continue is op een gesloten interval $[a, b]$ en afleidbaar op het open interval $]a, b[$. Dan bestaat er minstens een $c \in]a, b[$ zodat

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bewijs: /

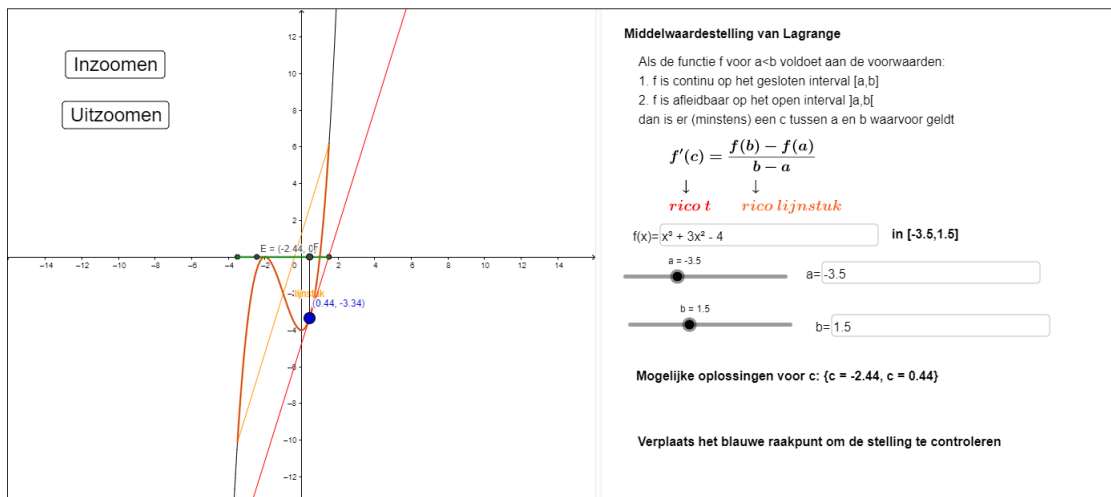


Figure 1: <https://www.geogebra.org/m/dKUf34>

2.2 Stelling van Rolle

Stel dat f continue is op een gesloten interval $[a, b]$ en afleidbaar op het open interval $]a, b[$ met $f(a) = f(b)$, dan bestaat er minstens een $c \in]a, b[$ zodat

$$f'(c) = 0$$

Bewijs: We gebruiken de middelwaardestelling. Omdat $f(a) = f(b)$ geldt ook $f(a) - f(b) = 0$ en dit bewijst de stelling.

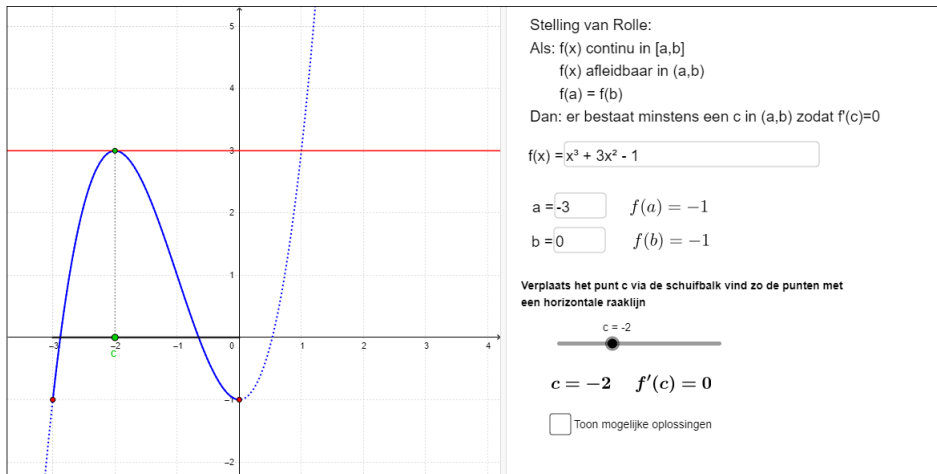


Figure 2: <https://www.geogebra.org/m/dKUfEt34>

3 Definitie stijgend/dalend

We zeggen dat een functie stijgend op een interval I is indien

$$f(c) \leq f(d), \quad \forall c < d, \quad c, d \in I$$

De functie wordt dalend genoemd op een interval I indien

$$f(c) \geq f(d), \quad \forall c < d, \quad c, d \in I$$

Ze heten monotoon dalend/stijgend indien men $\geq$ ($\leq$) door $>$ ($<$) kan vervangen.

