Mechanické meditace

Moment síly

Žán Pól Kastról

1. března 2024

Obsah

1 Otáčení kolem bodu a kolem osy 2

2 Moment síly vzhledem bodu 3

3 Jiné vyjádření velikosti momentu síly vzhledem k bodu 6

4 Moment síly vzhledem k ose 7

5 Jiné vyjádření velikosti momentu síly vzhledem k ose 11

6 Vztah mezi momentem síly vzhledem k bodu a momentem síly vzhledem k ose 12

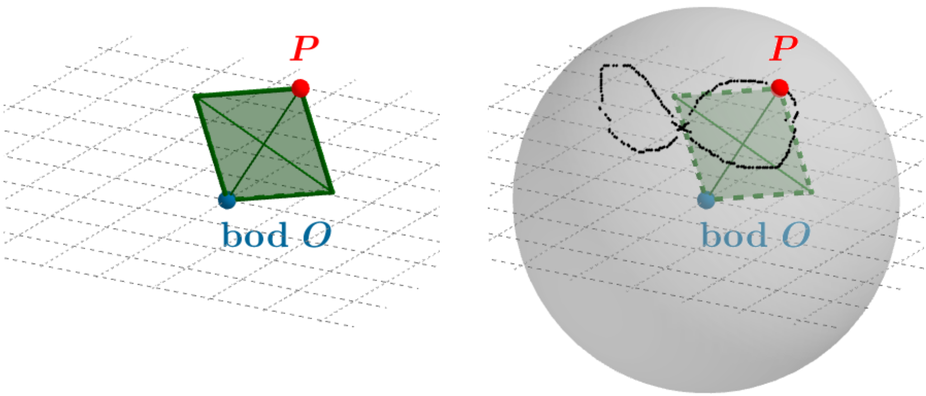
Tak hele, nebudu ti zastírat, že tato problématika je úplně zásadní. Tak se na to jukneme.

Toto bude veličina, která vyjadřuje otáčivý účinek síly na těleso. Páč těleso se může otáčet jak kolem **bodu**, tak kolem **osy**, lze zavést

- Moment síly vzhledem k **bodu**
- Moment síly vzhledem k **ose**

Jak říká starej dobrej Urgošík, *je však dobré si uvědomit, že samotné otáčení je možným, nikoli však nutným následkem momentu síly, a proto ani bod či osa, k nimž moment síly vztahujeme, nemusí být bodem či osou otáčení.*

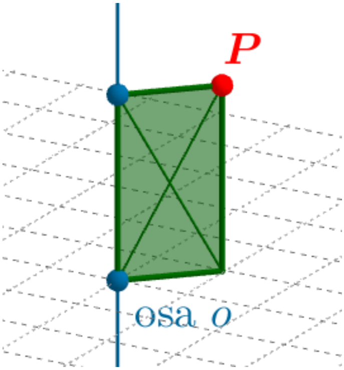
1 Otáčení kolem bodu a kolem osy



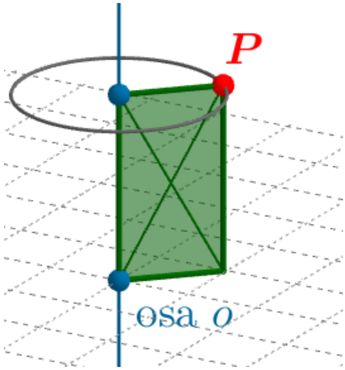
(a) Vzdálenost P a O se nemění (b) Trajektorie P leží na kulové ploše

