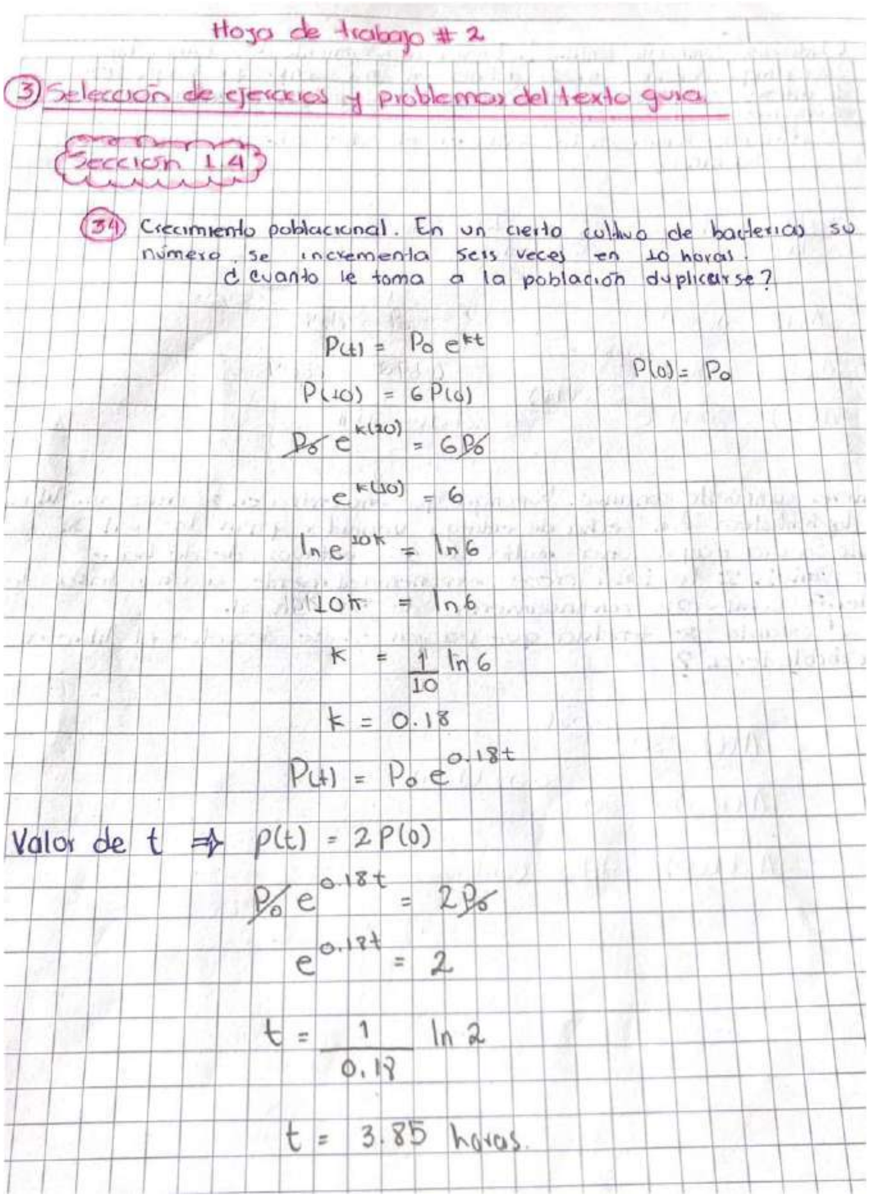
Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL TEXTO GUIA

SECCION 1.4



Hoja de trabajo # 2

③ Selección de ejercicios y problemas del texto guía

Sección 1.4

(34) Crecimiento poblacional. En un cierto cultivo de bacterias su número se incrementa seis veces en 10 horas. ¿Cuanto le toma a la población duplicarse?

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

$$P(0) = P_0$$

$$P(10) = 6P(0)$$

$$\cancel{P_0} e^{k(10)} = 6\cancel{P_0}$$

$$e^{k(10)} = 6$$

$$\ln e^{10k} = \ln 6$$

$$10k = \ln 6$$

$$k = \frac{1}{10} \ln 6$$

$$k = 0.18$$

$$P(t) = P_0 e^{0.18t}$$

Valor de t $\Rightarrow$ $P(t) = 2P(0)$

$$\cancel{P_0} e^{0.18t} = 2\cancel{P_0}$$

$$e^{0.18t} = 2$$

$$t = \frac{1}{0.18} \ln 2$$

$$t = 3.85 \text{ horas.}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

35 Concentración de carbono reactivo. El carbono obtenido de un antiguo cráneo contiene solamente la sexta parte de ^{14}C respecto al carbono obtenido de un hueso actual.