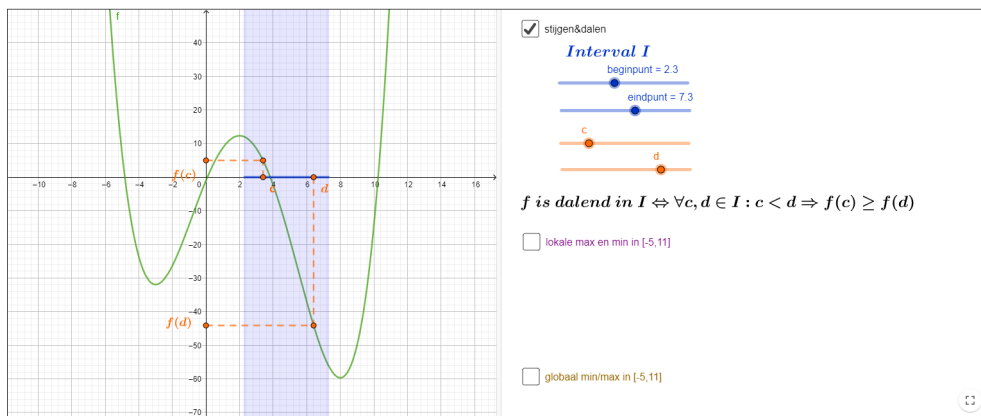


Figure 3: <https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v>

4 Verband tussen $f'(x)$ en stijgen/dalen van een functie

4.1 Stelling

Voor een dalende functie f in een open interval I die alsook afleidbaar is, geldt $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$. Indien de functie stijgend is, geldt $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Bewijs: We bewijzen dit voor een stijgende functie. stel dat $x \in I$ en een kleine h zodat $x + h$ nog steeds tot het interval I behoort (dat gaat omdat we geëist hebben dat I open is), dan geldt

$$\text{voor } h > 0 : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

$$\text{voor } h < 0 : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Omdat de functie afleidbaar is bestaat de $\lim_{h \rightarrow 0}$ bijgevolg $f'(x) \geq 0$

4.2 Stelling

Stel dat f continu is over een gesloten interval $I = [a, b]$ en afleidbaar over het open interval $]a, b[$ dan geldt

i) als $f'(x) > 0, \forall x \in]a, b[,$ dan is de functie f monotoon stijgend over I

ii) als $f'(x) < 0, \forall x \in]a, b[,$ dan is de functie f monotoon dalend over I

Bewijs:

We bewijzen i). Veronderstel dat f NIET monotoon stijgend is, dus er bestaan $a, b \in I$ met $a < b$ en $f(a) \geq f(b)$. Er is voldaan aan de voorwaarden van de middelwaardstelling van Lagrange dus er bestaat een $c \in]a, b[$ met $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Onder de veronderstelling geldt nu dat $f'(c) \leq 0$ (want $T \leq 0$ en $N > 0$). In tegenspraak met het gegeven.

4.3 Praktijk

We maken een tekentabel van de 1ste afgeleide:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ of } x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

5 Definitie lokaal extremum (lokaal min of lokaal max)

We noemen een punt $\bar{x}$ een lokaal minimum (respectievelijk maximum) indien een getal $\delta > 0$ bestaat zodat $f(\bar{x}) < f(x)$ (respectievelijk $f(\bar{x}) > f(x)$) voor alle $x \in]\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta[\setminus \{\bar{x}\}$

