Množiny středů všech kružnic, které se dotýkají dvou daných kružnic

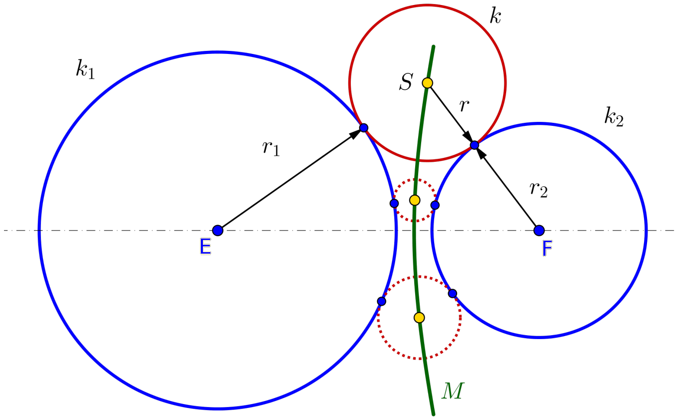
Žán Pól Kastról

24. července 2018

Obsah

1 Úvod

Jsou dány dvě kružnice $k_1(E; r_1)$ a $k_2(F; r_2)$. Vezmeme kružnici $k(S; r)$, která se obou kružnic dotýká. Co je množinou M (viz obr. 1) středů všech takovýchto kružnic?



Obrázek 1

Je zřejmé, že řešení bude záviset na vzájemné poloze kružnic k_1, k_2, dále na tom, zda poloměry r_1, r_2 jsou shodné nebo různé a na tom, zda se jedná o dotyk vnitřní nebo vnější. (V obrázku 1 mají zadané kružnice nulový průnik, různé poloměry a oba dotyky jsou vnější.)

2 Přehled možností

Všechny možnosti volby výše zmíněných parametrů můžeme prozkoumat v apletech https://ggbm.at/fwtuhtwf a https://ggbm.at/gcvbpdxs.

Z apletů vidíme, že množiny středů M se skládají z **přímek**, **hyperbol** a **elips**.

Přímky jsou dvojího typu:

- osa o_{EF} úsečky EF

- přímka EF

Hyperboly jsou dvojího typu a liší se velikostí hlavní poloosy:

- h_r – hyperbola **„rozdílová“:** $a_r = \dfrac{r_1 - r_2}{2}$
- h_s – hyperbola **„součtová“:** $a_s = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$

Vidíme, že $a_r < a_s$, takže hyperboly h_r mají vzdálenost hlavních vrcholů menší než hyperboly h_s.

Elipsy *el* jsou jen jednoho typu a mají velikost hlavní poloosy

$$a_{el} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

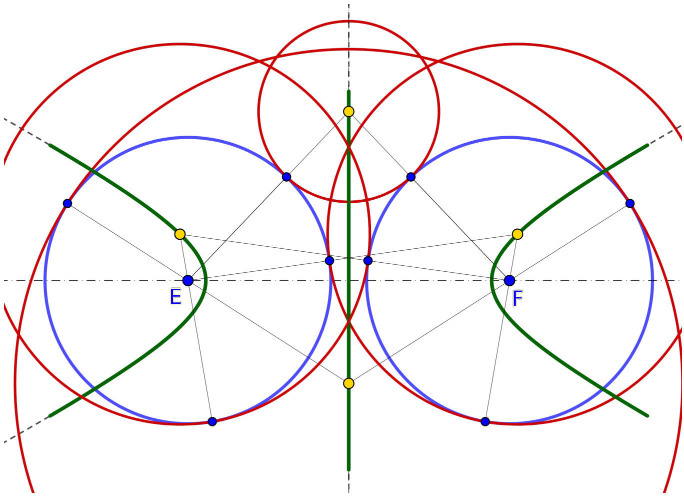
V případě, že $E = F$, stává se z elipsy kružnice m.

Uvedené vztahy dokážeme v kapitole 3.

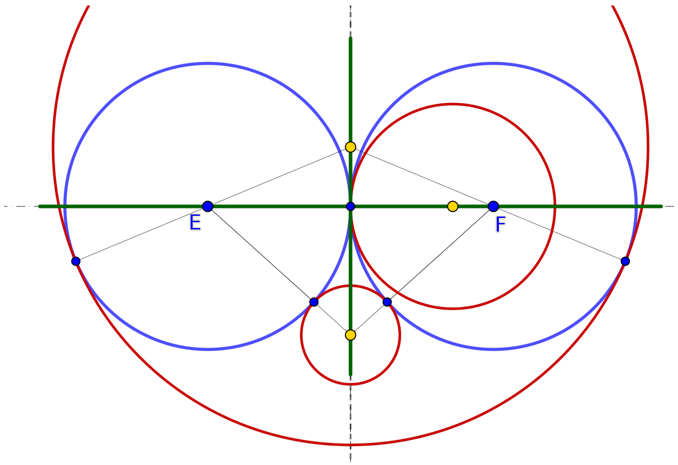
2.1 Kružnice k_1, k_2 mají stejné poloměry

(https://ggbm.at/fwtuhtwf)

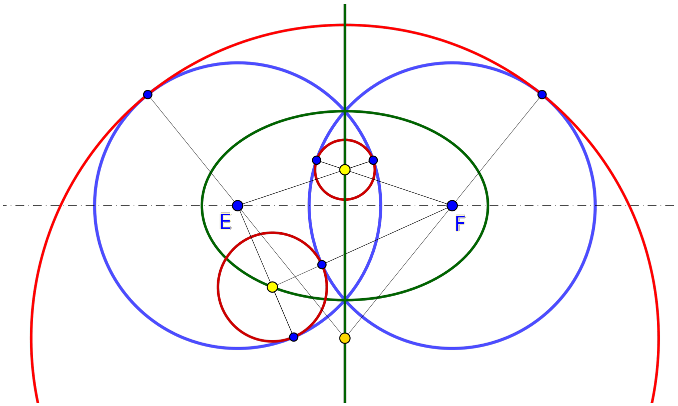
- **Poloha 1**: $|EF| > r_1 + r_2 \rightarrow M = o_{EF} \cup h_r$ (viz obr.2)
- **Poloha 2**: $|EF| = r_1 + r_2 \rightarrow M = o_{EF} \cup \overleftrightarrow{EF}$ (viz obr.3)
- **Poloha 3**: $|EF| < r_1 + r_2 \rightarrow M = o_{EF} \cup el$ (viz obr.4)