¿Que tan antiguo es el cráneo?

$$\frac{dN}{dt} = -kN \Rightarrow \frac{dN}{N} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int -k\,dt$$

$$\ln|N| = -kt + c$$

$$\ln N = -kt + \ln N_0$$

$$e^{\ln N} = e^{-kt + \ln N_0}$$

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

$t=0 \quad N(0) = N_0$

$\ln N_0 = -k(0) + c$

$\ln N_0 = c$

$^{14}C \Rightarrow k = 0{,}0001216$

cantidad actual del carbono

$$\cancel{^{14}C_0}\, e^{-kt} = \frac{1}{6}\,\cancel{^{14}C_0}$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{6}$$

$$\ln e^{-kt} = \ln\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$-kt = \ln\left(\frac{1}{6}\right) = -\ln 6$$

$$t = \frac{-\ln 6}{-k} = \frac{\ln 6}{k}$$

$$t = \frac{\ln 6}{0{,}0001216} = 14.734 \text{ años}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

36 Concentración de carbono. El carbono tomado de una reliquia que se dice ser del tiempo de cristo contiene 4.6×10^{10} átomos de ^{14}C por gramo. El carbón extraído de un espécimen actual de la misma sustancia contiene 5.0×10^{10} átomos de ^{14}C por gramo. Calcule la edad aproximada de la reliquia.

¿Qué opinión tiene acerca de su autenticidad?

$$\frac{^{14}C_R}{^{14}C} = \frac{4.6 \times 10^{10}}{5.0 \times 10^{10}} = \frac{\cancel{^{14}C_0}\, e^{-kt}}{\cancel{^{14}C_0}}$$

$$\frac{4.6}{5.0} = e^{-kt}$$

$$\ln\left(\frac{4.6}{5.0}\right) = \ln e^{-kt}$$

$$-kt = \ln\left(\frac{4.6}{5.0}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{4.6}{5.0}\right)}{-k} = \frac{\ln\left(\frac{4.6}{5.0}\right)}{-0.0001216}$$

$t = 685$ años $\Rightarrow$ Es claramente una reliquia. fue creada antes de que jesus llegara a la tierra.

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

37 (Interéses compuesto continuo). Previo al nacimiento de su primer hijo, una pareja depositó 5.000 dólares en una cuenta que paga 8% de interés compuesto continuamente. Los pagos de interes son acumulables al capital.

¿Cuanto habra en la cuenta en el dieciochoavo cumpleaños del niño?

$$\frac{dA}{dt} = rA \qquad r = \frac{R\%}{100} \text{ tasa de interes}$$

$$r = \frac{8\%}{100} = 0.08$$

$$A(t) = A_0 e^{rt}$$

$$A(t) = 5000\, e^{0.08t}$$

$$A(18) = 5000\, e^{0.08(18)} \approx 21.103 \text{ U\$}$$

38 Interes compuesto continuo. Suponga que encuentra en su ático un libro de la biblioteca con fecha de entrega vencido y por lo cual su abulo devia pagar una multa de 30 centavos desde hace 100 años. Si la tasa crece exponencialmente a una tasa de interés compuesto continuamente de 5% anual.

¿Cuanto se tendria que pagar si se devuelve el libro a la biblioteca?

$$A(t) = 30\, e^{0.05t}$$

$$A(100) = 30\, e^{0.05(100)}$$

$$A(100) = 4452 \text{ centavos}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

59 Eliminación de drogas. Suponga que el pentobarbital de sodio se usa para anestesiar a un perro. Éste queda anestesiado cuando su torrente sanguíneo contiene al menos 45 miligramos (mg) de pentobarbial de sodio por kg de peso. Suponga también que esta sustancia se elimina exponencialmente del torrente sanguíneo del animal con una vida media de 5h. ¿Que dosis se le debe administrar a un perro de 50 kg de peso para anestesiarlo durante 1 hora?

$A(t)$ → cantidad de un fármaco en el tiempo t, esta dada por EDO

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A$$

Solución después de separar variables

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

ya que A_0 es la cantidad de fármaco presente en $t=0$

λ ⇒ constante de eliminación del fármaco

$$A(1 \text{ hora}) = 45 mg \times 50$$

$$A_0 e^{-\lambda(1)} = 2250 \text{ mg}$$

$$A_0 = 2250 e^{\lambda}$$

$$A_0 = 2250 e^{\frac{\ln 2}{5}}$$

$$A_0 = 2585 \text{ mg}$$

$$A(5 \text{ hora}) = \frac{A_0}{2}$$

$$A_0 e^{-\lambda(5)} = \frac{1}{2} A_0$$

$$e^{-5\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-5\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5} = \frac{\ln 2}{TM}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

42 En cierta roca lunar se encontro igual contenido en el menu de atomos del potasio que de argoñ. Considere que todo el argón es el resultado del decrecimiento radiactivo del potasio (su vida media es de alrededor de 1.28 X 10^9 años) y que una de cada nueve desintegraciones del átomo de potasio produce un átomo de argon, ¿cual es la edad de la roca, medida desde el tiempo en que contenia potasio solamente?