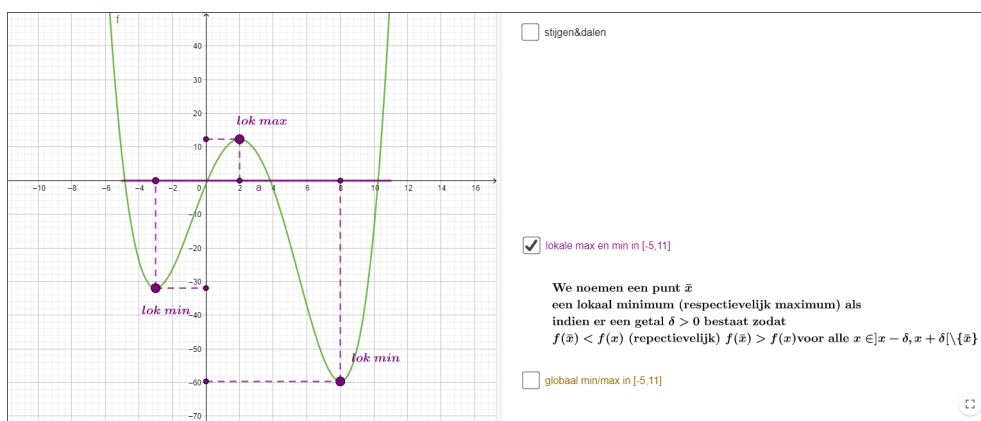


Figure 4: <https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v>

6 Verband tussen $f'(x)$ en lokaal extremum

6.1 Stelling

Stel dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie is met een lokaal minimum of een lokaal maximum $\bar{x}$. Dan geldt $f'(\bar{x}) = 0$

6.2 Opmerking

Uit $f'(\bar{x}) = 0$ volgt niet dat $\bar{x}$ een lokaal extremum is. Beschouw bijvoorbeeld $f(x) = x^3$. Deze heeft geen minimum en geen maximum. Er geldt echter $f'(0) = 0$

Hoe kan men dan bepalen of een punt waar $f'(\bar{x}) = 0$ een extremum is?

6.3 Stelling

Stel dat f continu is in a . Bij een tekenwissel van $f'(x)$ heeft $f(x)$ in a

- Bij $+-$ een lokaal maximum
- Bij $-+$ een lokaal minimum

Merk op:

1. $f'(x)$ moet dus in dat punt niet bestaan (meestal wel)
2. Als er GEEN tekenwissel van f' is in a , is er dus geen lokaal minimum of maximum

6.4 praktijk

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	lok max	$\searrow$	lok min	$\nearrow$

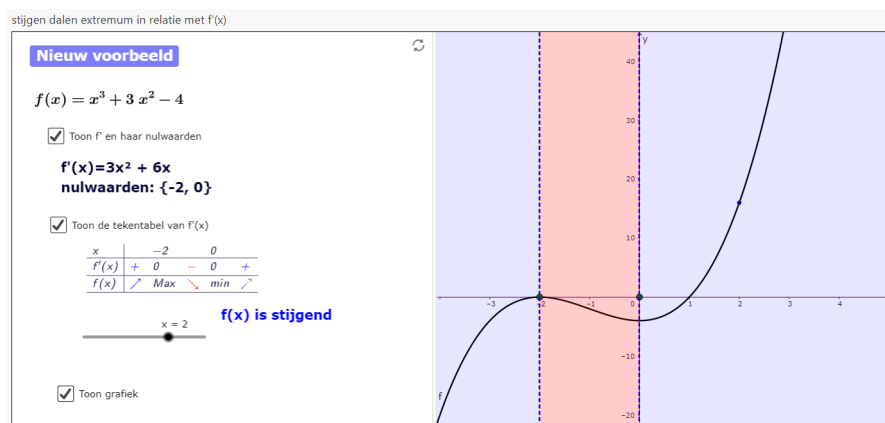


Figure 5: <https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v>

7 Verband tussen $f''(x)$ en lokaal extremum

7.1 Stelling: tweede afgeleide test

Stel dat $f \in C^2(\mathbb{R})$ een functie is met een punt $\bar{x}$ waarvoor geldt dat $f'(\bar{x}) = 0$. Stel bovendien dat $f''(\bar{x}) > 0$. Dan is $\bar{x}$ een lokaal minimum. (Indien $f''(\bar{x}) < 0$ is $\bar{x}$ een lokaal maximum.)

7.2 praktijk

We maken een tekentabel van de 2de afgeleide:

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	l. max	$\searrow$	$\searrow$	l. min	$\nearrow$