Obrázek 2: $r_1 = r_2$; poloha 1



Obrázek 3: $r_1 = r_2$; poloha 2

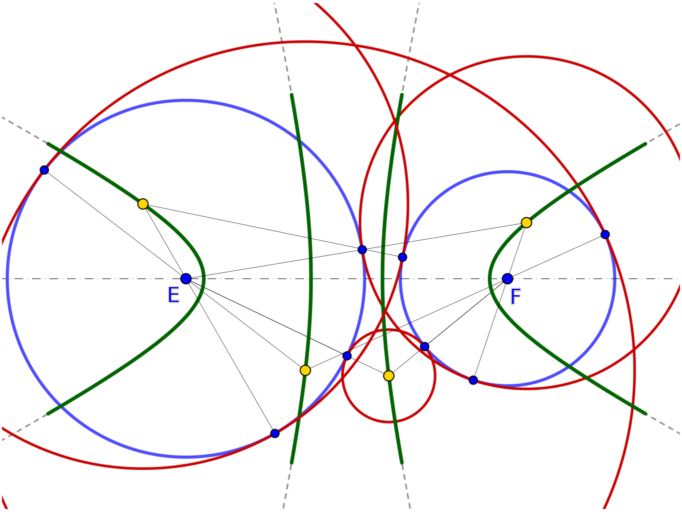


Obrázek 4: $r_1 = r_2$; poloha 3

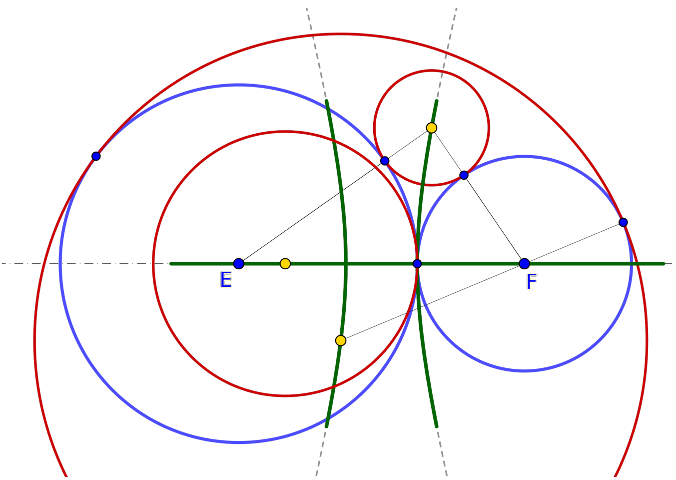
2.2 Kružnice k_1, k_2 mají různé poloměry

(https://ggbm.at/gcvbpdxs)

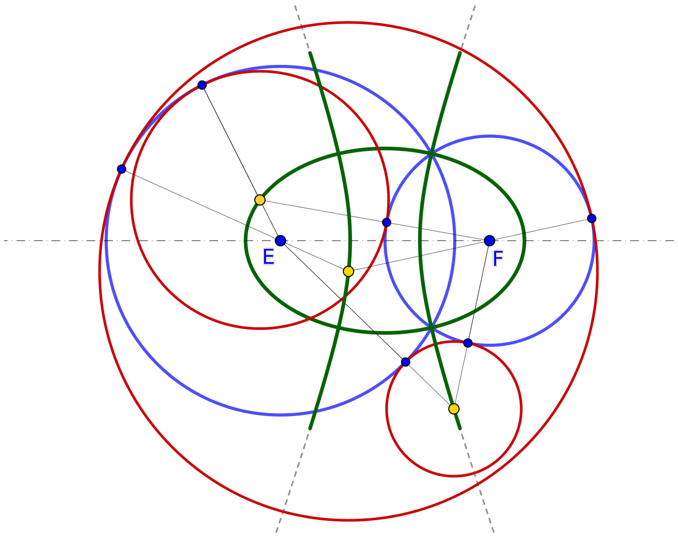
- **Poloha 1**: $|EF| > r_1 + r_2 \rightarrow M = h_r \cup h_s$ (viz obr.5)
- **Poloha 2**: $|EF| = r_1 + r_2 \rightarrow M = h_r \cup \overleftrightarrow{EF}$ (viz obr.6)
- **Poloha 3**: $|EF| < r_1 + r_2 \rightarrow M = h_r \cup el$ (viz obr.7)
- **Poloha 4**: $|EF| = |r_1 - r_2| \rightarrow M = \overleftrightarrow{EF} \cup el$ (viz obr.8)
- **Poloha 5**: $|EF| < |r_1 - r_2| \rightarrow M = el$ (viz obr.9)
- **Poloha 6**: $|EF| = 0 \rightarrow M = m$ (kružnice) (viz obr.10)



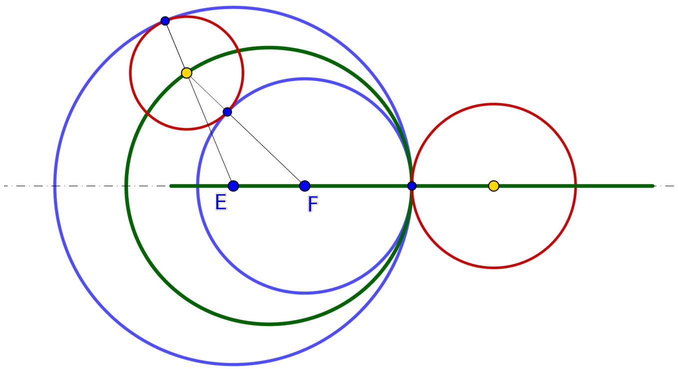
Obrázek 5: $r_1 \neq r_2$; poloha 1



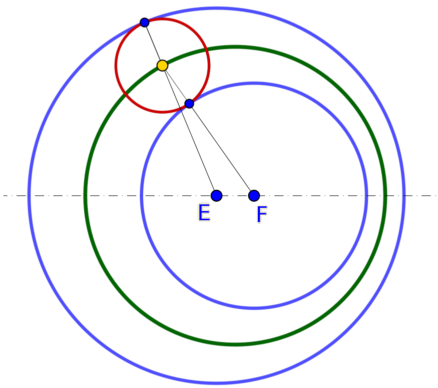
Obrázek 6: $r_1 \neq r_2$; poloha 2



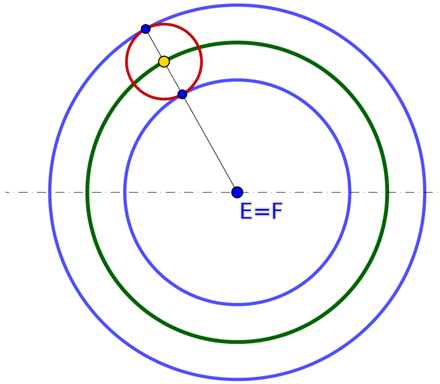
Obrázek 7: $r_1 \neq r_2$; poloha 3



Obrázek 8: $r_1 \neq r_2$; poloha 4



Obrázek 9: $r_1 \neq r_2$; poloha 5



Obrázek 10: $r_1 \neq r_2$; poloha 6

2.3 Přechody hyperboly a elipsy k přímce, polopřímce a úsečce

Mezní případy hyperbol a elipsy, kdy tyto kuželosečky přecházejí v *přímku*, *dvojici polopřímek* či v *úsečku*, můžeme sledovat v apletu https://ggbm.at/uga4ethv.