$$\frac{Q_K}{Q_{Ar}} = 1 \Rightarrow Q_K = Q_{Ar}$$

$$Q_{Ar} = \frac{1}{9} \Rightarrow \text{cantidad de potasio desintegrado}$$

$$= \frac{1}{9}\left(Q_{K_0} - Q_{K_0} e^{-kt}\right.$$

$$Q_K = Q_{Ar}$$

$$Q_{K0}\, e^{-kt} = \frac{1}{9}\left(Q_{K0} - Q_{K0}\, e^{-kt}\right)$$

$$9 Q_{K0}\, e^{-kt} = Q_{K0}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$9 e^{-kt} = 1 - e^{-kt}$$

$$10 e^{-kt} = 1$$

$$e^{-kt} = \frac{1}{10}$$

$$\ln e^{-kt} = \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\ln 10$$

$$-kt = -\ln 10$$

$$t = \frac{\ln 10}{k} = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 2}{tM}} = \frac{\ln 10}{\ln 2}\, TM$$

$$t = \frac{\ln 10}{\ln 2} \times 1.28 \times 10^9 \text{ años}$$

$$t = 4.25 \times 10^9 \text{ años} = 4250 \text{ millones de años}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

48) De acuerdo con una teoría cosmológica, hubo igual cantidad de isótopos de uranio ^{235}U y ^{238}U en el "big bang" durante la creación del universo. en la actualidad hay 137.7 átomos de ^{238}U por cada átomo de ^{235}U.

Utilizando la vida media de 4.51×10^9 años para el ^{238}U y 7.10×10^8 años para el ^{235}U, calcule la edad del universo.

$$\frac{^{238}U}{^{235}U} = \frac{^{238}U_0 \, e^{-k_{238} t}}{^{235}U_0 \, e^{-k_{235} t}} = \frac{137.7}{1}$$

en el big bang $\Rightarrow$ $^{238}U_0 = {^{235}U_0}$

$$e^{-k_{238} t + k_{235} t} = 137.7$$

$$e^{t(k_{235} - k_{238})} = 137.7$$

$$\ln e^{t(k_{235} - k_{238})} = \ln 137.7$$

$$K = \frac{\ln 2}{T_m}$$

$$t(k_{235} - k_{238}) = \ln 137.7$$

$$t_{\text{edad universo}} = \frac{\ln 137.7}{k_{235} - k_{238}}$$

$$t_{\text{edad universo}} = \frac{\ln 137.7}{\frac{\ln 2}{T_{m235}} - \frac{\ln 2}{T_{m238}}} = \frac{\ln 137.7}{\ln 2} \cdot \frac{T_{m235} \cdot T_{m238}}{T_{m238} - T_{m235}}$$

$$= \frac{\ln 137.7}{\ln 2} \cdot \frac{(7.10 \times 10^8)(4.51 \times 10^9)}{(4.51 \times 10^9 - (7.10 \times 10^8))}$$

$$= \frac{\ln 137.7}{\ln 2} \cdot \frac{(7.10)(4.51)(10^8)(10^9)}{10^8 \, (45.1 - 7.10)}$$

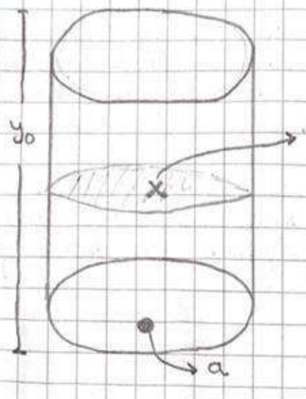
$= 5.9874 \times 10^9$ años $\Rightarrow$ 5'987.400.000 = 600.000 millones de años

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

57) Suponga que un tanque cilíndrico contiene inicialmente V_0 galones de agua que se drena (a través de un orificio en el fondo) en T min. Utilice la ley de torricelli para mostrar que el volumen de agua en el tanque después de $t \leq T$ minutos es $V = V_0[1-(t/T)]^2$.



$A(y) = A_0 \; \forall y$

$Y(T) = 0$

$Y(0) = y_0$

$V_0 = A_0 y_0$

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

$$A_0 \frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{-k}{A_0}\,dt$$

$$\int y^{-1/2}\,dy = \int B\,dt$$

$$2\sqrt{y} = Bt + C$$

① $y(0) = y_0$

$2\sqrt{y_0} = B(0) + C$

$2\sqrt{y_0} = C$

$$2\sqrt{y} = Bt + 2\sqrt{y_0}$$

② $y(T) = 0$

$2\sqrt{0} = BT + 2\sqrt{y_0}$

$\frac{-2\sqrt{y_0}}{T} = B$

$$2\sqrt{y} = \frac{-2\sqrt{y_0}}{T}t + 2\sqrt{y_0}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{y_0} - \sqrt{y_0}\frac{t}{T}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{y_0}\left(1-\frac{t}{T}\right)$$

$$\sqrt{y} = y_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

$$A_0\, y(t) = A_0 y_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

$$V(t) = V_0\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

64 La clepsydra, o reloj de agua. Un reloj de agua de 12 horas se diseña con las dimensiones mostradas en la figura 1.4.10, dada la forma de la superficie obtenida al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje y.