8 Definitie hol en bol

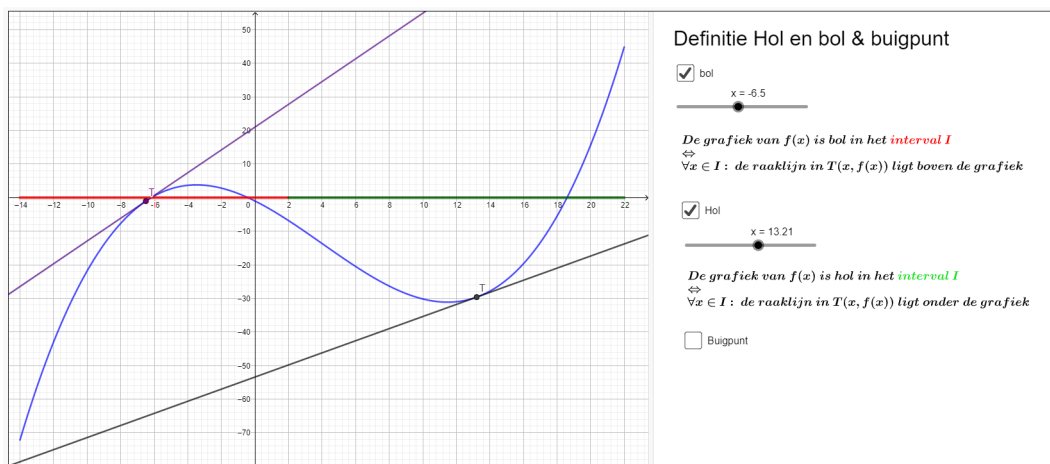


Figure 6: <https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v>

9 Verband tussen $f''(x)$ en hol/bol

9.1 Stelling

Stel dat $f \in C^2(\mathbb{R})$. De grafiek van een functie f is hol op een interval I indien $f''(x) > 0, \forall x \in I$. Ze is bol indien $f''(x) < 0, \forall x \in I$

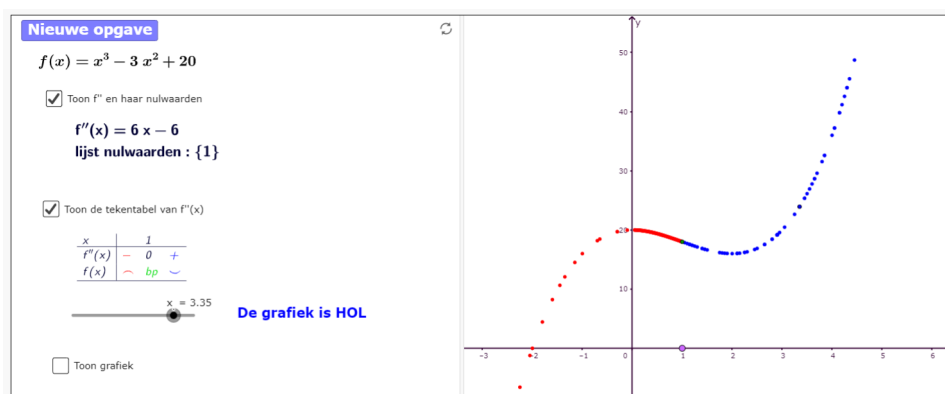


Figure 7: <https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v>

9.2 praktijk

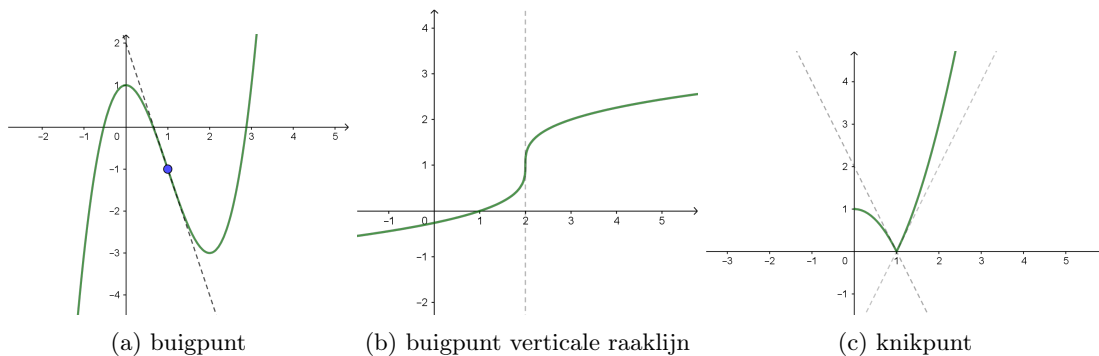
x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	↖	l. max	↘	l. min	↗

10 Overgang van hol naar bol (of omgekeerd)

Het punt waar een functie lokaal van convex (hol) naar concaaf (bol) of vice versa verandert wordt

- een buigpunt genoemd indien de raaklijn in dat punt bestaat ($f'(x) \in \mathbb{R}$ of $f'(x) = \infty$). De raaklijn snijdt dan de grafiek in dit punt.
- een knikpunt genoemd als linker-en rechterafgeleide bestaan, maar verschillend zijn van elkaar.