Obr. 1: Rotace tělesa kolem bodu

https://www.geogebra.org/m/gvxegtmc



(a) Vzdálenost P a O se nemění



(b) Trajektorie P je kružnice se středem na ose rotace

Obr. 2: Rotace tělesa kolem osy

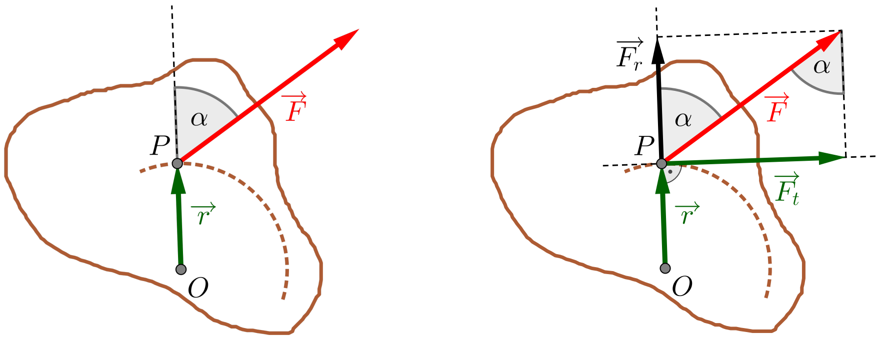
2 Moment síly vzhledem bodu

V *prostoru* máme bod O a vektor síly $\vec{F}$ s vektorovou přímkou p. V jaké vzájemné poloze může být v prostoru přímka a bod? Je to stejné jako v rovině – bod na přímce buď leží, nebo na ní neleží.

Pokud bod O **leží** na vektorové přímce síly, nemůže mít síla žádný otáčivý účinek, to je jasné.

Uvažujme dále druhou možnost – bod O **neleží** na vektorové přímce síly.

Na obrázku 3a je těleso volně otáčivé kolem bodu O. V bodě P, jenž je vůči O určen polohovým vektorem $\vec{r}$, je působiště síly $\vec{F}$, která svírá s polohovým vektorem úhel α. Rovina obrázku splývá s rovinou určenou vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$. Sílu rozložíme do dvou směrů – do směru vektoru $\vec{r}$ a do směru kolmého k vektoru $\vec{r}$ (viz obr. 3b). Vzniknou složky $\vec{F}_r$ a $\vec{F}_t$. Vektorová přímka složky $\vec{F}_r$ prochází bodem rotace O, takže evidentně nemá na těleso žádný otáčivý účinek. Ten má pouze složka $\vec{F}_t$ kolmá k polohovému vektoru. Otáčivý účinek je zřejmě úměrný velikosti této



(a) (b)

Obr. 3: Moment síly vzhledem k bodu

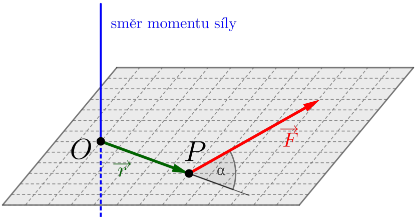
složky $F_t = F \sin\alpha$ a také velikosti polohového vektoru r. Označíme-li velikost tohoto účinku M, bude zřejmě platit

$$M = r \cdot F_t = r \cdot (F \sin\alpha) \tag{1}$$

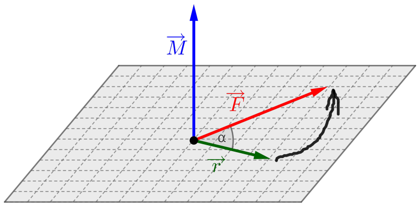
Této nové veličině budeme říkat **moment síly vzhledem k bodu**. Vzhledem k tomu, tento účinek způsobuje otáčení, které se může dít v prostoru v různých směrech, podle toho, kam bude síla v prostoru mířit (viz obr.1b), bude jistě rozumné přisoudit momentu síly **vektorový charakter**.

Směr tohoto vektoru momentu síly $\vec{M}$ by bylo vhodné zvolit tak, abychom z něj jednoznačně poznali rovinu, v níž se bude dít otáčení, tedy rovinu tvořenou vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$. Proto budeme chtít, aby byl vektor $\vec{M}$ **kolmý** na tuto rovinu (viz obr. 4a).