3 Věty a důkazy

To, že hledanými množinami bodů M jsou v jednotlivých případech **přímky**, **elipsy** a dva druhy **hyperbol** (**rozdílová** a **součtová**), je možno vyslovit jako věty, které lze snadno dokázat. Ukážeme si důkazy vybraných případů. Důkazy pro všechny ostatní případy by byly podobné.

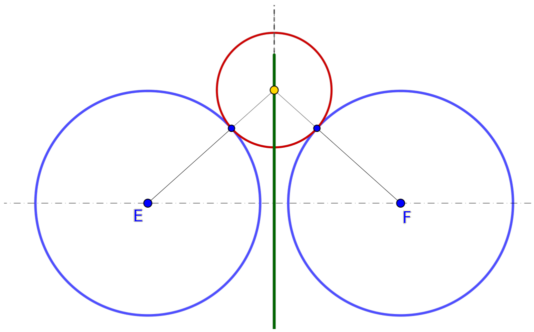
3.1 Množinou M je osa úsečky EF

Tato situace nastává jen pro $r_1 = r_2$, a to v několika případech. Vyberme **jeden z těchto případů**, vyslovíme příslušnou větu a dokážeme ji.

3.1.1 Případ 1

Vezmeme případ, kdy kružnice k_1, k_2 mají stejné poloměry a jsou v poloze 1, kdy se neprotínají. Přitom uvažujme kružnici k, která má s oběma zadanými kružnicemi **vnější dotyk** (viz. obr.11).

Můžeme vyslovit následující větu:



Obrázek 11: $r_1 = r_2$ – poloha 1 – vnější dotyk – osa úsečky EF

Věta 1: Osa úsečky EF

Jsou dány dvě kružnice $k_1(E, r_1)$ a $k_2(F, r_2)$, které nemají žádný společný bod a mají stejné poloměry ($r_1 = r_2$). Množinou středů všech kružnic, které mají s oběma kružnicemi **vnější** dotyk, je **přímka**, která je **osou úsečky** EF.

Důkaz. Věta mluví o dvou množinách:

- M_1 je množina středů všech kružnic k, které mají se zadanými kružnicemi vnější dotyk.
- M_2 je osa o_{EF} úsečky EF, tedy množina všech bodů v rovině, které mají od E i F stejnou vzdálenost.

Důkaz rovnosti dvou množin $M_1 = M_2$ se provádí ve **dvou krocích**:

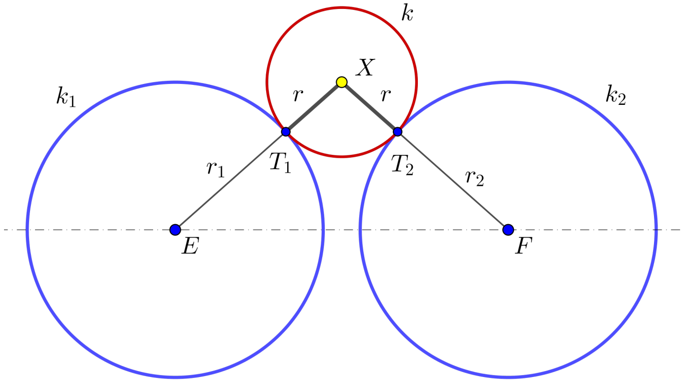
1. Dokáže se, že $M_1 \subset M_2$, tedy že každý prvek M_1 je prvkem M_2, čiliž pro libovolný prvek X dokážeme implikaci

$$X \in M_1 \Rightarrow X \in M_2$$

2. Dokáže se, že $M_2 \subset M_1$, tedy že každý prvek M_2 je prvkem M_1, čiliž pro libovolný prvek X dokážeme implikaci

$$X \in M_2 \Rightarrow X \in M_1$$

Takže jdeme na to:



Obrázek 12: X je střed $k \Rightarrow X \in o_{EF}$

Krok 1: Zvolme libovolnou kružnici k, která má s oběma kružnicemi k_1, k_2 vnější dotyk v bodech T_1, T_2 (viz obr.12). Pro její střed X platí

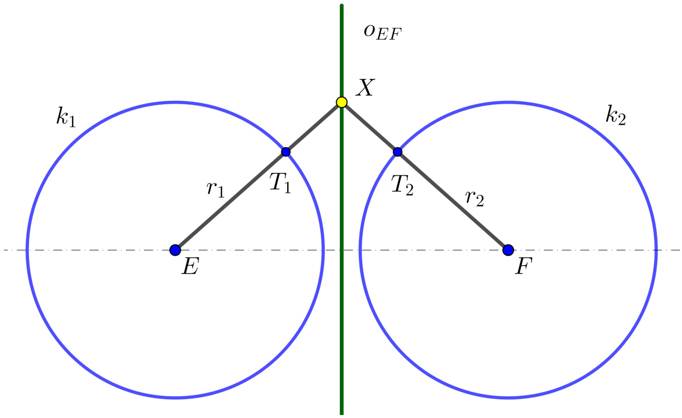
$$|XE| = |XT_1| + |T_1E| = r + r_1 \qquad |XF| = |XT_2| + |T_2F| = r + r_2$$

Pač ale $r_1 = r_2$, dostáváme, že

$$|XE| = |XF|$$

Střed X kružnice k leží tedy na ose úsečky EF. Tím jsme pro libovolný bod X v rovině dokázali implikaci

$$\boxed{X \text{ je střed } k \Rightarrow X \in o_{EF}}$$



Obrázek 13: $X \in o_{EF} \Rightarrow X$ je střed k

Krok 2: Zvolme libovolný bod X osy o_{EF} (viz obr.13). Označme jako T_1, T_2 průsečíky přímek XE, XF s kružnicemi k_1, k_2. Dle definice osy úsečky platí:

$$|EX| = |FX|$$

Ale $|EX| = r_1 + |XT_1|$ a $|FX| = r_2 + |XT_2|$, pročež

$$r_1 + |XT_1| = r_2 + |XT_2|$$

Ale $r_1 = r_2$, takže

$$|XT_1| = |XT_2|$$

Bod X je tedy středem kružnice k, která prochází body T_1, T_2. Protože body T_1, T_2 leží na úsečkách $|EX|, |FX|$, dotýká se kružnice k obou kružnic k_1 i k_2 vnějším dotykem. Tím jsme pro libovolný bod X v rovině dokázali implikaci

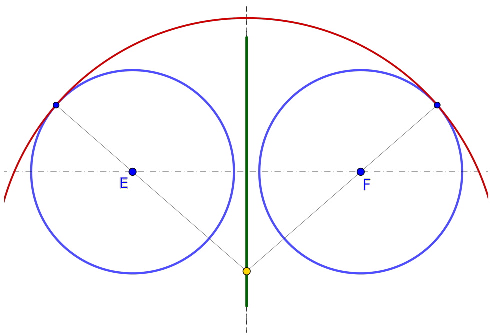
$$\boxed{X \in o_{EF} \Rightarrow X \text{ je střed } k}$$