Indien f twee keer afleidbaar is, wordt de tweede afgeleide nul in een buigpunt.



11 Samenvattende tabel

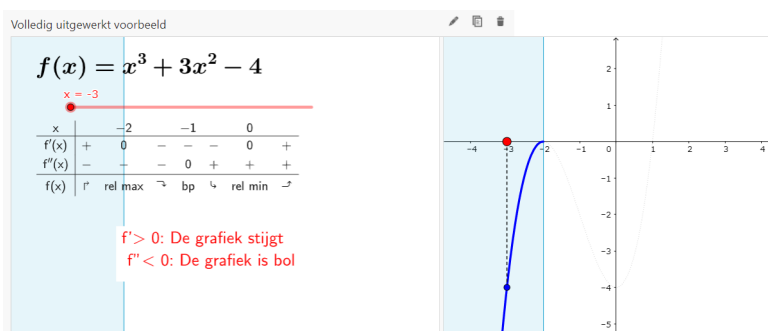


Figure 9: <https://www.geogebra.org/m/jsrkdf7v>

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+	
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	
$f(x)$	$\nearrow$	l. max	$\searrow$	bp	$\searrow$	l. min	$\nearrow$

12 Globaal minimum of maximum

De kandidaten voor een globaal minimum of maximum van een functie op een gesloten interval I , zijn de lokale minima of maxima (gelegen in het interval) en de randpunten van het domein.

Voorbeeld: bepaal de globale extrema van $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ over het interval $[-2, 2]$

We berekenen $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0$ als $x = -1$ of $x = 3$

$f(-2) = 0$, $f(-1) = 7$ en $f(2) = -20$ (waarom bekijken we $x = 3$ niet?)

dus globaal max voor $x = -1$ en globaal min voor $x = 2$

13 Oefeningen

1. Ga na dat aan alle voorwaarden van de stelling van Lagrange moet voldaan zijn zodat c , waarvan sprake, zou kunnen bestaan.
2. Voldoet $f(x) = \frac{1}{x}$ over het interval $[-1, 1]$ aan de stelling van Lagrange?
3. Voldoet $f(x) = |x|$ over $[-2, 2]$ aan de voorwaarden van de stelling van Rolle?
4. Toon aan dat $f(x) = \sin(2\pi x)$ voldoet aan de stelling van Rolle over het interval $[-1, 1]$
5. Toon aan dat $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x}$ over het interval $[0, 4]$ voldoet aan de stelling van Rolle en bepaal alle waarden van c in $]0, 4[$ waarvan sprake in deze stelling (A. $c=1$)
6. Gegeven $f(x) = x^2 - 5x + 1$ Leg de middelwaardestelling van Lagrange grafisch uit. Gebruik hiervoor het interval $[0, 2]$.
7. Bekijk $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ over het interval $[3, 5]$. Voldoet f aan de stelling van Lagrange? Zo ja, bepaal de waarde(n) van c waarvan sprake. (A. ja, $c = -\sqrt{5}$)
8. Zij $f \in C^1(\mathbb{R})$. Veronderstel dat $f(0) = -3$ en dat $f'(x) \leq 5 \forall x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat $f(2) \leq 7$.
9. Bewijs dat $f(x) = x^3 + x - 1$ juist één nulpunt heeft in het interval $[0, 1]$
10. Zelfde vraag voor $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$
11. Toon aan dat tussen twee nulpunten van $f(x) = \sin(x)$ een nulpunt van $f(x) = \cos(x)$ ligt.
12. Toon aan dat de vergelijking $1 - 2x = \sin(x)$ juist één oplossing heeft
13. zij $f(x) = \tan x - x$. Bepaal $f(0)$ en gebruik $f'(x)$ om aan te tonen dat $\tan x > x \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$
14. Toon aan dat $\sin(x) \leq 1, 2x \forall x \geq 0$
15. Bepaal de eventuele extrema van $f(x) = |x^2 - 1|$
16. Als f een continue afgeleide heeft in het interval $[-5, 10]$ met $f'(-5) = -1$ en $f'(10) = 1$, welke van onderstaande uitspraken geldt dan zeker:
 - (a) f is stijgend op $[-5, 10]$
 - (b) $f(c) = 0$ voor een $c \in]-5, 10[$
 - (c) f is hol in het interval $[-5, 10]$
 - (d) De grafiek van f heeft in VA in dit interval
 - (e) De grafiek van f heeft een horizontale raaklijn in dit interval
17. Als $f'(x) = (x - 2)^2(x + 4)^7x^4$ dan is f dalend in volgend interval:
 - (a) $]0, 2[$
 - (b) $]2, +\infty[$
 - (c) $] - \infty, -4[$
 - (d) $] - 4, 0[$
 - (e) Het juiste interval is niet gegeven
18. Aan welke voorwaarde moet $p \in \mathbb{R}$ voldoen opdat $x^3 + px - 1$ geen extremum zou hebben?
19. Juist of fout. Indien juist verwijst naar de juiste plaats in het dictaat. Indien fout, geef een tegenvoorbeeld:
 - (a) Indien f een extremum heeft voor $x = p$, dan is $f'(p) = 0$
 - (b) Indien f afleidbaar is en $f'(p) = 0$, dan bereikt f een relatief extremum voor $x = p$
 - (c) Indien f dalend is in $[a, b]$ dan is $f'(x) < 0$ voor elke x in $[a, b]$
 - (d) als f stijgend is in $[a, b]$ en f is afleidbaar in $[a, b]$ dan geldt $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$

