Střepy z hudební akustiky

Tón a jeho výška

Žán Pól Kastról

11. února 2024

Obsah

1 Tón

1.1 Dělení zvuků

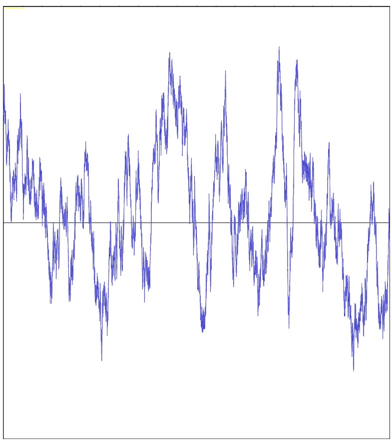
http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/186-zakladni-deleni-zvuku

1. **Hluky** (šumy, praskání, skřípání, …) – grafem závislosti intenzity (hlasitosti) na čase **není periodická funkce** (viz obr. 1) (patří sem *samohlásky*)

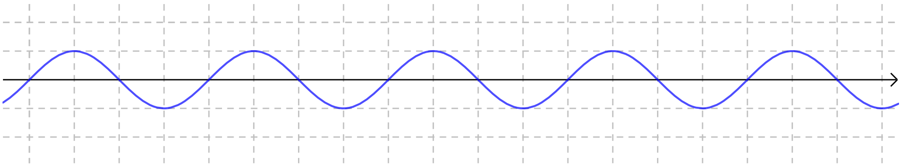
2. **Tóny** (hudební zvuky) – grafem závislosti intenzity (hlasitosti) zvuku na čase **je periodická funkce**

   (a) **Tóny jednoduché** – mají *harmonický* průběh, tj. grafem závislosti intenzity (hlasitosti) zvuku na čase je funkce *sinus*. viz https://ggbm.at/mfgtcpsu

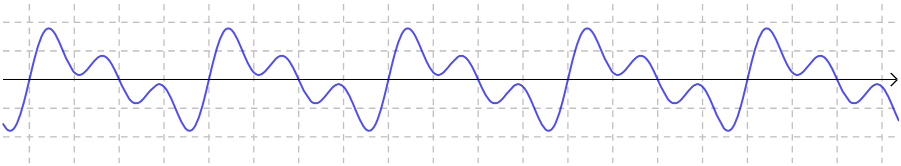
   (b) **Tóny složené** – jejich průběh je *periodický*, ale už se *nejedná o sinusoidu.*



Obr. 1: Hluk



Obr. 2: Jednoduchý tón



Obr. 3: Složený tón

1.2 Jednoduchý a složený tón

Jednoduchý tón. Je fyzikálně tvořen *jedinou sinusouidou* o určité frekvenci. Například ladička kmitající s frekvencí $f = 440\,\mathrm{Hz}$ vytváří jednoduchý tón. Také některé flétny prý produkují jednoduché tóny.

Jednoduchý tón si můžeme snadno vyrobit sami pomocí PC nebo mobilu. (http://www.szynalski.com/tone-generator/) Jednoduchý tón nemá žádnou barvu a zní ploše.

Složený tón (patří sem *souhlásky*) Většina hudebních nástrojů však vydává tóny, které jsou složené z *více sinusoid* různých frekvencí. Nejnižší z nich udává **výšku tónu** a mívá největší amplitudu. Ostatní frekvence mají amplitudy menší a vytvářejí **barvu tónu**.

Také složené tóny si můžeme vyprodukovat snadno i bez hudebního nástroje na PC či v mobilu. (https://meettechniek.info/additional/additive-synthesis.html)

Nejlépe lze podstatu vzniku složeného tónu vysvětlit na struně (viz Jak mistrná struna zmátla Bruna – `https://www.geogebra.org/m/fkxvumjb`).

Zde se budeme zabývat pouze výškou tónu, v dalším karisáku probereme jeho barvu.

2 Frekvence (podnět p) a výška tónu (vjem v)

Pokus 1: Výška tónu

Vezměme nějaký frekvenční generátor[a] a poslechněme si, jak zní několik frekvencí. Popišme, co vnímá naše ucho!

[a]Třeba tento: http://www.szynalski.com/tone-generator/

Závěr 1: Ucho vnímá jednotlivé tóny v různé **výšce**
Závěr 2: Čím **větší je frekvence tónu** f, tím **větší je výška tónu** v, kterou vnímá naše ucho.

Člověku se zdá, jako kdyby tón o frekvenci f_1 seděl na jistém stupni žebříku, tón f_2 na **vyšším** stupni a tón f_3 na ještě **vyšším** stupni atd. Náš pomyslný **žebřík** se skládá ze **stupňů**, na které stoupám, když po něm lezu nahoru, takže bych mu mohl říkat „stupnice“. V hudbě se pojem **stupnice**[1] vskutku používá pro tóny s rostoucí **výškou**, a tedy s rostoucí **frekvencí**.

Definice 1: Výška tónu

Výška tónu v (anglicky *pitch*) je *subjektivní* vlastnost tónů, která umožňuje jejich uspořádání do řady podle *objektivních* frekvencí f.

[1]italsky *scala* = stupnice, žebřík, měřítko. Odtud české *měřítko* = škála.

Mají-li dva tóny různou frekvenci, potom tón s vyšší frekvencí má vyšší výšku.

$$\boxed{f_1 > f_2 \Rightarrow v_1 > v_2} \tag{1}$$

Vztah 1 znamená, že závislost v na f je funkce *rostoucí* (o jakou funkci se jedná, to zjistíme v další kapitole). Každá rostoucí posloupnost je ale *prostá*, takže platí:

$$f_1 = f_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \tag{2}$$

Samozřejmě platí i obrácená implikace, jinak by nešlo o funkci, takže platí ekvivalence:

Věta 1: Rovnost frekvencí a výšek

Dvěma stejným frekvencím odpovídají stejné výšky a naopak.

$$\boxed{f_1 = f_2 \Leftrightarrow v_1 = v_2} \tag{3}$$

Máme tedy dvě veličiny: **výšku** v a **frekvenci** f. Výška tónu **je dána frekvencí** (vztahy 1, 3), ale **není s ní ekvivalentní**.

Je potřeba si uvědomit, že frekvence je **objektivní** fyzikální veličina (**podnět**), kdežto výška tónu je **subjektivní** veličina (**vjem**). Zatímco frekvenci lze objektivně měřit fyzikálním přístrojem, výška je subjektivní vnímání zvukového vlnění konkrétní osobou, které přímo měřit možné není. To však neznamená, že se většina lidí neshodne, jaký tón je vyšší nebo nižší.