Tím je důkaz dokončen. □

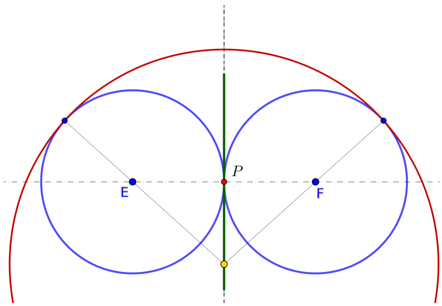
3.1.2 Další případy

Podobné věty jako je věta 1, kdy hledanou množinou je osa úsečky EF, bychom mohli pro $r_1 = r_2$ vyslovit také pro další případy. Jejich důkazy by byly analogické důkazu předchozímu a dělat je nebudeme. Jsou to tyto případy:

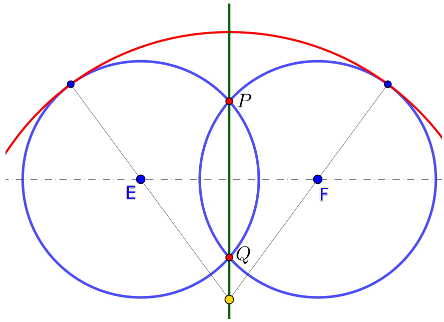
- Poloha 1,2,3 – vnitřní dotyky (k_1, k_2 leží uvnitř k) (viz obr. 14, 15, 16)
- Poloha 2 – vnější dotyky (k_1, k_2 leží vně k) (viz obr.17). Zde je potřeba si uvědomit, že bod dotyku P kružnic k_1, k_2 lze považovat za kružnici k s nulovým poloměrem, takže i tento bod lze do hledané množiny započítat. Pokud by se nám nelíbila bodová kružnice, museli bychom říci, že hledanou množinou bodů není celá osa o_{EF}, ale jen tato osa bez středu úsečky EF. (To je něco podobného jako množina zvaná *Thaletova kružnice*, což je kružnice nad průměrem AB, ovšem bez bodů A, B.)
- Poloha 3 – vnější + vnitřní dotyky (k_1, k_2 leží vně k, nebo k leží uvnitř *čočky* tvořené k_1, k_2) (viz obr. 18, 19). I zde můžeme oba průsečíky P, Q kružnic k_1, k_2 považovat za bodové kružnice. Oba případy, kdy kružnice k se dotýká buď vně, nebo leží uvnitř „čočky“ tvořené kružnicemi k_1, k_2, můžeme sloučit a vyjde nám opět, že hledanou množinou středů je osa úsečky EF.



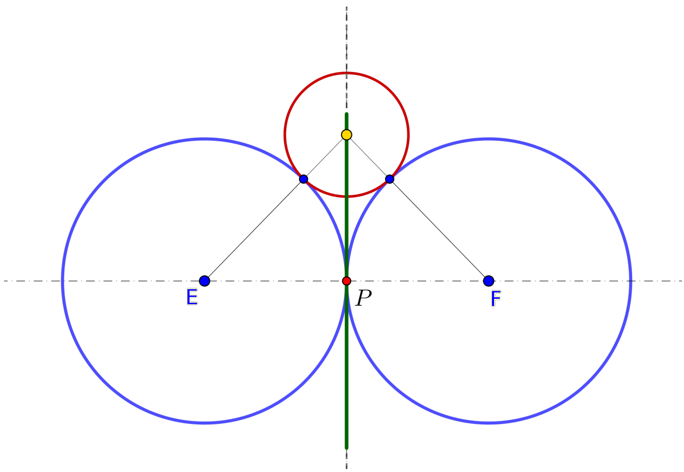
Obrázek 14



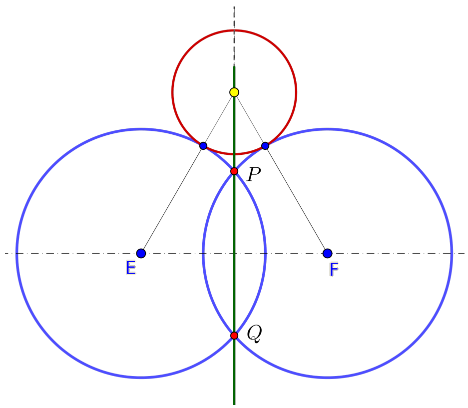
Obrázek 15



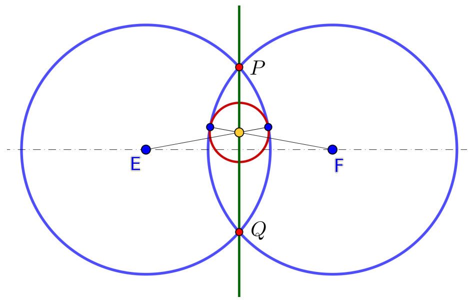
Obrázek 16



Obrázek 17



Obrázek 18

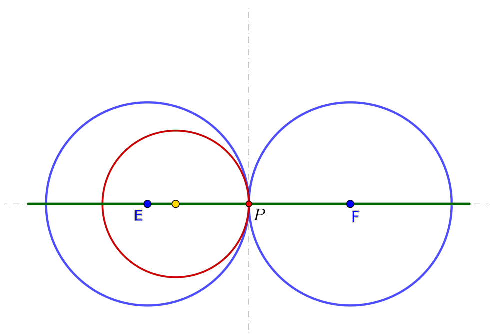


Obrázek 19

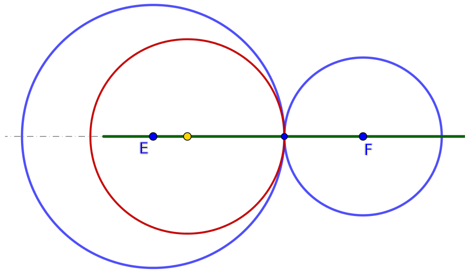
3.2 Množinou M je přímka EF

Tato nezajímavá a nudná situace nastává ve třech případech:

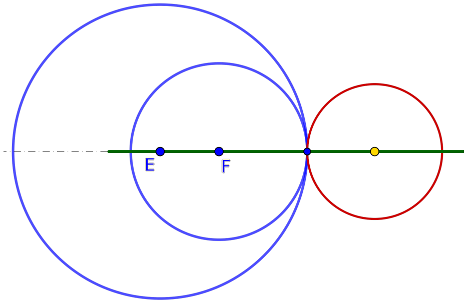
- $r_1 = r_2$; Poloha 2 (viz obr.20)
- $r_1 \neq r_2$; Poloha 2 (viz obr.21)
- $r_1 \neq r_2$; Poloha 4 (viz obr.22)



Obrázek 20



Obrázek 21



Obrázek 22

Věta 2: Přímka EF

Jsou dány dvě kružnice $k_1(E, r_1)$ a $k_2(F, r_2)$, které mají jeden společný bod T. Množinou středů všech kružnic, které se v bodě T dotýkají obou těchto kružnic, je přímka EF.