Přitom **orientace** tohoto vektoru by měla naznačovat *smysl otáčení*. Např. v obr. 3a bude síla otáčet tělesem *ve směru hodinových ručiček* a v obr. 4a bude síla otáčet tělesem p*roti směru hodinových ručiček*. Tyto dva různé smysly otáčení tedy vystihneme dvěma možnými orientacemi vektoru $\vec{M}$. Zbývá určit, kterou orientaci přisoudíme kladnému a kterou zápornému smyslu otáčení. Bylo stanoveno dohodou, že tuto orientaci



(a) **Směr**: vektor $\vec{M}$ je kolmý na rovinu vektorů $\vec{r}$ a $\vec{F}$



(b) **Orientace**: Pravidlo pravé ruky určí jednu ze dvou možných orientací

Obr. 4: Směr a orientace vektoru momentu síly

určíme pomocí **pravidla pravé ruky**.

Pravidlo pravé ruky: Umístíme oba vektory pomyslně do společného výchozího bodu (viz obr. 4b) a necháme nejkratší cestou rotovat vektor $\vec{r}$ k vektoru $\vec{F}$. Pravou ruku umístíme malíkovou hranou do roviny vektorů $\vec{r}$ a $\vec{F}$ tak, aby ohnuté prsty směřovaly ve směru této rotace. Potom vztyčený palec určuje orientaci vektoru $\vec{M}$.

Shrnutí: moment síly $\vec{F}$ vzhledem k bodu O (viz obr. 5) je **vektor** $\vec{M}$, pro nějž platí:

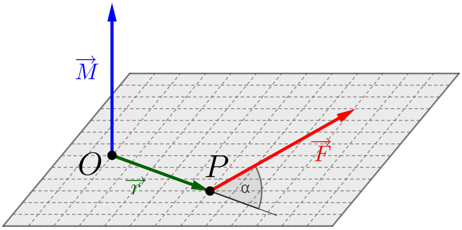
- jeho *velikost* je dána vztahem

$$\boxed{M = r \cdot F \sin\alpha} \tag{2}$$

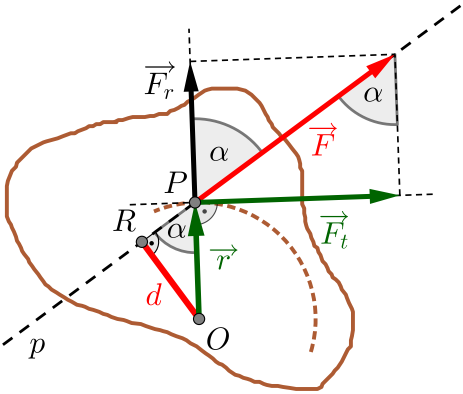
- jeho *směr* je dán kolmicí k rovině tvořené vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$
- jeho *orientace* je dána **pravidlem pravé ruky** pro rotaci vektoru $\vec{r}$ k vektoru $\vec{F}$.

Tyto tři vlastnosti jsou odpovídají matematicky **vektorovému součinu**:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{3}$$



Obr. 5



Obr. 6

3 Jiné vyjádření velikosti momentu síly vzhledem k bodu

Z obrázku 3b jsme dostali pro velikost momentu síly vzhledem k bodu vztah (1), tedy

$$\boxed{M = r \cdot F_t} \tag{4}$$

Takto můžeme chápat moment jako *součin vzdálenosti působiště P síly F od bodu O a tečné složky síly F_t.*

Nyní obrázek 3b trochu doplníme (viz obr. 6) a vyjádříme M jinak. Do obrázku přidáme vektorovou přímku p síly $\vec{F}$ a z bodu O spustíme na přímku p kolmici. Vzdálenost paty této kolmice R od O, čili **vzdálenost vektorové přímky p od bodu O** označíme d a nazveme **rameno síly** $\vec{F}$. Pro d z trojúhelníku PRO dostáváme

$$d = r \sin \alpha \tag{5}$$

Vztah (1) můžeme s použitím (5) upravit takto:

$$M = r \cdot F_t = r \cdot (F \sin \alpha) = (r \sin \alpha) \cdot F$$

$$\boxed{M = d \cdot F} \tag{6}$$

Velikost momentu síly vzhl. k bodu O proto můžeme vyjádřit jako *součin ramene síly d a velikosti síly F.*