Frekvence má jakožto fyzikální veličina **jednotku** (Hertz), kdežto výška tónu jakožto subjektivní veličina **jednotku nemá** – vyjasníme později.

Výška tónu je tedy pojem spadající do oblasti **psychoakustiky**[2], která je podoborem **psychofyziky**[3].

3 Závislost *výšky* tónu na *frekvenci*

Víme, že roste-li frekvence, roste i výška. Nyní nás bude zajímat, jaká je přesně **závislost výšky** v **(vjemu) na frekvenci** f **(podnětu)**.

3.1 Fechner poprvé útočí!

Hypotéza 1:

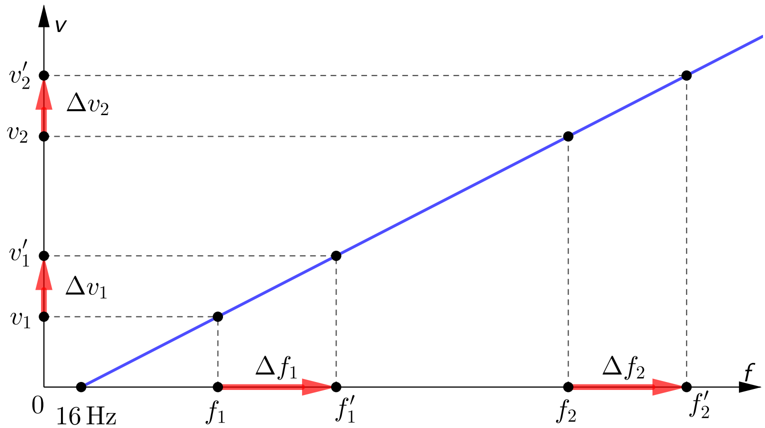
Nejjednodušší, co nás napadne je, že je to závislost **lineární**.

Zkusíme tuto hypotézu prozkoumat a ověřit pokusem. Víme, že nejnižší frekvence, kterou lidské ucho může vnímat, je přibližně 16 Hz. Této hodnotě bychom měli tedy přiřadit nulovou výšku ($v(16) = 0$). Potom by závislost v na f měla vypadat nějak tak, jak je to na obrázku 4 – tedy grafem by měla být přímka.

Důsledek by byl tento: pokud bychom vzali dvě frekvence $f_1 < f_2$, odpovídaly by jim výšky $v_1 < v_2$. Když bychom frekvence zvětšili o

[2] *Psychoakustika* je vědní odbor, který se zabývá výzkumem vnímání zvuku. Přesněji studiem a výzkumem fyziologických a psychologických reakcí na zvukové podněty, jako je řeč a hudba. Psychoakustika je jedním z podoborů psychofyziky.

[3] *Psychofyzika* je exaktní věda o funkčních vztazích mezi tělem a duší se snahou vystihnout fyzikálními zákony psychické děje. Zaměřuje se na zkoumání počitků, které jsou v jejím chápání charakterizovány obsahem, intenzitou a dobou trvání. Ústředním tématem psychofyziky je problém mysli a těla. Představitelem tohoto směru byl Gustav Fechner, který se zaměřoval na zkoumání vztahu mezi psychickým a fyzickým světem. Velký význam pro toto vědecké bádání má jeho kniha Základy psychofyziky. Zásluhou psychofyziky pronikaly do psychologie přesnější laboratorní metody. Termín psychofyzika zavedl lékař a psycholog Ernst Heinrich Weber.(Zdroj: https://cs.wikipedia.org/wiki/Psychofyzika)



Obr. 4: Závisí v na f lineárně?

stejné hodnoty $\Delta f_1 = \Delta f_2$, musely by se kvůli linearitě zvetšit i výšky o stejné hodnoty $\Delta v_1 = \Delta v_2$ (obr. 4). Naše hypotéza je tedy tato:

Hypotéza 1: Linearita

Zvýšíme-li **frekvence** *o stejnou hodnotu*, zvýší se i **výšky** *o stejnou hodnotu* a naopak?

$$\Delta f_1 = \Delta f_2 \overset{???}{\Longleftrightarrow} \Delta v_1 = \Delta v_2$$

Vidíme, jde o vztah obdobný vztahu 3. Hypotézu snadno ověříme následujícím pokusem, kdy vezmeme frekvence $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$ a $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 10\,\mathrm{Hz}$.

Pokus 2: Prozkoumání hypotézy 1

https://youtu.be/nzZ8kSsLin0

Slyšeli jsme, že výškový odstup mezi tóny s frekvencemi 1000 Hz a 1010 Hz vnímáme jako **mnohem menší** než mezi frekvencemi 100 Hz a 110 Hz! No to je skandál! Naše hypotéza se nepotvrdila a **ucho tedy nevnímá výšky lineárně**.
Frekvenci $f_2 = 1000$ Hz nestačí tedy zvýšit o stejnou hodnotu jako f_1 (tedy o 10 Hz) – musíme ji zvýšit víc!

Hypotéza 2: Tak co nás napadne teď? Předtím jsme nechali obě frekvence přirůst o stejnou hodnotu 10 Hz. Co kdybychom je nechali přirůst o **stejná procenta**? Přírůstek první frekvence byl 10 Hz, což je 10% ze 100 Hz, takže přírůstek druhé frekvence by musel být 10% z 1000 Hz, což je 100 Hz.

Obecně tedy chceme

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} \cdot 100\% = \frac{\Delta f_2}{f_2} \cdot 100\%$$

To je ale totéž jako

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2}$$

Čiliž požadujeme rovnost **relativních přírůstků** (to je něco jako relativní chyba).

Naše hypotéza tedy je:

Hypotéza 2: Procenta

Zvýšíme-li **frekvence** *o stejnou procentuální hodnotu*, zvýší se i

výšky *o stejnou hodnotu* a naopak?

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2} \overset{???}{\Longleftrightarrow} \Delta v_1 = \Delta v_2$$

Hypotézu ověříme následujícím pokusem, kdy vezmeme frekvence $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1000\,\mathrm{Hz}$ a $\Delta f_1 = 10\,\mathrm{Hz}$, $\Delta f_2 = 100\,\mathrm{Hz}$.

Pokus 3: Prozkoumání hypotézy 2

https://youtu.be/13VTUmu9ksE

Hurá! Hypotéza se potvrdila.

Věta 2: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 1)

Zvýšíme-li **frekvence** *o stejnou procentuální hodnotu*, zvýší se i **výšky** *o stejnou hodnotu* a naopak.
Neboli:
Stejným *relativním přírůstkům* **frekvencí** odpovídají i stejné *absolutní přírůstky* **výšek**.

