

Problemas – Tema 2

CCSS Problemas resueltos - 2 - ideas felices para resolver integrales inmediatas

1. Calcula:

- a) $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$ b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$ c) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$
- d) $\int \sqrt{8-x} dx$ e) $\int \frac{1}{x^3} dx$ f) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$
- g) $\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x} dx$ h) $\int x \cos(x^2) dx$ i) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

a) Mostramos, en los siguientes apartados, una serie de atajos bastante comunes a la hora de integrar.

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

Siempre que tengamos la integral de un cociente, es buena costumbre comprobar si el numerador es la derivada del denominador. Así, al integrar, aparecerá un logaritmo.

$$\frac{d}{dx}[1+x^4] = 4x^3 \rightarrow \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln|1+x^4| + C$$

En este caso, aplicar valor absoluto al argumento del logaritmo es redundante porque la expresión $(1+x^4)$ siempre devuelve un valor positivo.

b) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

Cuando aparezca una raíz en el denominador, es práctico comprobar si el numerador es la derivada del discriminante de la raíz.

$$\frac{d}{dx}[1+e^x] = e^x \rightarrow 2 \int \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} dx = 2\sqrt{1+e^x} + C$$

c) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$

Al integrar un producto de dos términos, podemos pensar en la derivada de la potencia de una función.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)] = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[(\sin(x))^2] = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \rightarrow \frac{1}{2} \int 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) + C$$

d) $\int \sqrt{8-x} dx$

En las raíces de un polinomio de grado uno, es útil ver la raíz como una potencia de índice fraccionario.

$$\int \sqrt{8-x} dx = \int (8-x)^{1/2} dx$$

Y volvemos a recordar la forma de la derivada de una potencia.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)] = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[(8-x)^{3/2}] = \frac{3}{2} \cdot (8-x)^{1/2} \cdot (-1)$$

$$\frac{-2}{3} \int \frac{-3}{2} (8-x)^{1/2} dx = \frac{-2}{3} (8-x)^{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3} (8-x) \sqrt{8-x} + C$$

e) $\int \frac{1}{x^3} dx$

Si hay monomio en el denominador, es práctico poner el monomio con exponente negativo en el numerador.

$$\int x^{-3} dx$$

Y volvemos a recordar la forma de la derivada de una potencia:

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)] = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[x^{-2}] = -2 \cdot x^{-3}(x) \cdot 1 \rightarrow \frac{-1}{2} \int -2 x^{-3} dx = \frac{-1}{2} x^{-2} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + C$$

f) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Al tener logaritmo y la derivada del logaritmo, pensamos nuevamente en la derivada de una potencia.

$$\frac{d}{dx}[f^n(x)] = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\ln^2(x)] = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{2} \int 2 \cdot \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln^2(x) + C$$

g) $\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x} dx$

Cuando en el numerador aparecen muchos monomios sumando/restando, y en el denominador un solo monomio, es práctico romper la integral en la suma/resta de diferentes integrales.

$$\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x} dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{x^2}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) dx = \int dx + \int x dx - \int x^{-1/2} dx = x + \frac{x^2}{2} - 2x^{1/2} = x + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x} + C$$

h) $\int x \cos(x^2) dx$

Encontramos el coseno de una función, que está multiplicado por la derivada de esa función.

$$\frac{d}{dx}[\sin(x^2)] = \cos(x^2) \cdot 2x \rightarrow \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sin(x^2) + C$$

i) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

Escribimos la raíz como exponente fraccionario. Y la escribimos en el numerador cambiando el signo.

$$\int x^{-1/4} dx = \frac{4}{3} x^{3/4} + C$$

2. Resuelve.

$$a) \quad I = \int \frac{4x-1}{(2x^2-x+1)^6} dx = \int (4x-1)(2x^2-x+1)^{-6}$$

$$I = \frac{-1}{5} \int -5(4x-1)(2x^2-x+1)^{-6} = \frac{-1}{5} (2x^2-x+1)^{-5} + C$$

$$I = \frac{-1}{5} (2x^2-x+1)^{-5} + C = \frac{-1}{5 \cdot (2x^2-x+1)^5} + C$$

$$b) \quad \int 7\left(x+\frac{3}{2}\right)^5 dx = 7 \cdot \int \left(x+\frac{3}{2}\right)^5 dx = 7 \cdot \frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^6}{6} + C$$

$$c) \quad \int \frac{10x+5}{x^2+x+7} dx = \int \frac{5(2x+1)}{x^2+x+7} dx = 5 \cdot \int \frac{2x+1}{x^2+x+7} dx = 5 \cdot \ln|x^2+x+7| + C$$

$$d) \quad \int 7^{2x} dx = \int 49^x dx = \frac{49^x}{\ln(49)} + C$$

$$e) \quad I = \int \frac{x^2+3}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1+2}{x^2+1} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{2}{1+x^2} dx$$

$$I = \int dx + 2 \operatorname{arctg}(x) = x + 2 \operatorname{arctg}(x) + C$$

$$f) \quad \int \frac{\cos(7x)}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \cos(7x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \int 7 \cdot \cos(7x) dx = \frac{\operatorname{sen}(7x)}{14} + C$$

3. Calcula las siguientes integrales indefinidas inmediatas:

a) $\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{x}{2} + C$

b) $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \left(\frac{-1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{-1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{x}{2} + C$

c) $\int 7 \cdot \cos(x) \cdot e^{\operatorname{sen} x} dx = 7 \cdot e^{\operatorname{sen} x} + C$

e) $\int \frac{e^x}{e^x + 5} dx = \ln|e^x + 5| + C$

f) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{-1}{x} + \operatorname{arccotg}(x) + C$

4. Resuelve $\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}} dx$.

$$I = \int \left(\frac{e^{4x}+3}{e^{3x}} \right) dx = \int \left(\frac{e^{4x}}{e^{3x}} \right) dx + \int \left(\frac{3}{e^{3x}} \right) dx = \int e^x dx + \int (3e^{(-3x)}) dx = e^x - \int (-3e^{(-3x)}) dx$$

$$I = e^x - e^{(-3x)} + C$$

5. Resuelve $\int \frac{3^x}{1+3^x} dx$

$$\int \frac{3^x}{1+3^x} dx = \frac{1}{\ln(3)} \int \frac{\ln(3) \cdot 3^x}{1+3^x} dx = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln|1+3^x| + C$$