¿Cual debe ser esta curva, y que radio debe tener el orificio circular del fondo para que el nivel del agua caiga a una velocidad constante de 4 pulgadas por hora $\frac{in}{h}$?

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2g}\sqrt{y} \Rightarrow$$

Datos iniciales
$y = 4$ cuando $x = 1$
$x = g(y)$
$1 = g(4)$

$$\pi[g(y)]^2\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2g}\sqrt{y}$$

$g = 32$ pies/seg^2

Se requiere que $\forall t$ $\frac{dy}{dt} = -4\frac{\text{Pulgadas}}{\text{hora}}$

$$= -4\frac{1/12\text{ Pie}}{3600\text{ seg}}$$

$$= -\frac{1}{10800}\frac{\text{Pie}}{\text{seg}}$$

$$\pi[g(y)]^2\left(-\frac{1}{10800}\right) = -\pi r_0^2\sqrt{64}\sqrt{y}$$

EDO evaluada para el tiempo t_0 que $x=1$; $y=4$

$$\cancel{\pi}[g(4)]^2\left(\cancel{-}\frac{1}{10800}\right) = \cancel{-}\cancel{\pi}r_0^2\sqrt{64}\sqrt{4}$$

$$(1)^2\frac{1}{10800} = 16r_0^2$$

$$\frac{1}{172800} = r_0^2$$

$$\frac{1}{\sqrt{172800}}\text{ pies} = r_0$$

$$r_0 = \frac{1}{240\sqrt{3}}\text{ pies} = \frac{\sqrt{3}}{720}\text{ pies}$$

$$r_0 = \frac{\sqrt{3}}{720}\ (304.8\text{ mm})$$

$$r_0 = 0{,}733\text{ mm}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

radio r_0 del orificio $\frac{dy}{dt} = -4 \frac{pulg}{hora} = -\frac{1}{10800} \frac{pies}{seg}$

$$\pi[g(y)]^2 \frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2g}\sqrt{y}$$

evaluado en un tiempo t que corresponda al punto $(x, y) = (g(y), y)$

$$\pi[x]^2\left(-\frac{1}{10800}\right) = -\pi \frac{1}{172800}\sqrt{64}\sqrt{y}$$

$$\frac{172800}{10800\sqrt{64}} x^2 = \sqrt{y}$$

$$2x^2 = \sqrt{y}$$

$$y = 4x^4$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

65 Justo antes del medio día se encuentra el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 70° F. A las 12 del día la temperatura del cuerpo es de 80° F y a la 1 pm es de 75° F. Considere que la temperatura del cuerpo al morir era de 98.6° F y que este se ha enfriado de acuerdo a la ley de Newton.

¿A que hora murio la victima?

$$\frac{dT}{dt}(t) = k(M - T(t))$$

M ⇒ Temperatura del medio ambiente

$$\frac{dT}{M-T} = k\,dt$$

$U = M - T$

$dU = -dt$

$$\int \frac{dT}{M-T} = \int k\,dt$$

$T(0) = T_0$

$$-\ln|M-T| = kt + C$$

$\ln|M - T_0| = -k(0) + B$

$\ln|M - T_0| = B$

$$\ln|M-T| = -kt + B$$

$$\ln|M-T| = -kt + \ln|M-T_0|$$

$$\ln|M-T| - \ln|M-T_0| = -kt$$

$$\ln\left|\frac{M-T}{M-T_0}\right| = -kt$$

$$\ln\left(\frac{M-T}{M-T_0}\right) = -kt$$

$$e^{\ln(M-T/M-T_0)} = e^{-kt}$$

$$\frac{M-T}{M-T_0} = e^{-kt}$$

$$M - T = (M - T_0)e^{-kt}$$

$$-T = (M-T_0)e^{-kt} - M$$

$$T(t) = M - (M-T_0)e^{-kt}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

$$M = 70°F$$
$$T_0 = 98.6°F$$
$$\left.\begin{matrix} M = 70°F \\ T_0 = 98.6°F \end{matrix}\right\} T(t) = 70 - (70 - 98.6)e^{-kt}$$

$$T(t) = 70 + 28.6e^{-kt}$$

①

$$T(t_0) = 80°F$$
$$T(t_0 + 1) = 75°F$$

②

$$80 = 70 + 28.6e^{-kt}$$
$$75 = 70 + 28.6e^{-k(t_0+1)}$$

③

$$10 = 28.6e^{-kt_0}$$
$$5 = 28.6e^{-kt_0}e^{-k}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{28.6e^{-kt_0}}{28.6e^{-kt_0}e^{-k}}$$

$$2 = e^{k} \rightarrow \ln 2 = k$$

Reemplazamos en ③

$$10 = 28.6e^{-\ln 2 \cdot t_0}$$
$$\frac{10}{28.6} = e^{-\ln 2 \cdot t_0}$$
$$\ln\left(\frac{10}{28.6}\right) = \ln\left(e^{-\ln 2 \cdot t_0}\right)$$
$$\ln\left(\frac{10}{28.6}\right) = -\ln(2) \cdot t_0 \cdot \underbrace{\ln e}_{1}$$
$$\frac{\ln\left(\frac{10}{28.6}\right)}{-\ln(2)} = t_0$$
$$1.51 \text{ horas} = t_0$$