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2} \Leftrightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2 \tag{4}$$

3.2 Fechner útočí podruhé!

Stejně jako $f \neq v$ [4] , tak také $\frac{\Delta f}{f} \neq \Delta v$! Jaký je vztah mezi $\frac{\Delta f}{f}$ a Δv uvidíme později [5].

No a teďkonc vztah 4 ještě trochu upravíme. Pač dle obr. 4 platí:

$$\Delta f_1 = f_1' - f_1 \qquad \text{a} \qquad \Delta f_2 = f_2' - f_2$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f_1}{f_1} &= \frac{\Delta f_2}{f_2} \\
\frac{f_1' - f_1}{f_1} &= \frac{f_2' - f_2}{f_2} \\
\frac{f_1'}{f_1} - 1 &= \frac{f_2'}{f_2} - 1 \\
\frac{f_1'}{f_1} &= \frac{f_2'}{f_2}
\end{aligned}$$

A teď bacha! Přijde **krůšl-point**, jak se říká u nás v Černých Voděradech. Zavedeme nový pojem, který je zcela zásadní - **hudební interval**.

Akoráth tu zasejc budeme mít tu *dualitu fyzikální podnět – subjektivní vjem*.

Esiževá slyšíme dva různě vysoké tóny o **výškách** $v' > v$ a o **frekvencích** $f' > f$, potom

- subjektivně vnímáme, že je mezi nimi nějaký **výškový odstup**, který je **vyjádřen subjektivní veličinou** Δv:

[4] Později odvodíme $v = k \cdot \ln \frac{f}{f_0}$

[5] Později odvodíme $\Delta v = k \cdot \frac{\Delta f}{f}$

$$\Delta v = v - v'$$

- Objektivně je dle 5 tento výškový odstup dán **objektivním poměrem frekvencí**

$$\frac{f'}{f}$$

Neznamená to, že $\frac{f'}{f} = \Delta v$! Jaký je vztah mezi $\frac{f'}{f}$ a Δv odvodíme už za chvilku [6]. Teďkonc se akorát pojďme dohodnout, že začneme používat pojem **interval mezi dvěma tóny** a budeme tím myslet jednak **subjektivně** vnímaný odstup mezi výškami obou tónů a dvojak **objektivní** poměr fyzikálních frekvencí těchto dvou tónů.

Definice 2: Hudební interval

- **Subjektivně:** Interval mezi dvěma tóny o výškách $v' > v$ je vnímaná vzdálenost mezi výškami těchto tónů: $\Delta v = v' - v$.
- **Objektivně:** Interval mezi dvěma tóny o frekvencích $f' > f$ je poměr jejich frekvencí: $\frac{f'}{f}$

Pročež můžeme výše vyslovenou větu 3.1 formulovat dalším způsobem, ty vé!

[6] $\Delta v = k \cdot \ln \frac{f'}{f}$ resp. $\Delta v = \log_2 \frac{f'}{f}$

Věta 3: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 2)

Dva subjektivně vnímané hudební **intervaly jsou stejné**, právě když jsou stejné **poměry** jim odpovídajících frekvencí.

$$\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2} \Leftrightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2 \tag{5}$$

Příklad 1

Jsou dány dva tóny o frekvencích $f_1 = 250\,\mathrm{Hz}$ a $f_2 = 375\,\mathrm{Hz}$. Jaký je mezi těmito tóny interval?

Víme, že interval není dán rozdílem, ale podílem frekvencí.

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{375}{250} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Mezi tóny je interval[a] $\frac{3}{2}$.

[a]**Poznámka**: Nyní jsme určili interval **objektivně** jako poměr frekvencí. Později uvidíme, že je možné ho určit i **subjektivně** (tak, jak ho vnímá naše ucho) jako $\Delta v = \log_2 \frac{3}{2} \doteq 0,58$.

Příklad 2

Vezměmež tóny z předcházejícího příkladu a k nim ještě třetí tón s frekvencí $f_3 = 1200\,\mathrm{Hz}$. Jakou frekvenci f_4 musí mít čtvrtý tón, který tvoří s třetím tónem stejný interval jako první dva tóny, jestliže čtvrtý tón je

a) vyšší než třetí

b) nižší než třetí

Víme, že první interval je $\frac{3}{2}$.

a) Musíme třetí frekvenci zvýšit – tedy vynásobit číslem $\frac{3}{2}$. Odtud $f_4 = 1200 \cdot \frac{3}{2} = 1800\,\mathrm{Hz}$.

https://youtu.be/nuW-_HUQYFg

b) Musíme třetí frekvenci snížit – tedy vydělit číslem $\frac{3}{2}$ čili vynásobit číslem $\frac{2}{3}$. Odtud $f_4 = 1200 \cdot \frac{2}{3} = 800\,\mathrm{Hz}$.

https://youtu.be/Th4iLB05vaA

3.3 Fechner útočí potřetí!

Pojďme vzít nyní 3 tóny s výškami $v_1 < v_2 < v_3$ takové, že jsou mezi nimi stejné výškové odstupy $\Delta v_1 = \Delta v_2$ (intervaly), tedy výšky v_1, v_2, v_3 tvoří **aritmetickou posloupnost**. Jakou posloupnost tvoří frekvence $f_1 < f_2 < f_3$ těchto tónů?

Pač oba intervaly jsou shodné, musí platit

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2} = q$$

Pročež frekvence f_1, f_2, f_3 tvoří geometrickou posloupnost s fvocíkem q! Odtud dostáváme další formulaci FZ:

Věta 4: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 3)

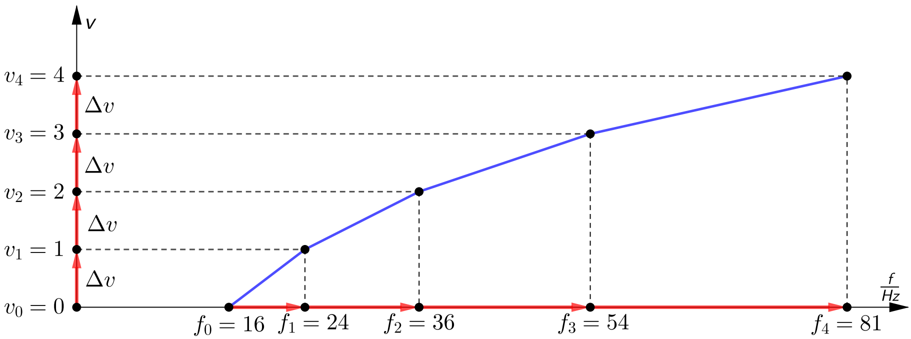
Rostou-li **frekvence** tónů posloupností **geometrickou**, roste jejich **výška** jen posloupností **aritmetickou**!