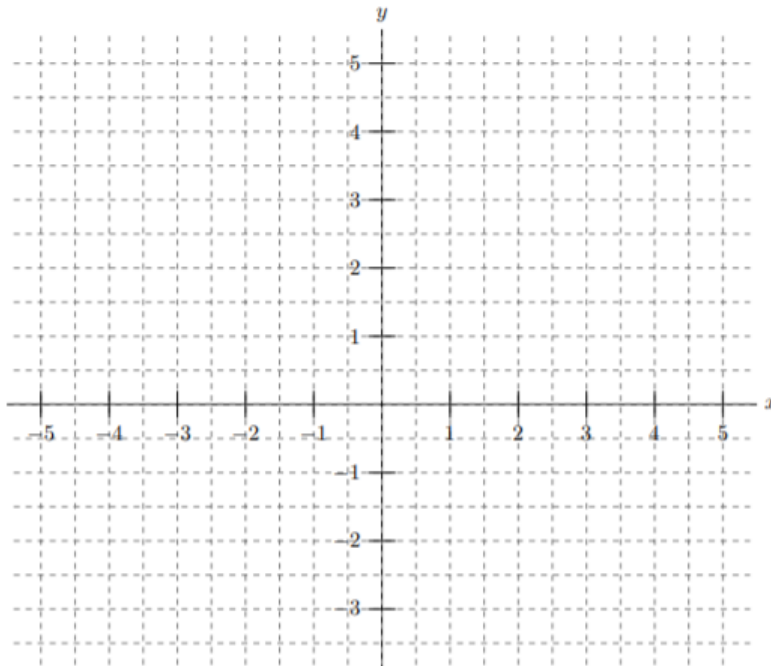
- (e) als $P(c, f(c))$ een buigpunt is van de grafiek van f , dan geldt $f''(c) = 0$.
- (f) Als voor een functie f geldt $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in]a, b[$, dan is f dalend in $[a, b]$
- (g) Als voor twee afleidbare functies $f(x)$ en $g(x)$ geldt dat $f(x) \leq g(x)$, dan geldt ook $f'(x) \leq g'(x)$

20. Schets een grafiek die aan onderstaande voorwaarden voldoet:

On the axes provided below, sketch the graph of a single function $y = h(x)$ satisfying all of the following:

- $h(x)$ is defined for all x in the interval $-5 < x < 5$.
- $h'(x) > 0$ for all $x < -3$.
- $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = 0$.
- $h(-2) = -3$.
- The average rate of change of $h(x)$ between $x = -1$ and $x = 1$ is 2.
- $h(1) = 2$.
- $h(x)$ is linear between $x = 1$ and $x = 3$.
- $h'(2) = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow 4} h(x)$ does not exist.
- $h'(x) < 0$ for all $x > 4$.

Make sure that your sketch is large and unambiguous.