Důkaz. Důkaz je evidentní. □

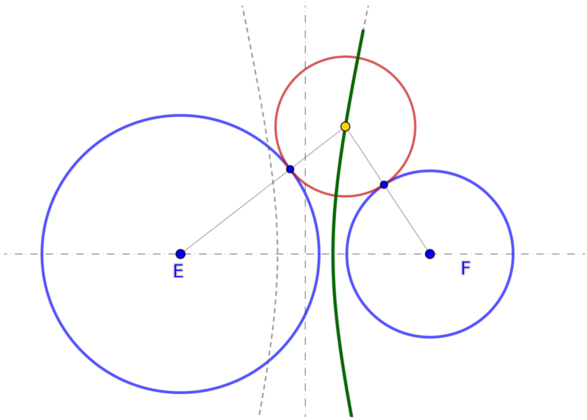
3.3 Množinou M je hyperbola „rozdílová" s ohnisky E, F

Tato situace nastává jen pro $r_1 \neq r_2$, a to v poloze 1,2 a 3. Vybereme **jeden z těchto případů**, vyslovíme příslušnou větu a dokážeme ji.

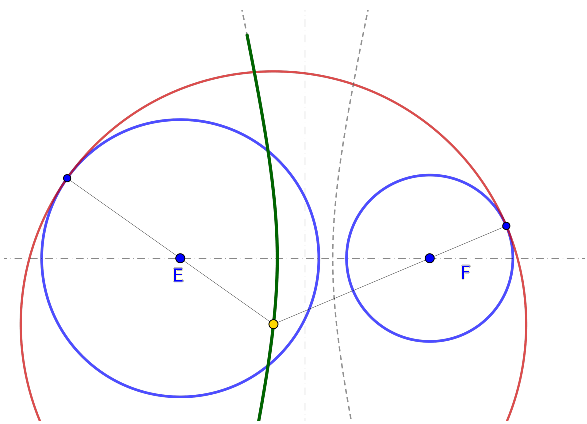
3.3.1 Případ 1

Vezmeme případ, kdy kružnice k_1, k_2 mají různé poloměry $r_1 > r_2$ a jsou v poloze 1, kdy se neprotínají.

1. Uvažujme nejprve kružnici $k^{'}$, která má s oběma zadanými kružnicemi **vnější dotyk** (viz. obr.23). Množinou M' středů všech takovýchto kružnic je zřejmě **pravá** větev hyperboly h_r.
2. Uvažujme dále kružnici $k^{''}$, která má s oběma zadanými kružnicemi **vnitřní dotyk** (viz. obr.24). Množinou M'' středů všech takovýchto kružnic je zřejmě **levá** větev hyperboly h_r.



Obrázek 23: $r_1 \neq r_2$ – poloha 1 – vnější dotyk – pravá větev h_r



Obrázek 24: $r_1 \neq r_2$ – poloha 1 – vnitřní dotyk – levá větev h_r

Sjednocením obou větví dostáváme celou hyperbolu h_r. Vyslovíme větu:

Věta 3: Hyperbola „rozdílová“

Jsou dány dvě kružnice $k_1(E, r_1)$ a $k_2(F, r_2)$, které nemají žádný společný bod, mají různé poloměry $(r_1 > r_2)$ a $|EF| > r_1 + r_2$. Množinou středů všech kružnic, které mají s oběma kružnicemi **vnější** dotyk, nebo mají s oběma kružnicemi **vnitřní** dotyk, je **hyperbola** h_r, která má ohniska E, F a velikost její hlavní poloosy je

$$a_r = \frac{r_1 - r_2}{2} \tag{1}$$

Důkaz. Důkaz uděláme pro každou větev zvlášť. Stejně jako v důkazu věty 1 musíme rovnost dvou množin dokázat ve dvou krocích.

1. **Pravá větev – vnější dotyky**

   Krok 1: Zvolme libovolnou kružnici k, která má s oběma kružnicemi k_1, k_2 vnější dotyk v bodech T_1, T_2 (viz obr.25). Pro její střed X platí

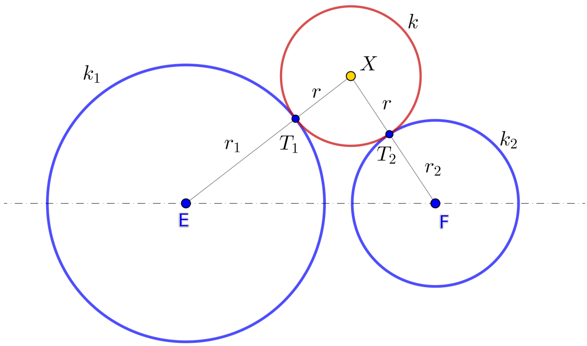
$$\begin{aligned} |XE| - |XF| &= (r + r_1) - (r + r_2) \\ |XE| - |XF| &= r_1 - r_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

   Pač platí $r_1 > r_2$, je pravá strana rovnice (2) kladná, pročež levá strana musí být též kladná. Tedy

$$|XE| > |XF|$$

   Odtud plyne, že bod X leží na **pravé** větvi hyperboly s ohnisky E, F a s velikostí hlavní poloosy

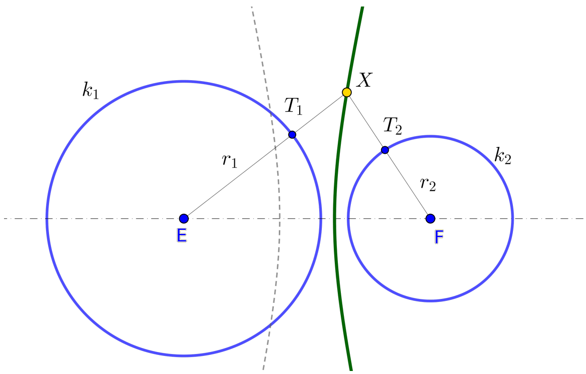
$$a_r = \frac{r_1 - r_2}{2}$$



Obrázek 25: X je střed $k \Rightarrow X \in$ pravá větev h_r

Krok 2: Zvolme libovolný bod X **pravé** větve hyperboly h_r (viz obr.26), která má ohniska E, F a velikost hlavní poloosy

$$a_r = \frac{r_1 - r_2}{2}$$



Obrázek 26: $X \in$ pravá větev $h_r \Rightarrow X$ je střed k

Označme jako T_1, T_2 průsečíky přímek XE, XF s kružnicemi k_1, k_2. Dle definice hyperboly platí pro bod X:

$$||XE| - |XF|| = r_1 - r_2$$

Ale pač $|XE| - |XF| > 0$, můžeme absolutní hodnotu na levé straně odstranit:

$$|XE| - |XF| = r_1 - r_2$$

Odtud plyne

$$|XE| - r_1 = |XF| - r_2$$

Takže dostáváme

$$|XT_1| = |XT_2|$$

Proto bod X je středem kružnice k, která se dotýká **vnějším** dotykem (pač T_1, T_2 leží na úsečkách $|EX|, |FX|$) obou kružnic k_1, k_2.