Oprava grafu:

Nyní si můžeme trochu popravit graf z obrázku 4, kde jsme si ještě bláhově mysleli, že je závislost v na f lineární. Vylepšený graf je na obrázku 5. Vezmeme opět frekvenci $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$ jako nejnižší slyšitelnou a jí přiřadíme výšku $v = 0$. Vytvoříme geometrickou posloupnost frekvencí s prvním členem f_0 a *kvocíkem* například $q = \frac{3}{2}$. Dostáváme tedy hodnoty frekvencí $16, 24, 36, 54, 81, \ldots$

Přírůstkům frekvencí přiřadíme jistý konstantní přírůstek výšky Δv. Jeho hodnotu si můžeme **zvolit** podle libosti. Výška i její přírůstky jsou totiž veličiny **subjektivní** a závisejí tedy na tom, jak je dané ucho **citlivé** na jejich změny. Citlivý člověk bude pociťovat interval mezi 16 Hz a 24 Hz jako výrazný, necita jako malý!

Zvolíme-li náš konstantní přírůstek výšky jako **jednotkový**, dostáváme hodnoty výšek $1, 2, 3, 4, \ldots$



Obr. 5: Frekvence tvoří **GP** $\Rightarrow$ výšky tvoří **AP**

Body grafu jsme spojili provizorně úsečkami – za chvíli se dostaneme k tomu, jakou křivku jimi máme správně proložit (asi už to zhruba tušíme).

V tomto příkladu jsme si zvolili *kvocík* $q = \frac{3}{2}$. Jinými slovy **interval** mezi jednotlivými tóny je $\frac{3}{2}$. V hudbě je to velice důležitý interval – **kvinta** (název vysvitne později).

Ještě si zkusíme, jak to reálně zvučí:

Pokus 4: Kvintové skoky

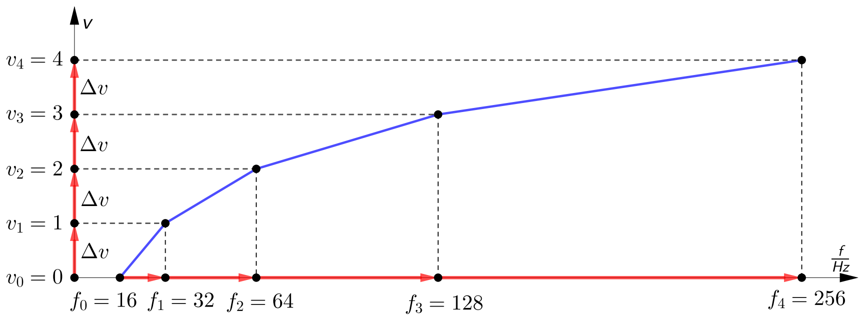
Nízké frekvence 16 Hz, 24 Hz, 36 Hz jsou strašně slabé, začínáme až od 54 Hz $(54 - 81 - 121,5 - 182,25)$:
https://youtu.be/KLXGknm4Zas

Ale ještě důležitější hudební interval je **oktáva** – je to interval s *kvocíkem* $q = 2$. Pojďme si na to udělat příklad:

Příklad 3: Oktáva se nesměle představuje

Vytvoř podobný graf jako v obr. 5 pro **oktávové** intervaly, tedy pro *kvocík* $q = 2$.

Posloupnost frekvencí bude $16, 32, 64, 128, 256, \dots$ Nyní přiřadíme hodnotu výšky $v_1 = 1$ frekvenci $f_1 = 32$ Hz. Dostáváme graf:



A jak to zvučí:

Pokus 5: Oktávové skoky

Nízké frekvence 16 Hz, 32 Hz jsou strašně slabé, začínáme až od 64 Hz (64 – 128 – 256 – 512 – 1024):
https://youtu.be/4786S0CjEKc

3.4 Fechner útočí počtvrté (a naposled)!

Vztah mezi GP a logaritmy: Nyní se konečně podíváme na to, co je to přesně za matematickou funkci, která charakterizuje závislost mezi výškou tónu v a jeho frekvencí f.

Podíváme-li se na výše uvedené grafy posloupností kvint a oktáv, jistě nás už napadlo, že grafy připomínají graf logaritmické funkce. Naznačuje to i fakt, že **geometrická** posloupnost frekvencí je touto funkcí převedena na **aritmetickou** posloupnost výšek. Toto vskutku dělá logaritmická funkce.

x	$\left(\frac{3}{2}\right)^0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^1$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4$
y	0	1	2	3	4

Tabulka 1: **GP**; $q = \frac{3}{2}$.

x	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
y	0	1	2	3	4

Tabulka 2: **GP**; $q = 2$.

V tabulce 1 jsou v prvním řádku mocniny čísla $\frac{3}{2}$, čiliž geometrická posloupnost s *kvocíkem* $q = \frac{3}{2}$. Ve druhém řádku jsou **logaritmy** těchto čísel (logaritmy o základu $\frac{3}{2}$). Víme přece, že platí

$$\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 0; \quad \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^1 = 1; \quad \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2; \quad \dots$$

Obdobně v tabulce 2 jsou v prvním řádku mocniny čísla 2, čiliž geometrická posloupnost s *kvocíkem* $q = 2$. Ve druhém řádku jsou **logaritmy** těchto čísel (logaritmy o základu 2). Víme přece, že platí

$$\log_2 2^0 = 0; \quad \log_2 2^1 = 1; \quad \log_2 2^2 = 2; \quad \dots$$

Nyní je již zřejmé, že budeme pro vyjádření posloupnosti kvint z obr.5 potřebovat logaritmickou funkci o základu $\frac{3}{2}$. Přitom budeme chtít, aby pro $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$ byla výška $v_0 = 0$. Takže použijeme funkci

$$\boxed{v = \log_{\frac{3}{2}} \frac{f}{16}} \tag{6}$$

Vskutku potom dostáváme pro $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$ hodnotu

$$v_0 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{16}{16} = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$$