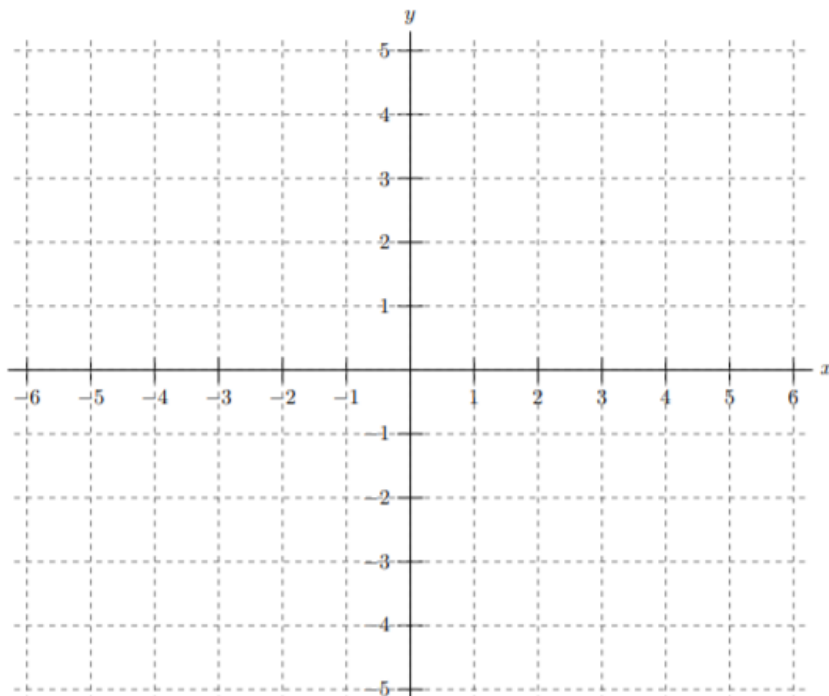
21. Schets een grafiek die aan onderstaande voorwaarden voldoet:

On the axes provided below, sketch the graph of a single function $y = g(x)$ satisfying all of the following:

- $g(x)$ is defined for all x in the interval $-6 < x < 6$.
- $g(x)$ has at least 5 critical points in the interval $-6 < x < 6$.
- The global maximum value of $g(x)$ on the interval $-5 \leq x \leq -3$ is 4, and this occurs at $x = -4$.
- $g(x)$ is not continuous at $x = -2$.
- $g'(x)$ (the derivative of g) has a local maximum at $x = 0$.
- $g(x)$ is continuous but not differentiable at $x = 1$.
- $g''(x) \geq 0$ for all x in the interval $2 < x < 4$.
- $g(x)$ has at least one local minimum on the interval $4 < x < 6$ but does not have a global minimum on the interval $4 < x < 6$.
- $g(x)$ has an inflection point at $x = 5$.

Make sure your sketch is large and unambiguous.

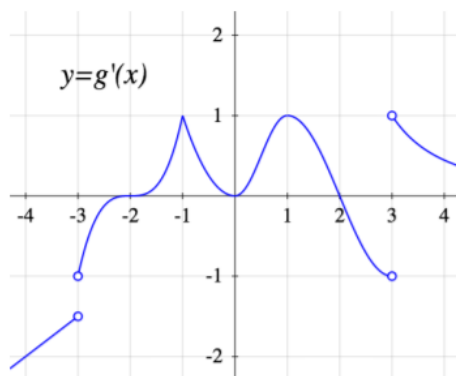
Graph of $y = g(x)$



22. Beantwoord volgende vragen over de grafiek van $g(x)$ aan de hand van de grafiek van $g'(x)$:

3. [6 points; 1 points per part.] You do not have to justify your answers to this question.

The function g has domain $\mathbb{R}$ and is continuous. Below is the graph of its derivative g' :



Note: the following questions are about g , but the graph is for the derivative g' .

Decide whether the function g has a local maximum, a local minimum, an inflection point, or nothing, at the points with each of the following x -coordinates:

(a) at $x = -3$

Circle one: Local max Local min Inflection point Nothing

(b) at $x = -2$

Circle one: Local max Local min Inflection point Nothing

(c) at $x = -1$

Circle one: Local max Local min Inflection point Nothing

(d) at $x = 0$

Circle one: Local max Local min Inflection point Nothing

(e) at $x = 2$

Circle one: Local max Local min Inflection point Nothing

(f) at $x = 3$

Circle one: Local max Local min Inflection point Nothing