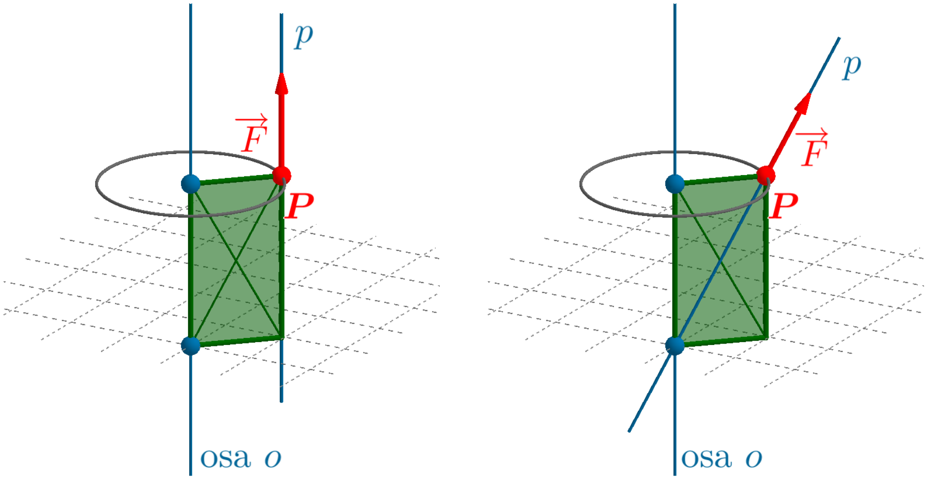
Rameno síly d je vzdálenost bodu O od vektorové přímky síly $\vec{F}$.

4 Moment síly vzhledem k ose

Mějme v *prostoru* osu rotace o a vektor síly $\vec{F}$ s vektorovou přímkou p. V jaké vzájemné poloze poloze mohou být v prostoru přímky o a p? Ze stereometrie víme, že to mohou být *rovnoběžky*, *různoběžky* nebo *mimoběžky*.

V obrázcích 7a a 7b máme situaci, kdy vektorová přímka je **rovnoběžná** nebo **různoběžná** s osou. Je jasné, že ani v jednom z těchto případů nemá síla otáčivý účinek. Proto žádná síla ležící v rovině určené osou rotace a bodem P nemá otáčivý účinek.

Uvažujme třetí možnost, že vektorová přímka je **mimoběžná** s osou rotace. Točivý účinek bude mít pouze průmět síly $\vec{F'}$ do roviny kolmé



(a) rovnoběžky (b) různoběžky

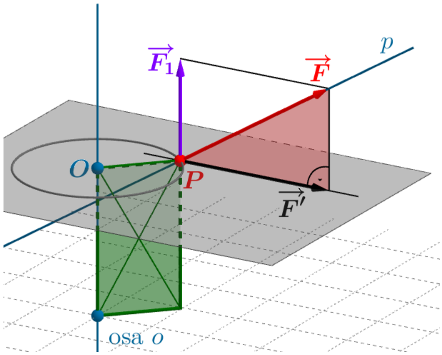
Obr. 7

k ose (viz obr. 8a). Složka $\vec{F}_1$ rovnoběžná s osou točivý účinek nemá. Snaží se osu *natočit*, ale páč osa je **pevná**, má tato složka smůlu! Sílu $\vec{F}'$ ještě v rovině kolmé k ose dále rozložíme na složku $\vec{F}_2$ ve směru přímky OP a na složku $\vec{F}_3$ k ní kolmou (viz obr 8b). Ani složka $\vec{F}_2$ točivý účinek nemá, snaží se *posunout* osu, páč osa je **pevná**, má tato složka smůlu! Vidíme, že v posledku má točivý účinek pouze složka $\vec{F}_3$.