1 hora — 60 minutos

1.51 horas — B

$$B = \frac{(60 \text{ minutos}) \cdot (1.51 \cancel{\text{hora}})}{1 \cancel{\text{hora}}}$$

$$B \approx 91 \text{ minutos}$$

Fallecio hace 1.51 horas, osea sobre 10:29 am

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

SECCION 1.5

Banco de Bogotá

Un Banco hecho entre dos

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

27) $(x + ye^{y})\dfrac{dy}{dx} = 1$

$x + ye^{y} = \dfrac{dy}{dx} \rightarrow ye^{y} = \dfrac{dy}{dx} - 1x$

- $\rho(y) = e^{\int p(y)\,dy}$
- $\rho(y) = e^{\int 1\,dy}$
- $\rho(y) = e^{-y}$

$\dfrac{dy}{dx} - 1\cdot x = ye^{y}$

$e^{-y}\left(\dfrac{dy}{dx} - x\right) = e^{-y}\,y\,e^{y} \rightarrow \dfrac{d}{dy}(e^{-y}x) = y$

$\int \dfrac{d}{dy}(e^{-y}x)\,dy = \int y\,dy$

$(e^{-y}x) = \frac{1}{2}y^{2} + c$

$x(y) = e^{y}\left(\frac{1}{2}y^{2} + c\right)$

$x(y) = \frac{1}{2}y^{2}e^{y} + ce^{y}$

30) $2x\dfrac{dy}{dx} = y + 2x\cos x \quad ; \quad y(1) = 0$

- $\rho(x) = e^{\int_{1}^{x} p(u)\,du}$
- $\rho(x) = e^{\int_{1}^{x} -\frac{1}{2u}\,du} \rightarrow e^{\left[-\frac{1}{2}\ln u\right]_{1}^{x}}$
- $\rho(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln 1}$
- $\rho(x) = e^{-\frac{1}{2}\ln x}\, e^{\frac{1}{2}\ln 1}$
- $\rho(x) = e^{\frac{1}{2}\ln x} = x^{-1/2}$

$2x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x\cos x$

$\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2x}y = \cos x$

$x^{-1/2}\left[\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{2x}y\right] = x^{-1/2}\cos x$

$\dfrac{d}{dx}(x^{-1/2}y) = x^{-1/2}\cos x$

$d(x^{-1/2}y) = x^{-1/2}\cos x\,dx \rightarrow \int d(x^{-1/2}y) = \int_{1}^{x} u^{-1/2}\cos u\,du + c$

$x^{-1/2}y = \int_{1}^{x} u^{-1/2}\cos u\,du + c$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

MES MONTH | TEMA SUBJECT

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

✓ como $y(1)=0 \to (1)^{-1/2}(0) = \int_1^1 u^{-1/2}\cos u\,du + c$

$0 = 0 + c$

$0 = c$

$\to y(x) = x^{-1/2} \int_1^x u^{-1/2} \cos u \, du$

29) Expresar la solución general de $dy/dx = 1 + 2xy$ en términos de la función error

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

✓ $\frac{dy}{dx} = 1 + 2xy \to \frac{dy}{dx} - 2xy = 1$

- $\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}$
- $\rho(x) = e^{\int -2x\,dx}$

$\rho(x) = e^{-x^2}$

$e^{-x^2}\left(\frac{dy}{dx} - 2xy\right) = e^{-x^2}$

$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} y\right) = e^{-x^2} \to d(e^{-x^2}y) = e^{-x^2}dx$

$\int d(e^{-x^2}y) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt + c$

$e^{-x^2} y = \int_0^x e^{-t^2}\,dt + c$

$y(x) = e^{x^2}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt + c\right)$ ✓ Debemos reescribir $y(x)$ en términos de $\operatorname{erf}(x)$

$\to y(x) = e^{x^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + c\right)$

$y(x) = e^{x^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x) + c\right)$

Scanned with CamScanner

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

36) · $V(0) = 60$ gal → salmuera C_e : 1 lb/gal

· $X(0) = 0$ lb → r_e : 2 gal/min

✓ $V(60) = 0$ * r_s : 3 gal/min

A) ¿? Cantidad de sal $X(t)$

B ¿? Cantidad maxima de sal

A) $\frac{dx}{dt} = C_e r_e - r_s \frac{X}{V_0 + (r_e - r_s)t}$

$\frac{dx}{dt} = (1)(2) - \frac{(3)X}{60 - 1t} \longrightarrow \frac{dx}{dt} = 2 - \frac{3}{60-t} X$ ✓ resolvemos por factor integrante

