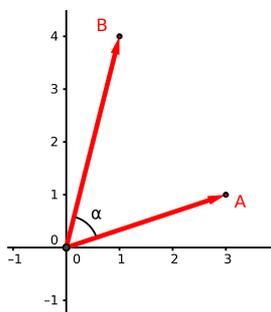


Come possiamo calcolare l'angolo tra due vettori?

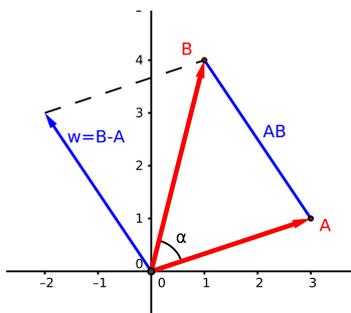
Facciamo di nuovo un passo indietro in \mathbb{R}^2 e consideriamo due vettori $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Come possiamo misurare l'angolo $\alpha = \widehat{AOB}$, minore di un angolo piatto, che essi formano?



Consideriamo il triangolo AOB e utilizziamo il teorema di Carnot per calcolare la misura di α :

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos(\alpha) \\ &= \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos(\alpha) \end{aligned}$$

D'altra parte possiamo considerare il vettore $\mathbf{w} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$, corrispondente al segmento orientato \mathbf{AB} .



Osserviamo che il quadrato della lunghezza o norma del vettore \mathbf{w} , corrispondente al quadrato della lunghezza del segmento AB , è

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|^2 &= \overline{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = x_B^2 - 2x_Ax_B + x_A^2 + y_B^2 - 2y_Ay_B + y_A^2 \\ &= \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2(x_Ax_B + y_Ay_B) \end{aligned}$$

Uguagliando quanto ottenuto con i due differenti procedimenti, otteniamo che

$$\begin{aligned} \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2(x_Ax_B + y_Ay_B) &= \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\|A\|\|B\|\cos(\alpha) \\ \Rightarrow \\ x_Ax_B + y_Ay_B &= \|A\|\|B\|\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Tale quantità è detta **prodotto scalare** tra i vettori A e B (il risultato è infatti uno scalare, ovvero un numero):

PRODOTTO SCALARE tra A e B : $A \cdot B = x_Ax_B + y_Ay_B = \|A\|\|B\|\cos(\alpha)$

dove α è l'angolo tra essi.

In particolare l'angolo α formato dai due vettori A e B è dato da

$$\cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|}$$

Osserviamo inoltre che due vettori A e B sono **perpendicolari** se e solo se il loro prodotto scalare si annulla: $A \cdot B = 0$

Esercizio 1. Calcolare l'angolo formato dai vettori $A = (3, 1)$ e $B = (1, 4)$.

SOLUZIONE:

Il prodotto scalare tra i due vettori è

$$A \cdot B = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7$$

mentre la lunghezza o norma è

$$\|A\| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad \|B\| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Di conseguenza l'angolo α tra le due rette è dato da

$$\cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} = \frac{7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{170}}{170} \Rightarrow \alpha \approx 57^\circ$$

□

Esercizio 2. Considera i vettori $\mathbf{u}(1, -3)$ e $\mathbf{v}(4, a)$, dove a è un parametro reale. Stabilisci per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i due vettori sono tra loro ortogonali.

SOLUZIONE:

Sappiamo che due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero. Poiché

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot a = 4 - 3a$$

i due vettori sono ortogonali se $4 - 3a = 0$, ovvero $a = \frac{4}{3}$.

□

Generalizzando quanto visto in \mathbb{R}^2 possiamo definire il prodotto scalare tra due vettori A e B di \mathbb{R}^3 come:

PRODOTTO SCALARE tra A e B : $A \cdot B = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B = \|A\| \|B\| \cos(\alpha)$

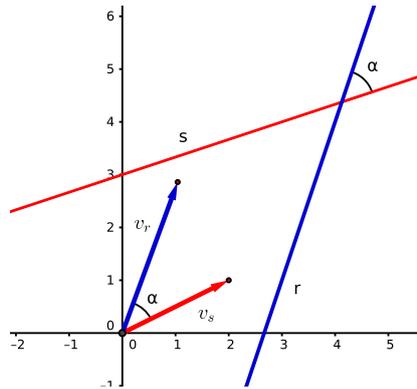
dove α è l'angolo compreso tra essi.

Di conseguenza

$$\cos(\alpha) = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|}$$

e, in particolare, due vettori A e B sono perpendicolari se e solo se $A \cdot B = 0$.