2. **Levá větev – vnitřní dotyky**

Krok 1: Zvolme libovolnou kružnici k, která má s oběma kružnicemi k_1, k_2 vnitřní dotyk v bodech T_1, T_2 (viz obr.27). Pro její střed X platí

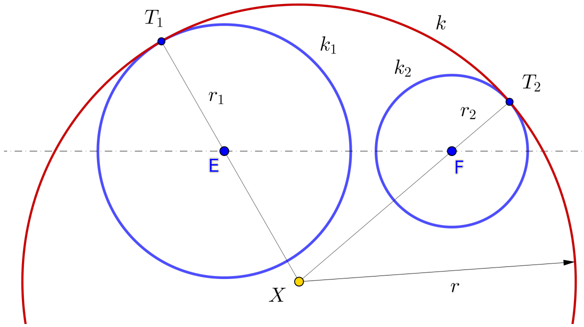
$$\begin{aligned} |XE| - |XF| &= (r - r_1) - (r - r_2) \\ |XE| - |XF| &= -(r_1 - r_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Pač platí $r_1 > r_2$, je pravá strana rovnice (3) záporná, pročež levá strana musí být též záporná. Tedy

$$|XE| < |XF|$$

Odtud plyne, že bod X leží na **levé** větvi hyperboly s ohnisky E, F a s velikostí hlavní poloosy

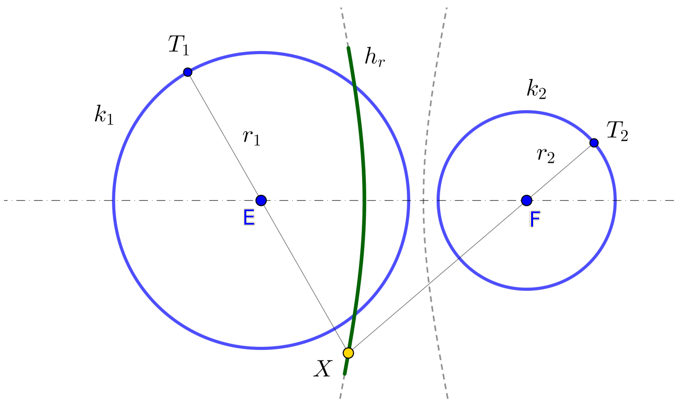
$$a_r = \frac{r_1 - r_2}{2}$$



Obrázek 27: X je střed $k \Rightarrow X \in$ levá větev h_r

Krok 2: Zvolme libovolný bod X **pravé** větve hyperboly h_r (viz obr.28), která má ohniska E, F a velikost hlavní poloosy

$$a_r = \frac{r_1 - r_2}{2}$$



Obrázek 28: $X \in$ levá větev $h_r \Rightarrow X$ je střed k

Označme jako T_1, T_2 průsečíky přímek XE, XF s kružnicemi k_1, k_2. Dle definice hyperboly platí pro bod X:

$$||XE| - |XF|| = r_1 - r_2$$

Ale pač $|XE| - |XF| < 0$, můžeme absolutní hodnotu na levé straně odstranit:

$$-(|XE| - |XF|) = r_1 - r_2$$

Odtud plyne

$$|XE| + r_1 = |XF| + r_2$$

Takže dostáváme

$$|XT_1| = |XT_2|$$

Proto bod X je středem kružnice k, která se dotýká **vnitřním** dotykem (pač E, F leží na úsečkách $|T_1X|, |T_2X|$) obou kružnic k_1, k_2.

□

3.3.2 Další případy

Rozdílová hyperbola vystupuje i v situaci, kdy kružnice k_1, k_2 mají jeden či dva společné body (viz obr. 6 a obr. 7). Důkazy bychom udělali úplně analogicky jako v předchozím případě.

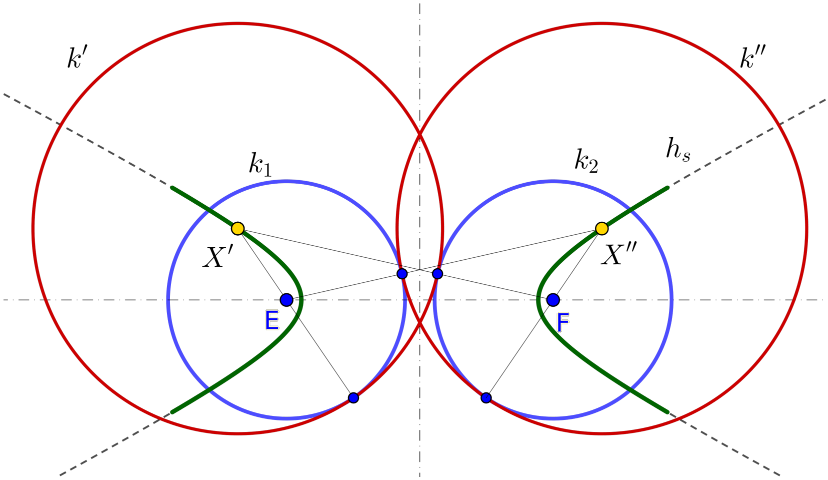
Větu 3 lze tedy rozšířit na tyto tři polohy dvou kružnic různých poloměrů.

3.4 Množinou M je hyperbola „součtová“ s ohnisky E, F

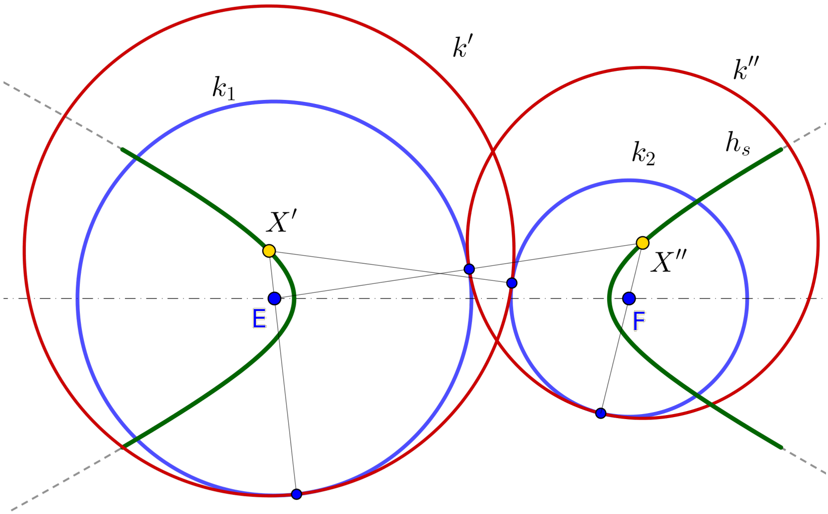
Tato situace nastává, když kružnice k má s jednou z kružnic k_1, k_2 **vnější** a s druhou **vnitřní** dotyk, přičemž tato druhá kružnice leží uvnitř kružnice k.