,

pro $f_1 = 16 \cdot \frac{3}{2} = 24\,\mathrm{Hz}$ dostáváme

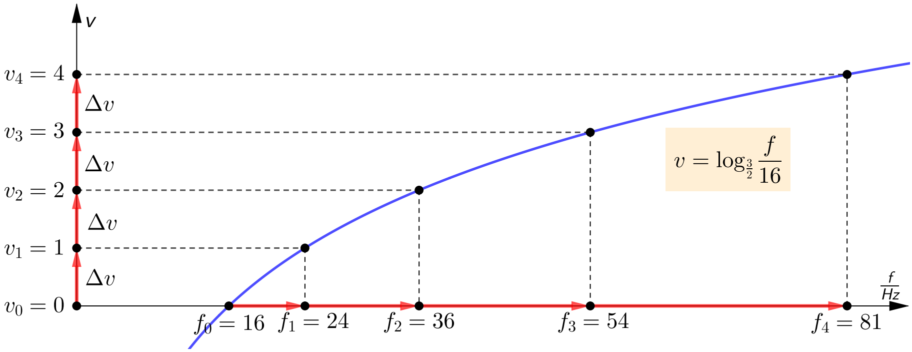
$$v_1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{16 \cdot \frac{3}{2}}{16} = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 1$$

pro $f_2 = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 36\,\mathrm{Hz}$ dostáváme

$$v_2 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{16} = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2$$

,

a tak dále. Graf 5 tedy můžeme opravit tak, že úsečky nahradíme pěknou logaritmickou křivicí (viz obr.6).



Obr. 6: **GP** s *kvocíkem* $k = \frac{3}{2}$ → **kvinty**

Analogicky použijeme pro posloupnost oktáv z příkladu 3 vztah

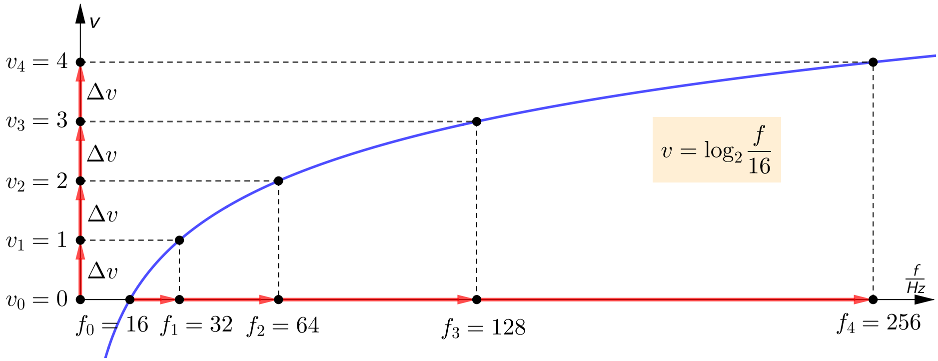
$$\boxed{v = \log_2 \frac{f}{16}} \tag{7}$$

a graf bude vypadat takto – viz obr. 7.

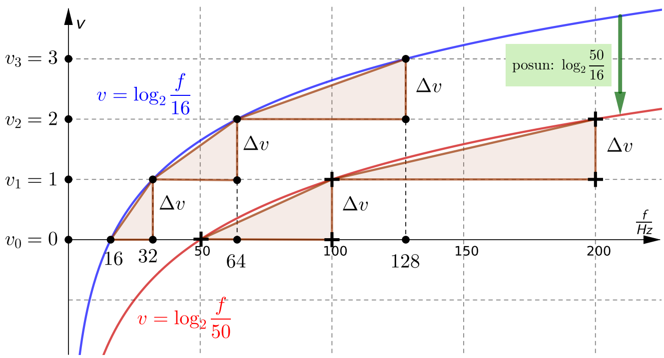
Změna f_0: Jako základní frekvenci jsme si zvolili v našich příkladech $f_0 = 16\,\mathrm{Hz}$. Když se nám však zlíbí, můžeme si základní frekvenci, které odpovídá nulová výška, zvolit jakoukoliv – třeba $f_0 = 50\,\mathrm{Hz}$.

Místo vztahu $v = \log_2 \frac{f}{16}$ budeme mít vztah $v = \log_2 \frac{f}{50}$. Jak se změní náš graf? To vidíme na obr.8.

Graf se jen posune dolů ve směru svislé osy v, ale **tvarově se nezmění**. Přírůstky výšky Δv odpovídající posloupnosti frekvencí $50, 100, 200, \ldots$ budou úplně stejné jako pro posloupnost $16, 32, 64, \ldots$. O kolik se graf posune? Platí:



Obr. 7: **GP** s *kvocíkem* $k = 2 \rightarrow$ **oktávy**



Obr. 8: f_0 si můžeme zvolit libovolně

$$\log_2 \frac{f}{50} = \log_2 \frac{f}{k \cdot 16} \quad ; \quad k = \frac{50}{16}$$

$$\log_2 \frac{f}{k \cdot 16} = \log_2 \frac{\frac{f}{16}}{k} = \log_2 \frac{f}{16} - \log_2 k$$

Vidíme, že graf funkce $v = \log_2 \frac{f}{16}$ se posunul o $\log_2 \frac{50}{16}$.

Zobecnění: V hudbě je základním intervalem **oktáva** (proč – viz později). Proto použijeme jako základ logaritmu číslo 2. Základní frekvenci, jak víme, si můžeme zvolit libovolně. Dostáváme:

Věta 5: Fechnerův zákon pro vnímání výšky zvuku – (Formulace 4)

Výška tónu v je logaritmickou funkcí frekvence f. (Ucho vnímá frekvence tónů **logaritmicky**.)

$$\boxed{v = \log_2 \frac{f}{f_0}} \tag{8}$$

kde f_0 je základní frekvence, které chceme přiřadit výšku $v_0 = 0$.

Odvození: Vzorec 8 jsme tak trochu uhádli. Pojďme ještě trochu detailněji ukázat, že tento vztah je ekvivalentní se vztahem 4 z Formulace 1.

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{\Delta f_2}{f_2} \Leftrightarrow \Delta v_1 = \Delta v_2$$

To znamená, že je-li $\frac{\Delta f}{f}$ konstantní, je i Δv konstantní. Neboli:

$$\frac{\Delta f}{f} = konst_1 \Rightarrow \Delta v = konst_2$$

Vydělením rovnic dostáváme $\frac{\Delta v}{\frac{\Delta f}{f}} = \frac{konst_1}{konst_2} = k$. Pač $konst_2$ je volitelná (Δv je subjektivní), je i konstanta k volitelná, což se nám bude za chvíli hodit. Dále dostáváme:

$$\boxed{\Delta v = k \cdot \frac{\Delta f}{f}} \tag{9}$$

- To znamená, že **absolutní přírůstek výšky** je *přímo úměrný* **relativnímu přírůstku frekvence**.

Vztah 9 můžeme upravit na tvar:

$$\boxed{\frac{\Delta v}{\Delta f} = \frac{k}{f}} \tag{10}$$

Respektive pro elementární přírůstky:

$$\boxed{\frac{dv}{df} = \frac{k}{f}} \tag{11}$$

- To znamená, že **rychlost růstu výšky** je *nepřímo úměrná* **frekvenci**.