Naturalmente il prodotto scalare può essere utilizzato per calcolare l'angolo tra due rette. Infatti l'angolo formato tra due qualsiasi rette r e s , del piano o dello spazio, è l'angolo formato dalle rette r' e s' passanti per l'origine e rispettivamente parallele a r e s . Notiamo che questa definizione ci permette anche di calcolare l'angolo tra rette sghembe. Di conseguenza se i vettori direzione di r e s sono rispettivamente \mathbf{v}_r e \mathbf{v}_s , l'angolo α tra r e s è l'angolo tra \mathbf{v}_r e \mathbf{v}_s :



Infine, l'angolo α formato dalle rette r e s è dato da:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s}{\|\mathbf{v}_r\| \|\mathbf{v}_s\|}$$

Osserviamo che in particolare due rette r e s sono perpendicolari se e solo se si annulla il prodotto scalare dei loro vettori direzione: $\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{v}_s = 0$.

Esercizio 3. Determinare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u}(1, -1, 0)$ e $\mathbf{v}(-2, 0, 2)$.

SOLUZIONE:

Detto α l'angolo tra i due vettori, sappiamo che

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Poiché

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\| &= \sqrt{2} \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 = -2\end{aligned}$$

otteniamo

$$\cos(\alpha) = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\pi = 120^\circ$$

□

Esercizio 4. Determinare per quale valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ i vettori $\mathbf{u}(1, -2, a)$ e $\mathbf{v}(3, 3, -1)$ sono tra loro ortogonali.

SOLUZIONE:

Due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero. Poiché

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 - 6 - a = -3 - a$$

i due vettori sono ortogonali se $-3 - a = 0$, ovvero se $a = -3$.

□

Esercizio 5. Dato il vettore $\mathbf{v}(1, 3)$ di \mathbb{R}^2 determinare:

- Un vettore \mathbf{u} di \mathbb{R}^2 ortogonale a \mathbf{v}
- Un secondo vettore \mathbf{w} di \mathbb{R}^2 ortogonale a \mathbf{v}
- Che relazione c'è tra \mathbf{u} e \mathbf{w} ?
- Che forma devono avere tutti i vettori di \mathbb{R}^2 ortogonali a \mathbf{u} ? Cosa descrivono?

Esercizio 6. Dato il vettore $\mathbf{v}(1, 3, 1)$ di \mathbb{R}^3 determinare:

- Un vettore \mathbf{u} di \mathbb{R}^3 ortogonale a \mathbf{v}
- Un secondo vettore \mathbf{w} di \mathbb{R}^3 ortogonale a \mathbf{v}
- Un terzo vettore \mathbf{w}' di \mathbb{R}^3 ortogonale a \mathbf{v} che abbia direzione differente da \mathbf{u} e da \mathbf{w} .

Esercizio 7. Determinare un vettore di \mathbb{R}^3 ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}(1, 3, 1)$ e $\mathbf{w}(2, 0, -1)$.

SOLUZIONE:

Si vede facilmente che tutti i vettori $\mathbf{u}(1, a, 2)$ sono ortogonali a \mathbf{w} . Imponendo l'ortogonalità tra \mathbf{u} e \mathbf{v} otteniamo $1 + 3a + 2 = 0$, ovvero $a = -1$. Di conseguenza il vettore $(1, -1, 2)$ è ortogonale a \mathbf{v} e a \mathbf{w} .

□

Esercizio 8. Determinare un vettore di \mathbb{R}^3 ortogonale ad entrambi i vettori $\mathbf{v}(1, 3, 1)$ e $\mathbf{w}(2, 1, -1)$.

SOLUZIONE:

Supponendo che esista un vettore ortogonale ad entrambi i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} con terza componente diversa da zero, possiamo cercare un vettore \mathbf{u} del tipo $\mathbf{u} = (a, b, 1)$. Imponendo l'ortogonalità con \mathbf{v} e \mathbf{w} otteniamo

$$\begin{cases} a + 3b + 1 = 0 \\ 2a + b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3b - 1 \\ -6b - 2 + b - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Un vettore ortogonale ad entrambi i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} è quindi $\mathbf{u}_1 = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 1)$. Naturalmente ogni vettore multiplo di \mathbf{u}_1 è ancora ortogonale ad entrambi i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} , quindi un secondo vettore ortogonale a \mathbf{v} e \mathbf{w} è per esempio $\mathbf{u}_2(4, -3, 5)$.

□