$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60-t} x = 2$

· $\rho(t) = e^{\int \frac{3}{60-t} dt}$

$(60-t)^{-3}\left(\frac{dx}{dt} + \frac{3}{60-t} x\right) = (60-t)^{-3} 2$

· $\rho(t) = e^{-3\ln|60-t|}$ $t < 60$

$\frac{d}{dt}\left((60-t)^{-3} x\right) = 2(60-t)^{-3}$

· $\rho(t) = e^{-3\ln(60-t)}$

· $\rho(t) = e^{\ln(60-t)^{-3}}$

$\int \frac{d}{dt}\left((60-t)^{-3} x\right) = \int 2(60-t)^{-3}$

· $\rho(t) = (60-t)^{-3}$

$(60-t)^{-3} X = \frac{1}{(60-t)^2} + C$

✓ Como $X(0) = 0$

$X(t) = \frac{(60-t)^3}{(60-t)^2} + C(60-t)^3$

$(60-0) + C(60-0)^3 = 0$

$60 + C60^3 = 0$

$C = -\frac{1}{3600}$

$X(t) = (60-t) + C(60-t)^3$

$X(t) = (60-t) - \frac{1}{3600}(60-t)^3$

↳ cantidad de sal en todo instante de tiempo

CS Scanned with CamScanner

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

B) Debemo hallar el maximo de $x(t)$ en $t \in [0, 60]$

$$x'(t) = 1 - \frac{3}{3600}(60-t)^2(-1)$$

$$x'(t) = -1 + \frac{1}{1200}(60-t)^2 = 0$$

$$\frac{1}{1200}(60-t)^2 = 1$$

$$(60-t)^2 = 1200$$

$$60-t = \pm 20\sqrt{3}$$

$60 - t = 20\sqrt{3}$ $\vee$ $60 - t = -20\sqrt{3}$

$60 - 20\sqrt{3} = t$ $\vee$ $60 + 20\sqrt{3} = t$

$t = 25.36$ Min $\vee$ $t = 94.64$ Min

✓ $x(0) = 0$ Lb

✓ $x(25.36) = 23.09$ lb $= X_{max}$

✓ $x(60) = 0$ Lb

38) · $V_1(0) = 100$ gal · $X(0) = 50$ lb

· $V_2(0) = 200$ gal · $y(0) = 50$ lb

✓ $r_{e1} = 5$ gal/min $\rightarrow C_{e1} = 0$

✓ $r_{s1} = 5$ gal/min

✓ $r_{s2} = 5$ gal/min

A) $\frac{dx}{dt} = C_{e1} r_{s1} - r_{s1} C_{s1} \rightarrow \frac{dx}{dt} = (0 \cdot 5) - 5 \frac{x(t)}{V_1(0) + (r_{e1} - r_{s1})t}$

$$\frac{dx}{dt} = -5 \frac{x(t)}{V_1(0) + \cancel{(r_{e1} - r_{s1})}_{0}} \rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{5x}{100}$$

$r_{e1} = r_{s1}$

CS Scanned with CamScanner

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{5}{100}\,dt \longrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -\frac{1}{100}\,dt$$

$$\ln x = -\frac{1}{20}t + C_1$$

✓ como $X(0) = 50$

$$\ln 50 = -\frac{1}{20}(0) + C_1$$

$$\ln 50 = C_1$$

$$\ln x = -\frac{1}{20}t + \ln 50$$

$$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{20}t + \ln 50} = e^{\frac{1}{20}t} \cdot e^{\ln 50}$$

$$X(t) = 50\, e^{-\frac{1}{20}t}$$

B) $\dfrac{dy}{dt} = C_{e2} r_{e2} - C_{s2} r_{s2}$

$$C_{e2} = C_{s1} = \frac{X(t)}{V_1(t)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{X(t)(5)}{V_1(t)} - \frac{y(t)}{V_2(t)}(5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{V_1(0) + \underbrace{(r_{e1} - r_{s1})}_{0}t} \cdot 5 - \frac{y}{V_2(0) + \underbrace{(r_{e2} - r_{s2})}_{0}t} \cdot 5$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{100} - \frac{5y}{200} \longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{5}{100}\left(50 e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{5}{200}y$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{20}t}$$

$$\cdot\ f(t) = e^{\int \frac{1}{40}dt}$$

$$f(t) = e^{\frac{1}{40}t}$$

$$e^{\frac{1}{40}t}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y\right) = e^{\frac{1}{40}t}\left(\frac{5}{2} \cdot e^{-\frac{1}{20}t}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{40}t}y\right) = \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{40}t} \longrightarrow \int \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{40}t}y\right)dt = \int \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{40}t}\,dt$$

$$e^{\frac{1}{40}t}\, y = -100\, e^{-\frac{1}{40}t} + C_2$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{40}t}\left(-100\, e^{-\frac{1}{40}t} + C_2\right)$$