Vezmeme vztah 11, zintegrujeme a dostáváme:

$$v = \int \frac{k}{f} df$$
$$v = k \ln f + C$$

Integrační konstantu C určíme snadno – pro $f = f_0$ (počáteční frekvence, kterou si mohu zvolit) je $v = 0$ (nulová výška):

$$0 = k \ln f_0 + C$$

$$
\begin{aligned}
C &= -k \ln f_0 \\
v &= k \ln f - k \ln f_0 \\
v &= k(\ln f - \ln f_0)
\end{aligned}
$$

Po úpravě dostáváme:

$$\boxed{v = k \cdot \ln \frac{f}{f_0}} \tag{12}$$

Zde máme přirozený logaritmus se základem e Jak z toho dostaneme náš základ 2 (který se nám hodí kvůli oktávám)? Konstanta k je, jak jsme vysvětlili výše, volitelná – tak si ji můžeme zvolit tak, aby nám to vyšlo:

$$
\begin{aligned}
k \cdot \ln \frac{f}{f_0} &= \log_2 \frac{f}{f_0} \\
k \cdot \ln \frac{f}{f_0} &= \frac{\ln \frac{f}{f_0}}{\ln 2} \\
k &= \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}}
\end{aligned}
$$

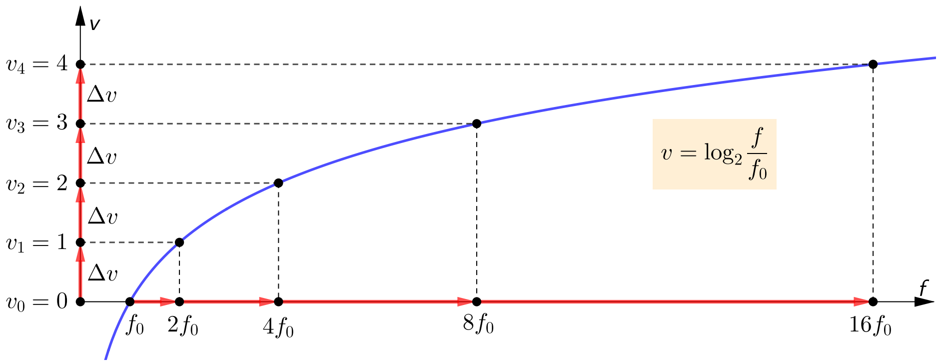
Takže zvolíme-li $k = \dfrac{1}{\ln 2}$ a dosadíme do 12, dostáváme:

$$v = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{f}{f_0} = \frac{\ln \frac{f}{f_0}}{\ln 2} = \underline{\underline{\log_2 \frac{f}{f_0}}}$$

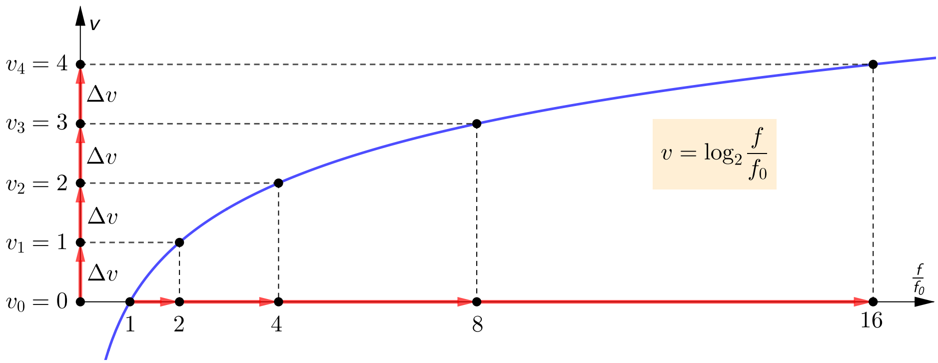
Což jsme chtěli odvodit.

Vztah 8 lze graficky vyjádřit dvěma způsoby. Buď jako závislost v na f (viz obr.9) nebo jako závislost v na $\frac{f}{f_0}$ (viz obr.10). V druhém případě nevynášíme na vodorovnou osu přímo frekvence tónů, ale poměr těchto frekvencí k základní frekvenci f_0, což jsou jen čísla bez jednotek, vyjadřující, kolikrát je daná frekvence vyšší než frekvence základní.

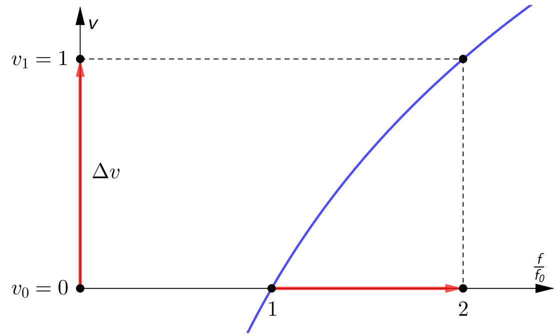
Dost často nás zajímá jen jedna oktáva (pač jak vysvětlíme později, ve všech ostatních oktávách je to všechno podobné), vystačíme si s frekvencemi od f_0 do $2f_0$ (viz obr.11)



Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11

3.5 Fechnerův-Weberův zákon obecněji

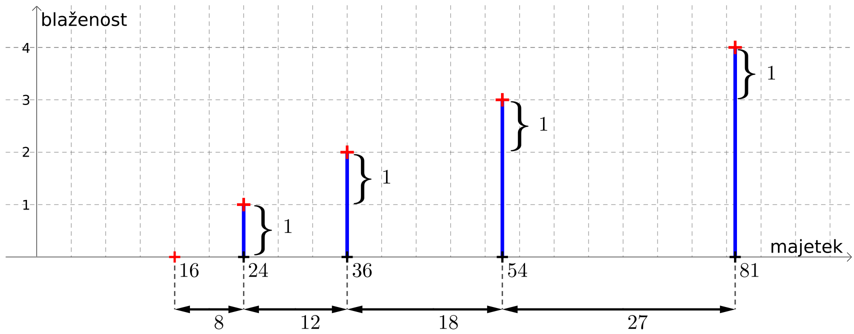
Na úvod dvě videa o FW zákonech tři aplety v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/hvpgyfwd#material/ru3zths9

Příklad 4: Josef Kajetán Molitán

Josef Kajetán Molitán (JKM) jde po ulici, v kapse má posledních 16 korun (**majetek** – **fyzikální podnět**) a jeho **blaženost** (**subjektivní vjem**) je na nulové hodnotě. Na zemi najde 8 korun a jeho blaženost vzroste na hodnotu 1. Po chvíli najde další částku a jeho blaženost se zvýší na hodnotu 2. Jakou našel částku?