To je možné jen ve dvou případech – v poloze 1 pro $r_1 = r_2$ (viz obr. 29) a v poloze 1 pro $r_1 \neq r_2$ (viz obr. 30).

První případ je jen speciálním případem druhého, proto větu vyslovíme obecně pro jakékoli poloměry.



Obrázek 29



Obrázek 30

Věta 4: Hyperbola „součtová“

Jsou dány dvě kružnice $k_1(E, r_1)$ a $k_2(F, r_2)$, které nemají žádný společný bod a $|EF| > r_1 + r_2$. Množinou středů všech kružnic, které mají s kružnicí k_1 **vnější** dotyk a s kružnicí k_2 **vnitřní** dotyk, nebo naopak, je **hyperbola** h_s, která má ohniska E, F a velikost její hlavní poloosy je

$$a_s = \frac{r_1 + r_2}{2} \tag{4}$$

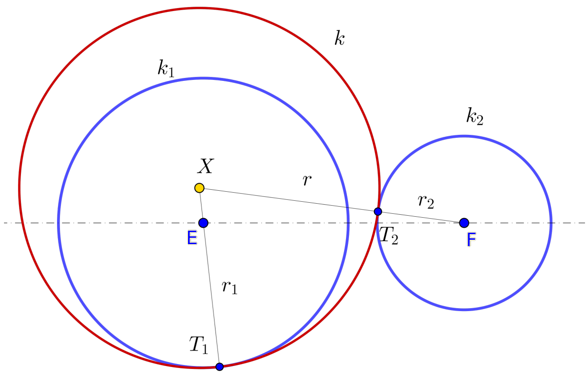
Důkaz. Důkaz uděláme jen pro **levou** větev, protože důkaz pro pravou větev je úplně obdobný.

Krok 1: Zvolme libovolnou kružnici k, která má s k_1 vnitřní a s k_2 vnější dotyk v bodech T_1, T_2 (viz obr.31). Pro její střed X platí

$$|XE| - |XF| = (r - r_1) - (r + r_2)$$

$$|XE| - |XF| = -(r_1 + r_2) \tag{5}$$

$$||XE| - |XF|| = r_1 + r_2 \tag{6}$$



Obrázek 31: X je střed $k \Rightarrow X \in$ levá větev h_s

Pač pravá strana rovnice (5) je záporná, je i levá strana záporná. Tedy

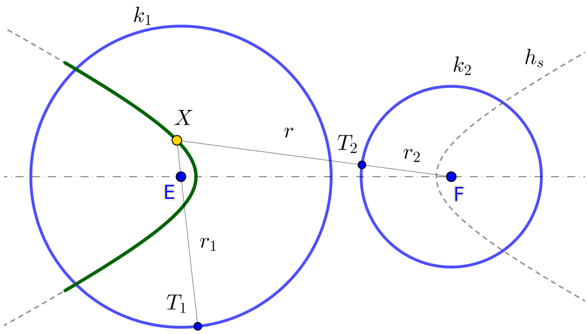
$$|XE| < |XF|$$

Odtud a z rovnice (6) plyne, že bod X leží na **levé** větvi hyperboly s ohnisky E, F a s velikostí hlavní poloosy

$$a_r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Krok 2: Zvolme libovolný bod X **levé** větve hyperboly h_s (viz obr.32), která má ohniska E, F a velikost hlavní poloosy

$$a_r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



Obrázek 32: $X \in$ levá větev $h_s \Rightarrow X$ je střed k

Označme jako T_1, T_2 průsečíky přímek XE, XF s kružnicemi k_1, k_2. Dle definice hyperboly platí pro bod X:

$$||XE| - |XF|| = r_1 + r_2$$

Ale pač $|XE| - |XF| < 0$, můžeme absolutní hodnotu na levé straně odstranit:

$$-(|XE| - |XF|) = r_1 + r_2$$

Odtud plyne

$$|XE| + r_1 = |XF| - r_2$$

Takže dostáváme

$$|XT_1| = |XT_2|$$

Proto bod X je středem kružnice k, která se dotýká kružnice k_1 **vnitřním** dotykem (pač E leží na úsečce $|T_1X|$) a kružnice k_2 **vnějším** dotykem (pač T_2 leží na úsečce $|FX|$).

□

3.5 Množinou M je elipsa s ohnisky E, F

Tato situace nastává v několika případech. Vyberme **jeden z těchto případů**, vyslovíme příslušnou větu a dokážeme ji.

3.5.1 Případ 1

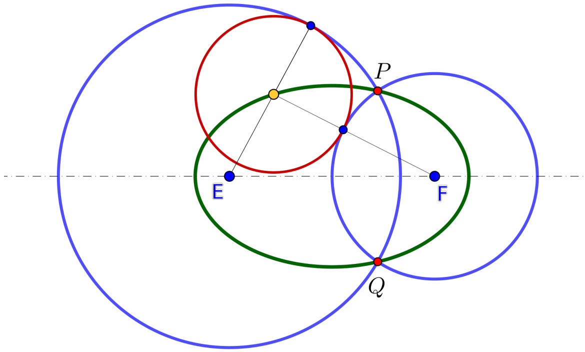
Vezmeme případ, kdy kružnice k_1, k_2 mají různé poloměry a jsou v poloze 3, kdy se protínají ve dvou bodech. (Úplně stejně je to ale i ve speciálním případě, kdy poloměry jsou shodné.) Přitom uvažujme kružnici k, která má s k_1 **vnitřní** dotyk a s k_2 **vnější** dotyk, nebo naopak (viz. obr.33). Průsečíky kružnic považujme za bodové kružnice s nulovým poloměrem.

Můžeme vyslovit následující větu:

Věta 5: Elipsa

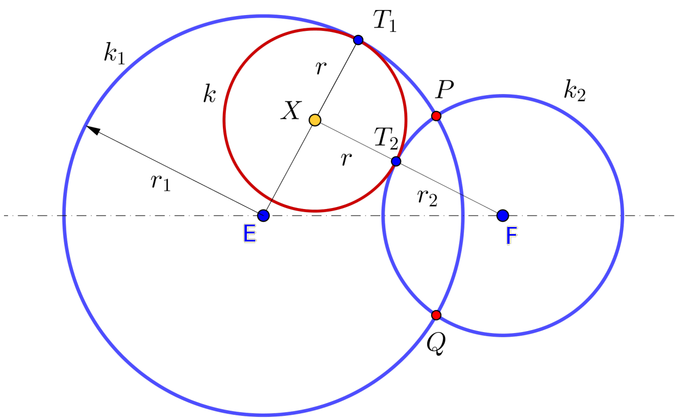
Jsou dány dvě kružnice $k_1(E, r_1)$ a $k_2(F, r_2)$, které mají dva společné body. Množinou středů všech kružnic, které mají s kružnicí k_1 **vnitřní** dotyk a s kružnicí k_2 **vnější** dotyk, nebo naopak, je **elipsa** *el*, která má ohniska E, F a velikost její hlavní poloosy je

$$a_s = \frac{r_1 + r_2}{2} \tag{7}$$



Obrázek 33

Důkaz. Důkaz uděláme pro vnitřní dotyk s k_1 a vnější dotyk s k_2. Opačný případ se dokazuje obdobně.