CS Scanned with CamScanner

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

$y(t) = -100\, e^{-\frac{1}{20}t} + C_2\, e^{-\frac{1}{40}t}$

✓ como $y(0) = 50$

$-100\, e^{0} + C_2\, e^{0} = 50$

$C_2 = 150$

$\rightarrow y(t) = -100\, e^{-\frac{1}{40}t} + 150\, e^{-\frac{1}{40}t}$

c) $y'(t) = -100\, e^{-\frac{1}{20}t}\left(-\frac{1}{20}\right) + 150\, e^{-\frac{1}{40}t}\left(-\frac{1}{40}\right)$

$y'(t) = 5e^{-1/20t} - \frac{15}{4} e^{-1/40t} = 0$

$5e^{-1/20t} = 15/4\, e^{-1/40t}$

$\frac{20}{15} = e^{-1/40t}\, e^{1/20t}$

$20/15 = e^{1/40t}$

$\ln(4/3) = e^{\ln 1/40t} \rightarrow \ln(4/3) = \ln(1/40)t$

$40 \ln 4/3 = t$

$11.5 = t$

✓ graficando la ecuación de $y(t)$ notamos que para $t = 11.5$ nos da un maximo de sal $y_{max} = 56,25\, lb$

CS Scanned with CamScanner

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

DIA DAY | MES MONTH | TEMA SUBJECT

Banco de Bogotá
Un Banco hecho entre dos

1.5

44) A) $y' = x + y$

$$\frac{dy}{dx} - y = x$$

$\cdot\ \mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$

$\cdot\ \mu(x) = e^{\int -1\,dx}$

$\cdot\ \mu(x) = e^{-x}$

$$e^{-x}\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = xe^{-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = xe^{-x} \;\to\; d\left(e^{-x}y\right) = \left(xe^{-x}\right)dx$$

$$\int d\left(e^{-x}y\right) = \int \left(xe^{-x}\right)dx$$

$$e^{-x}y = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$y(x) = -x - 1 + Ce^{x}$$

$\int xe^{-x}\,dx$ $\quad u = x$, $du = dx$, $v = e^{-x}$, $dv = e^{-x}dx$

$= -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx$

$= -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + C$

✓ cuando $x \to -\infty$ $\quad y(x) \to -x - 1$ asimptoticamente ya que $Ce^{x} \to 0$ cuando $x \to -\infty$

CS Scanned with CamScanner

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

SECCION 1.6

29) $2x \operatorname{sen} y \cos y \dfrac{dy}{dx} = 4x^2 + \operatorname{sen}^2 y$

Por sustitución

$u = \operatorname{sen}^2 y$

$\dfrac{d}{dx} u = \dfrac{d}{dx} (\operatorname{sen}^2 y)$

$\dfrac{du}{dx} = 2\operatorname{sen} y \cos y \dfrac{dy}{dx}$

$x \dfrac{du}{dx} = 4x^2 + u$

$x \dfrac{du}{dx} - u = 4x^2$

$\dfrac{du}{dx} - \dfrac{1}{x} u = 4x$

$\rho(x) = e^{\int P(x)\, dx}$

$\rho(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx}$

$\rho(x) = e^{-\ln x}$

$\rho(x) = e^{\ln x^{-1}}$

$\rho(x) = x^{-1} \rightarrow \dfrac{1}{x}$

$\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{du}{dx} - \dfrac{1}{x} u\right) = \dfrac{1}{\cancel{x}} 4\cancel{x}$

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x} u\right) = 4$

$d\left(\dfrac{1}{x} u\right) = 4\, dx$

$\int d\left(\dfrac{1}{x} u\right) = \int 4\, dx$

$\dfrac{1}{x} u = 4x + C$

$u = 4x^2 + Cx$

$\operatorname{sen}^2 y = 4x^2 + Cx$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

30) $(x+e^{y})\,y' = xe^{-y} - 1$

$(x+e^{y})\frac{dy}{dx} + 1 - xe^{-y} = 0$

$(x+e^{y})\,dy + (1-xe^{-y})\,dx = 0$

$(1-xe^{-y})\,dx + (x+e^{y})\,dy = 0$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$M_y = xe^{-y} \qquad N_x = 1$

$M_y \neq N_x \longrightarrow$ Por lo tanto No es exacta

entonces $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{1 - xe^{-y}}{1-xe^{-y}} = 1$

Por lo tanto existe factor Integrante $\rho(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$

$\rho(y) = e^{\int 1\, dy}$

$\rho(y) = e^{y}$

$(1-xe^{-y})\,dx + (x+e^{y})\,dy = 0$

$e^{y}(1-xe^{-y})\,dx + e^{y}(x+e^{y})\,dy = 0$

$(e^{y} - x)\,dx + (xe^{y} + e^{2y})\,dy = 0$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$M_y = e^{y} \qquad N_x = e^{y}$

$M_y = N_x \longrightarrow$ Por lo tanto EDO es exacta

$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y} - x \quad \wedge \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{y} + e^{2y}$

Integro Parcial respecto y $\quad f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$

$f(x,y) = \int xe^{y} + e^{2y}\, dy$

$f(x,y) = xe^{y} + \frac{1}{2}e^{2y} + g(x)$

Deriva Parcial respecto x $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{y} + 0 + g'(x)$