První nález byl 50 % jeho počátečního majetku. Po prvním nálezu má 16 + 8 = 24 korun. Kdyby nyní našel zase jen 8 korun, už by to bylo pro něj málo. Aby jeho blaženost vzrostla o stejnou hodnotu jako předtím, musí zřejmě podruhé najít 50 % ze současného majetku (z 24 korun), což je 12 korun!

To by se opakovalo při dalších nálezech. Po druhém nálezu má 24+12=36 korun. Třetí nález musí být 50 % z 36, tedy 18 korun a majetek se zvýší na 54 korun. Dále musí najít $54/2 = 27$ korun a jeho majetek bude 81 korun. A tak dále.



Závěr:

- Vidíme, že k tomu, **aby blaženost rostla o stále stejné přírůstky, musí být relativní přírůstek prachů stále stejný** (zde 50 %).
- Posloupnost **přírůstků jeho majetku** by byla $8, 12, 18, 27 \ldots$. Všimněme si, že to je posloupnost **geometrická** s kvocientem $q = \dfrac{3}{2}$
- Posloupnost **hodnot jeho majetku** by byla $16, 24, 36, 54, 81 \ldots$. Všimněme si, že to je posloupnost **geometrická** s kvocientem $q = \dfrac{3}{2}$
- Posloupnost hodnot jeho **blaženosti** by byla $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Vidíme, že je to posloupnost **aritmetická** s diferencí $q = 1$.

Nyní si tento příklad zpracujeme obecně: **Majetek** si označíme jako p (**podnět**) a **blaženost** jako v (**vjem**). Počáteční hodnota majetku byla $p_0 = 16$. Počáteční blaženost byla $v_0 = 0$. Přírůstek majetku označíme jako Δp. Přírůstek blaženosti označíme jako Δv.

Zjistili jsme, že pro to, aby přírůstky blaženosti byly pořád stejné, nestačí stejné přírůstky majetku. Stejné musí být **procentuální** přírůstky majetku. V našem případě musely být procentuální přírůstky 50 %. Byla-li hodnota majetku třeba $p = 24$, musel být přírůstek 50 % z 24, což je $\Delta p = 12$. Procentuální přírůstek je obecně vyjádřen jako $\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%$. Samotný poměr $\frac{\Delta p}{p}$ se nazývá **relativní** přírůstek. Náš výchozí poznatek tedy je:

Věta 6: Fechnerův zákon – formulace 1

$$\text{Má-li být } \Delta v \text{ konstantní}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{musí být } \frac{\Delta p}{p} \text{ konstantní}$$

Označme první konstantu k_1 a druhou k_2. Dostáváme tedy soustavu

$$\Delta v = k_1 \tag{13}$$
$$\frac{\Delta p}{p} = k_2 \tag{14}$$

Vydělením rovnic dostáváme

$$\Delta v : \frac{\Delta p}{p} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\Delta v = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{\Delta p}{p}$$

Označme podíl obou konstant jako novou konstantu k.

Dostáváme

Věta 7: Fechnerův zákon – formulace 2

$$\boxed{\Delta v = k \cdot \frac{\Delta p}{p}} \tag{15}$$

To znamená, že **absolutní přírůstek blaženosti** je *přímo úměrný* **relativnímu přírůstku majetku**.

Tento vztah lze také upravit na tvar:

Věta 8: Fechnerův zákon – formulace 3

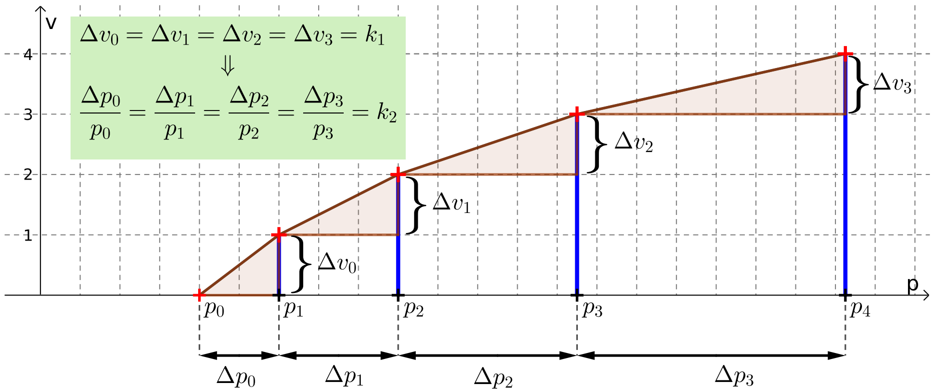
$$\boxed{\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{k}{p}} \tag{16}$$

Respektive pro elementární přírůstky:

$$\boxed{\frac{dv}{dp} = \frac{k}{p}} \tag{17}$$

To znamená, že **rychlost růstu blaženosti** je *nepřímo úměrná* majetku.

Čím víc máme prachů, tím pomaleji narůstá naše blaženost. To je krástně vidět i z obrázků 12 a 13, kde směrnice spojnic bodů grafu s rostoucím p klesá.



Obr. 12

Nyní si ověříme naše pozorování z příkladu, že posloupnost hodnot majetku $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \dots$ je vskutku **geometrická**. Vezmeme dvě libovolné po sobě jdoucí hodnoty této posloupnosti a určíme jejich poměr:

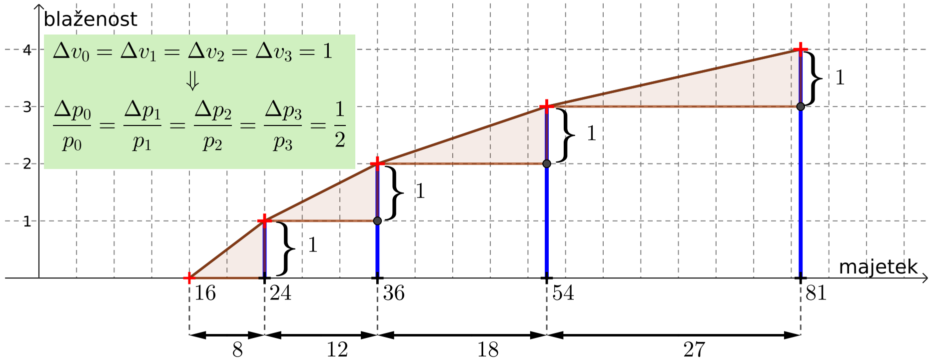
$$\frac{\Delta p_{n+1}}{\Delta p_n} = \frac{p_n + \Delta p_n}{p_n} = 1 + \frac{\Delta p_n}{p_n} = 1 + k_2 = \text{konstanta}$$

Vidíme, že se opravdu jedná o **geometrickou** posloupnost s kvocíkem $q = k_2 + 1$. (Kontrola: $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$)

Věta 9: Fechnerův zákon – formulace 4

Roste-li **majetek** posloupností **geometrickou**, roste **blaženost**, bohužel kužel, jen posloupností **aritmetickou**!