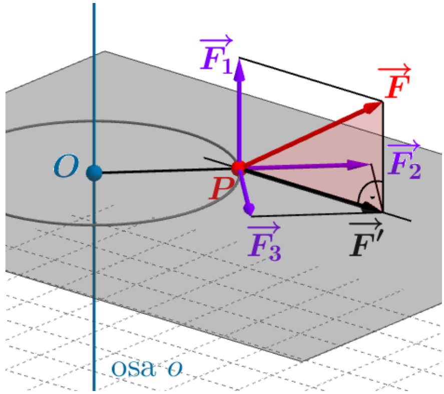
Dále postačí, když se omezíme jen na situace, kdy síla $\vec{F}$ leží v rovině kolmé k ose, takže splývá se svým průmětem $\vec{F}'$ (viz obr. 9a). Složka $\vec{F}_1$ je nulová a složky $\vec{F}_2$ a $\vec{F}_3$ **přeznačíme** na $\vec{F}_r$ a $\vec{F}_t$. Polohu bodu P určíme polohovým vektorem umístěným v bodě O, v němž osa protíná rovinu rotace.

Nyní obdobnými úvahami, jakými jsme v sekci 2 vymysleli veličinu moment síly vzhledem k bodu, vymyslíme veličinu **moment síly vzhledem k ose**. Jistojistě to bude opět vektor a budeme jej opět značit $\vec{M}$.

Velikost vektoru $\vec{M}$ bude zřejmě úměrná velikosti složky $\vec{F}_t$ a vzdá-



(a) Rozklad na dvě složky



(b) Rozklad na tři složky

Obr. 8: Mimoběžky

https://www.geogebra.org/m/ybct23bq#material/fuf5ttu6

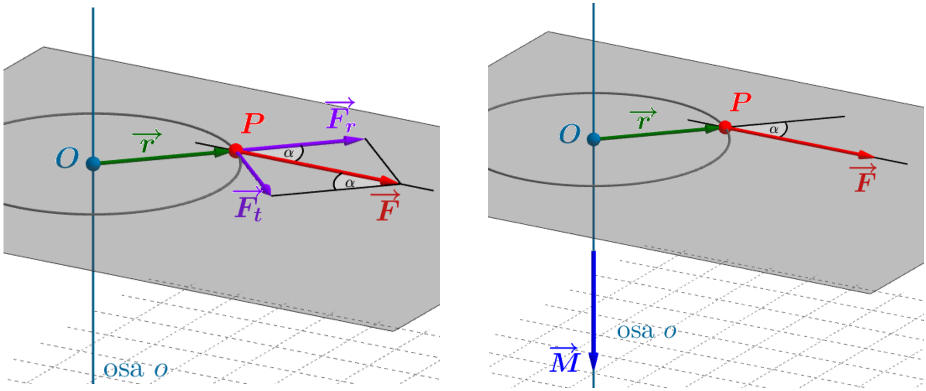
lenosti bodu P od osy rotace, tedy velikosti polohového vektoru $\vec{r}$.

$$\boxed{M = r \cdot F_t} \tag{7}$$

Rotace se může dít (na rozdíl od rotace kolem bodu) pouze v rovině kolmé k ose. Za **Směr** vektoru $\vec{M}$ bude proto vhodné zvolit směr osy rotace, páč známe-li tento směr, víme, že rotace se děje v rovině k němu kolmé.

Orientaci vektoru $\vec{M}$ určíme stejně jako u momentu vzhledem k bodu pomocí pravidla pravé ruky.

Shrnutí: moment síly $\vec{F}$, která leží **v rovině kolmé k ose**, vzhledem k této ose je **vektor** $\vec{M}$, pro nějž platí:



(a) Rozklad na dvě složky (b) Moment síly vzhledem k ose

Obr. 9: Síla v rovině kolmé k ose

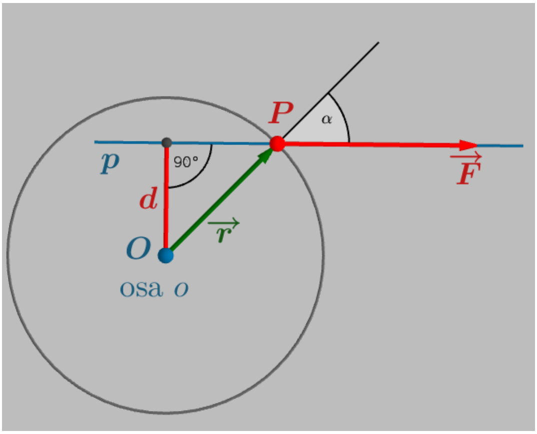
https://www.geogebra.org/m/ybct23bq#material/fjzgfqt5

- jeho *velikost* je dána vztahem

$$\boxed{M = r \cdot F \sin \alpha} \tag{8}$$

  kde r je vzdálenost působiště P od osy rotace, čiliž velikost polohového vektoru bodu P s počátečním bodem O (průsečíkem osy s rovinou kolmou k ose procházející bodem P) a α je velikost úhlu mezi polohovým vektorem $\vec{r}$ a silou $\vec{F}$
- jeho *směr* je dán osou rotace o
- jeho *orientace* je dána **pravidlem pravé ruky** pro rotaci vektoru $\vec{r}$ k vektoru $\vec{F}$.
- Vektor $\vec{M}$ umisťujeme do libovolného bodu na ose rotace

Tyto tři vlastnosti jsou odpovídají matematicky **vektorovému součinu**:



Obr. 10

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}} \tag{9}$$

Poznámka: Pokud by síla $\vec{F}$ neležela v rovině kolmé k ose, vzali bychom její **kolmý průmět** do této roviny $\vec{F'}$ a moment síly $\vec{F}$ by potom byl dán vztahem

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F'} \tag{10}$$

5 Jiné vyjádření velikosti momentu síly vzhledem k ose

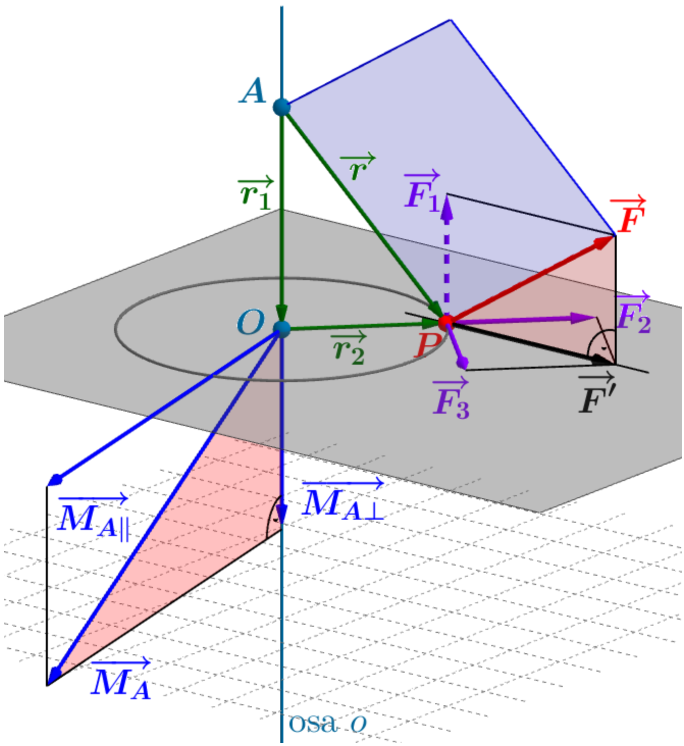
V obrázku (10) je pohled ve směru osy o, takže osa se promítá jako bod, který splývá s bodem O. Opět jako u momentu vzhledem k bodu zavedeme pojem **rameno síly** d. Ale bacha, nyní to je vzdálenost dvou přímek:

Rameno síly d je vzdálenost vektorové přímky síly $\vec{F}$ od osy rotace o.