Obrázek 34: X je střed $k \Rightarrow X \in el$

Krok 1: Zvolme libovolnou kružnici k, která má s k_1 vnitřní a s k_2 vnější dotyk v bodech T_1, T_2 (viz obr.34). Pro její střed X platí

$$|XE| + |XF| = (r_1 - r) + (r_2 + r)$$
$$|XE| + |XF| = r_1 + r_2 \tag{8}$$

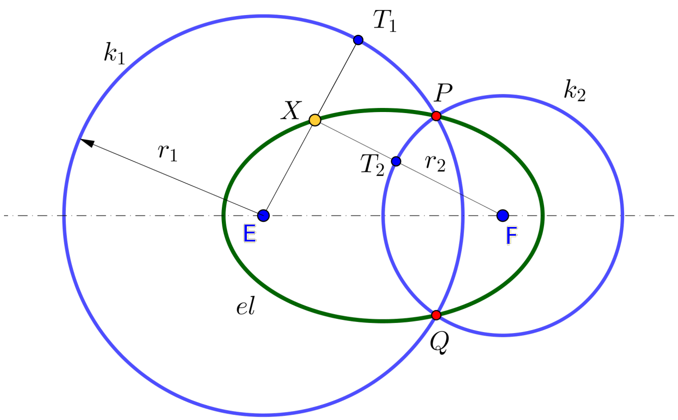
Odtud plyne, že bod X leží na elipse s ohnisky E, F a s velikostí hlavní poloosy

$$a_{el} = \frac{r_1 + r_2}{2} \tag{9}$$

Průsečíky P, Q kružnic k_1, k_2 považujeme za speciální případ kružnice k (nulový poloměr). V tomto případě je střed kružnice k totožný s P resp. Q a i zde platí vztahy (8) a (9) .

Krok 2: Vezměme elipsu el (viz obr.35), která má ohniska E, F a velikost hlavní poloosy

$$a_{el} = \frac{r_1 + r_2}{2}$$



Obrázek 35: $X \in el \Rightarrow X$ je střed k

Ta musí nutně procházet bodem P, protože pro něj platí $|EP| + |FP| = r_1 + r_2$. Z téhož důvodu prochází i bodem Q.

Zvolme libovolný bod X elipsy el různý od bodů P, Q. Dle definice elipsy pro X platí:

$$
\begin{aligned}
|XE| + |XF| &= 2a_{e2} \\
r_1 - |XT_1| + r_2 + |XT_2| &= r_1 + r_2 \\
|XT_1| &= |XT_2| \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Dle vztahu (10) je tedy bod X středem kružnice k, která prochází body T_1, T_2. Pač X leží na úsečce ET_1 a T_2 leží na úsečce FX, má kružnice k s kružnicí k_1 vnitřní a s kružnicí k_2 vnější dotyk.

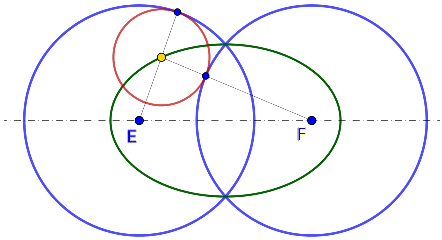
Zvolme nakonec bod X elipsy el v bodě P či Q. Tyto body můžeme považovat za středy kružnic s nulovým poloměrem, které mají s k_1 vnější a s k_2 vnitřní dotyk.

$\square$

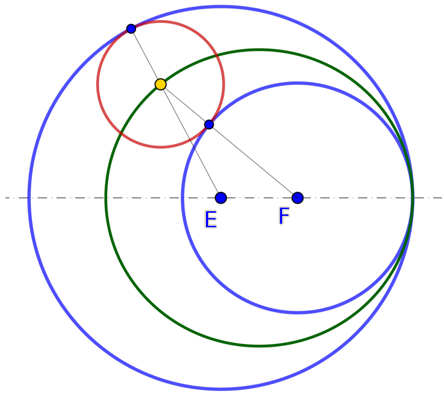
3.5.2 Další případy

Podobné věty jako je věta 5, kdy hledanou množinou je elipsa el, bychom mohli vyslovit také pro další případy. Jejich důkazy by byly analogické důkazu předchozímu a dělat je nebudeme. Jsou to tyto případy:

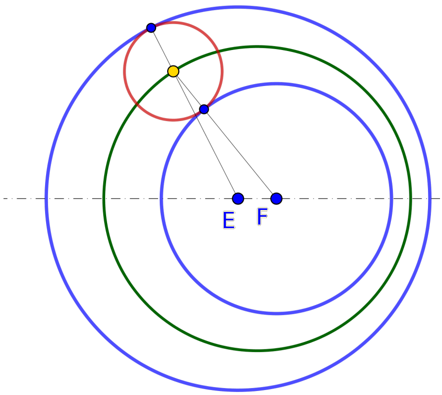
- Poloha 3 pro $r_1 = r_2$ (viz obr.36). To je pouze speciální případ situace z věty 5 pro $r_1 = r_2$.
- Polohy 4 a 5 pro $r_1 \neq r_2$ (viz obr.37,38).
- Poloha 6 pro $r_1 \neq r_2$ (viz obr.39). Množinou M je kružnice a důkaz je triviální.



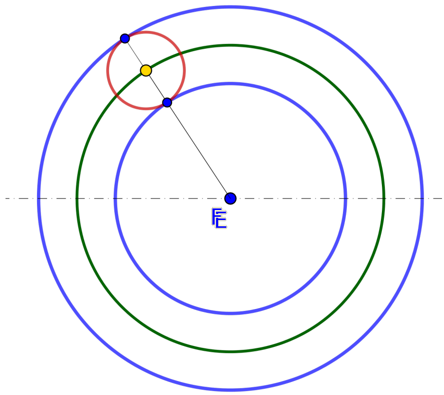
Obrázek 36: $r_1 = r_2$; poloha 3



Obrázek 37: $r_1 \neq r_2$; poloha 4



Obrázek 38: $r_1 \neq r_2$; poloha 5



Obrázek 39: $r_1 \neq r_2$; poloha 6