$e^{y} - x = e^{y} + g'(x)$

$-x = g'(x)$

$\int -x\,dx = g(x) \longrightarrow -\frac{1}{2}x^{2} + c_1 = g(x)$

Norden

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

Ej 501. Para la EDO Exacta es

$$x e^{y} + \frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{2} x^{2} + C_1 = C$$

$$x e^{y} + \frac{1}{2} e^{2y} - \frac{1}{2} x^{2} = C_2$$

$$2x e^{y} + e^{2y} - x^{2} = k$$

$$\boxed{\begin{array}{l} C_2 = C - C_1 \\ k = 2C_2 \end{array}}$$

$$2\sqrt{x+y+1} - 2\ln\left(\sqrt{x+y+1} + 1\right) = x + C_1$$

$$x + C_1 = 2\sqrt{x+y+1} - 2\ln\left(\sqrt{x+y+1} + 1\right)$$

$$x = 2\sqrt{x+y+1} - 2\ln\left(\sqrt{x+y+1} + 1\right) + C$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

46) $xy'' + y' = 4x$

reducir el orden $U(x) = y'$

$$\frac{d}{dx} U(x) = \frac{d}{dx}(y')$$

$$U'(x) = y''$$

remplazando en la expresion

$$x\,U'(x) + U = 4x$$

$$x\frac{dU}{dx} + U = 4x$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{1}{x}U = 4$$

EDO lineal

$$P(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

$$P(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx}$$

$$P(x) = e^{\ln x}$$

$$P(x) = x$$

$$x\left(\frac{dU}{dx} + \frac{1}{x}U\right) = 4x$$

$$\frac{d}{dx}(xU) = 4x$$

$$d(xU) = 4x\,dx$$

$$\int d(xU) = \int 4x\,dx$$

$$xU = 2x^2 + \frac{C_1}{x}$$

$$U(x) = 2x + \frac{C_1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{C_1}{x}$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

$$dy = \left(2x + \frac{c_1}{x}\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{c_1}{x}\right) dx$$

$$y(x) = x^2 + c_1 \ln x + c_2$$

49) $y y'' + (y')^2 = y y'$

reducir el orden $\quad u(y) = y'$

$$\frac{d}{dx}(u(y)) = \frac{d}{dx}(y')$$

$$\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = y''$$

$$\frac{du}{dy} y' = y''$$

$$\frac{du}{dy} u = y''$$

remplazando: $\quad y u \frac{du}{dy} + (u(y))^2 = y u$

$$\frac{du}{dy} + \frac{1}{y} u = 1$$

se dividio por yu

$u = y' > 0$

$y > 0$

Por condiciones del Problema

$$y\left(\frac{du}{dy} + \frac{1}{y} u\right) = y$$

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) &= e^{\int P(x)\, dx} \\ P(y) &= e^{\int \frac{1}{y} dy} \\ P(y) &= e^{\ln y} \\ P(y) &= y \end{aligned}}$$

$$\frac{d}{dy}(uy) = y$$

$$d(uy) = y\, dy$$

$$\int d\, uy = \int y\, dy$$

$$uy = \frac{1}{2} y^2 + c_1$$

$$u(y) = \frac{1}{2} y + \frac{c_1}{y}$$

$$y' = \frac{1}{2} y + \frac{c_1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} y + \frac{c_1}{y}$$

$$dy = \left(\frac{1}{2} y + \frac{c_1}{y}\right) dx$$

$$dy = \frac{y^2 + c_2}{2y} dx$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

$$\frac{2y}{y^2+C_2}\,dy = dx$$

$$\int \frac{2y}{y^2+C_2}\,dy = \int dx$$

$$\ln(y^2+C_2) = x + C_3$$

$$e^{\ln(y^2+C_2)} = e^{x+C_3}$$

$$y^2 + C_2 = Be^x$$

$$y^2 = A + Be^x$$

$$y = \sqrt{A+Be^x}$$

50) $y'' = (x+y')^2$

Cambio de variable

$$v(x) = x + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dv}{dx} - 1 = y''$$

reemplazamos en la original

$$\frac{dv}{dx} - 1 = v^2$$

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + 1$$

$$dv = (v^2+1)\,dx$$

$$\frac{dv}{v^2+1} = dx$$

$$\int \frac{dv}{v^2+1} = \int dx$$

$$\arctan = x + C_1$$

Isabella Naranjo

Santiago Echeverri

Juan David Ospina

$$v(x) = \tan(x + C_1)$$

$$x + \frac{dy}{dx} = \tan(x + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x + C_1) - x$$

$$dy = (\tan(x + C_1) - x)\, dx$$

$$\int dy = \int \tan(x + C_1) - x \quad dx$$

$$y(x) = -\ln|\cos(x + C_1)| - \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y(x) = \ln\left|\frac{1}{\cos(x + C_1)}\right| - \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$y(x) = \ln|\sec(x + C_1)| - \frac{1}{2}x^2 + C_2$$