Nyní již máme asi podezření, že vztah mezi v a p bude logaritmický. Proč? Za prvé grafanec v obrázku 12 tak vypadá a za druhé víme, že posloupnost geometrická na ose x a aritmetická na ose y souvisejí s logaritmickou funkcí. Takže si to ověříme. Vezmeme vztah 17, zintegrujeme a dostáváme:



Obr. 13

$$v = \int \frac{k}{p} dp$$
$$v = k \ln p + C$$

Integrační konstantu C určíme snadno – pro $p = p_0$ (počáteční prachy Josefa Kajetána Molitána) je $v = 0$ (nulová blaženost):

$$0 = k \ln p_0 + C$$
$$C = -k \ln p_0$$
$$v = k \ln p - k \ln p_0$$
$$v = k(\ln p - \ln p_0)$$
$$v = k \cdot \ln \frac{p}{p_0}$$

A je to tady:

Věta 10: Fechnerův zákon – formulace 5

$$\boxed{v = k \cdot \ln \frac{p}{p_0}} \tag{18}$$

- **Blaženost** závisí na **majetku logaritmicky**.

Neboli:

- Roste-li **majetek aritmetickou** posloupností, roste **blaženost** jen **logaritmickou** posloupností.

Rozbor vztahu 18: Dosadíme-li za $p = p_0$, dostáváme $v = k \cdot \ln 1 = 0$. Tedy při počáteční hodnotě majetku p_0 je blaženost v nulová.

Jaký význam má konstanta k? Ta je volitelná a umožňuje nám nastavit si **citlivost** daného subjektu – jak citlivě reaguje jeho blaženost (vjem) na nárůst majetku (podnět).

- *Siddha.* Kdo je absolutně odpoután od majetku, má tuto konstantu nulovou. Ať najde jakoukoli částku, s jeho blažeností to nic neudělá. Ta zůstává furt und porád konstantní – z hlediska obyčejného člověka možná nulová, ale on je ve stavu skutečné Blaženosti, která je slovy nepopsatelná a čísly nevyčíslitelná!

- *Normální člověk.* V našem příkladě jsme si stanovili, že když majetek vzrostl z $p_0 = 16$ na hodnotu $p_1 = 24$ (tedy $p_1 = \frac{3}{2}p_0$ – kvocík naší GP byl $\frac{3}{2}$), vzrostla blaženost z hodnoty **0 na 1** (viz obr.13) Vypočtěme hodnotu konstanty k:

$$p = \frac{3}{2}p_0 \Rightarrow v = 1$$

$$1 = k \cdot \ln \frac{\frac{3}{2}p_0}{p_0}$$

$$1 = k \cdot \ln \frac{3}{2}$$

$$k = \frac{1}{\ln \frac{3}{2}}$$

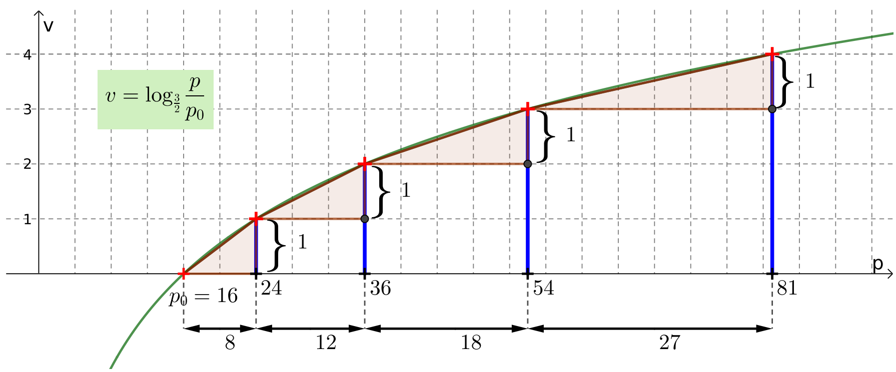
Frknemež-li hodnotu konstanty k do 18, dostáváme:

$$v = \frac{\ln \dfrac{p}{p_0}}{\ln \frac{3}{2}}$$

Vidíme, že můžeme od přirozeného logaritmu přejít k logaritmu o základu $\frac{3}{2}$.

$$\boxed{v = \log_{\frac{3}{2}} \frac{p}{p_0}} \qquad (19)$$

Potom grafanec závislosti blaženosti na majetku vypadá tak, jak vokazuje obr. 14, což je v souladu s obr.13.



Obr. 14

- *Chamtivec.* Ten je dejme tomu dvakrát citlivější na prachy než normální člověk, takže když mu vzroste majetek z $p_0 = 16$ na $p_1 = 24$, vzroste mu blaženost z hodnoty **0 na 2**! Jeho konstanta k bude tedy dvojnásobná než u normálního člověka:

$$k = \frac{2}{\ln \frac{3}{2}}$$
$$v = 2 \cdot \frac{\ln \dfrac{p}{p_0}}{\ln \frac{3}{2}}$$

A odtud chamtivec bude mít vzorec pro blaženost tento:

$$\boxed{v = 2 \cdot \log_{\frac{3}{2}} \frac{p}{p_0}} \tag{20}$$

Předcházející 3 typy lidí můžeme krástně sledovat v apletu https://ggbm.at/y2mtuwmj

- Dejme tomu, že si nyní řekneme, že chceme, aby vzrostla blaženost z 0 na 1 při vzrůstu majetku z p_0 na $2p_0$. Snadno opět vypočteme hodnotu konstanty k:

$$p = 2p_0 \Rightarrow v = 1$$
$$1 = k \cdot \ln \frac{2p_0}{p_0}$$
$$1 = k \cdot \ln 2$$
$$k = \frac{1}{\ln 2}$$

Nyní frkněmež hodnotu konstanty k do 18:

$$v = \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln 2}$$

Vidíme, že můžeme od přirozeného logaritmu přejít k logaritmu o základu 2.

$$\boxed{v = \log_2 \frac{p}{p_0}} \tag{21}$$

Tento vztah budeme používat u zvuku (důvod viz dále).