Páč vidíme, že $d = r \cdot \sin\alpha$, dostáváme vzhledem k (8)

$$\boxed{M = d \cdot F} \tag{11}$$

6 Vztah mezi momentem síly vzhledem k bodu a momentem síly vzhledem k ose



Obr. 11

Nejprve intuitivně. Co vyjadřuje směr vektoru momentu? To, že rotace se děje v rovině kolmé k tomuto směru.

Podíváme se na obrázek 11, kde jsme se vrátili k obecné poloze síly $\vec{F}$, k jejímu rozkladu do tří složek a ke značení z obrázku 8.

Koukněmež se nejprve na na moment $\vec{M}_A$ síly $\vec{F}$ vzhledem k libovolně zvolenému bodu A na ose o. Bod A je počátečním bodem polohového vektoru $\vec{r}$ bodu P. Moment je umístěn do bodu O a jde šikmo dolů pod šedou rovinu kolmou k ose o. Je kolmý na modrou rovinu vektorů $\vec{r}$ a $\vec{F}$, jejichž je vektorovým součinem.

Kdyby těleso nebylo vázáno na osu o, otáčela by ho síla v této modré rovině. Moment $\vec{M}_A$ je v obrázku rozložen do složek $\vec{M}_{A\perp}$ a $\vec{M}_{A\parallel}$.

- Složka $\vec{M}_{A\perp}$ je kolmým průmětem vektoru $\vec{M}_A$ do osy o a vyjadřuje rotaci v šedé rovině kolmé na osu o.
- Složka $\vec{M}_{A\parallel}$ vyjadřuje rotaci v rovině obsahující osu o.

Výsledná rotace by byla složením těchto dvou rotací. Ale těleso je vázáno na osu, která je pevná, takže se bod P v rovině kolmé na složku $\vec{M}_{A\parallel}$ otáčet nemůže. Může se otáčet jen v šedé rovině kolmé na rotační osu, takže se uplatní jen složka $\vec{M}_{A\perp}$.

Hypotéza: Vypadá to tedy tak, že **kolmý průmět $\vec{M}_{A\perp}$ momentu síly vzhledem k libovolnému bodu A do osy o** by mohl být současně **momentem této síly $\vec{M}_o$ vzhledem k této ose**.

$$\vec{M}_o = \vec{M}_{A\perp} \tag{12}$$

Přitom víme dle vztahu 10, že má být (máme přeznačeno $\vec{r}$ na $\vec{r}_2$)

$$\vec{M}_o = \vec{r}_2 \times \vec{F'} = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_3$$

Ale $\vec{r}_2 \parallel \vec{F}_2$, takže $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}$. Pročež platí pro moment vzhledem k ose:

$$\vec{M}_o = \vec{r}_2 \times \vec{F}_3 \tag{13}$$

Abychom ověřili naši hypotézu, musíme dokázat, že

$$\vec{M}_{A\perp} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_3 \tag{14}$$

Nejprve vyjádříme celý moment $\vec{M}_A$ a potom najdeme jeho kolmý průmět do osy $\vec{M}_{A\perp}$.

Dle definice momentu k bodu A platí

$$\vec{r} \times \vec{M}_A = \vec{F}$$

Vektor $\vec{r}$ máme v obrázku 11 rozložený do složek, takže platí $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$. Podobně platí $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Takže dostáváme

$$\vec{M}_A = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$
$$\vec{M}_A = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_3$$

Ale rovnoběžné vektory mají nulový vektorový součin, takže

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{0}$$

A proto

$$\vec{M}_A = \vec{r}_1 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_3 \tag{15}$$

Nyní si stačí uvědomit, že první dva členy součtu leží v rovině kolmé k ose, takže poslední složka, která je kolmá na tuto rovinu, musí být hledaným průmětem vektoru $\vec{M}_A$ do osy o:

$$\vec{M}_{A\perp} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_3 \tag{16}$$

A to jsme chtěli dokázat. Vskutku tedy platí:

Moment síly $\vec{M}_o$ vzhledem k ose o je roven kolmému průmětu momentu této síly $\vec{M}_A$ vzhledem k libovolnému bodu A osy o do této osy:

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{M}_{A\perp}} \qquad (17)$$