LK 4. Invers Matriks

Matriks Identitas.

Matriks persegi yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1 dan elemen lain bernilai 0 dinamakan sebagai matriks identitas yang biasanya dinotasikan dengan I.

Contoh matriks identitas:

$$(1), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Jika a_{ij} menyatakan elemen baris ke-i, kolom ke-j pada matriks A, nyatakan elemen diagonal utama secara matematis.
   Jawab:

2. Selidiki sifat matriks identitas.
   a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$
   b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$
   c. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$
   d. Buatlah sebarang matriks yang bisa dikalikan dengan matriks Identitas 3×3 dan tentukan hasil perkaliannya.
   Jawab:

   e. Jelaskan dengan kata-kata sendiri, sifat dari matriks identitas
   Jawab:

Masalah 1:

Untuk memahami konsep invers matriks selesaikanlah permasalahan di bawah ini. Kamu dapat menyelesaikan masalah ini dengan menggunakan persamaan linear dua variabel.

Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Tentukanlah matriks B jika

a. $AB = I$ b. $BA = I$

Penyelesaian:

1. $AB = I$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a + c & _____ \\ _____ & _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berdasarkan persamaan matriks di atas diperoleh 4 buah persamaan, yaitu

$3a + c = 1$ (1)

_____ (2)

_____ (3)

_____ (4)

Tentukan nilai a, b, c dan d dengan eliminasi atau substitusi,

Sehingga diperoleh

$B = \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix}$

2. $BA = I$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a + 2b & _____ \\ _____ & _____ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Berdasarkan persamaan matriks di atas diperoleh 4 buah persamaan, yaitu

$3a + 2b = 1$ (1)

_____ (2)

_____ (3)

_____ (4)

Tentukan nilai a, b, c dan d dengan eliminasi atau substitusi,

sehingga

$B = \begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix} =$

Dari dua eksplorasi di atas berlaku $AB = BA = I$, maka matriks A adalah invers dari B dan ditulis $A = B^{-1}$. Demikian juga sebaliknya, B merupakan invers dari matriks A, sehingga $B = A^{-1}$, dan dikatakan matriks A dan B saling invers.

Masalah 2:

Jika pada masalah 1 disajikan matriks yang sudah berisi bilangan, sekarang akan dicari invers dalam bentuk umum dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dengan memisalkan $A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

$$A^{-1}A = I$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} pa + qc = 1 & (1) \\ pb + qd = 0 & (2) \\ ra + sc = 0 & (3) \\ rb + sd = 1 & (4) \end{cases}$$

Selanjutnya p, q, r, dan s akan dinyatakan dalam a, b, c, dan d.

1. Dari (1) dan (2), akan dieliminasi p untuk mendapatkan q,

$$\left.\begin{array}{ll} pa + qc = 1 & \left|\times b\right| \\ pb + qd = 0 & \left|\times a\right| \end{array}\right.\quad \left.\begin{array}{r} pab + qbc = b \\ pab + qad = 0 \\ \hline (___ - ___)q = b \end{array}\right\} - \text{ diperoleh } q = \frac{___}{ad-bc} \qquad (5)$$

2. Dari (1) dan (2), dieliminasi q, diperoleh p

$$\left.\begin{array}{ll} pa + qc = 1 & \left|\times d\right| \\ pb + qd = 0 & \left|\times c\right| \end{array}\right.\quad \left.\begin{array}{r} pad + qcd = d \\ pbc + qcd = 0 \\ \hline (___ - ___)p = d \end{array}\right\} - \text{ diperoleh } q = \frac{___}{ad-bc} \qquad (6)$$

3. Dari (3) dan (4), eliminasi r, diperoleh s.

$$\left.\begin{array}{ll} ra + sc = 0 & \left|\times __\right| \\ rb + sd = 1 & \left|\times __\right| \end{array}\right.\quad \left.\begin{array}{r} ___ + scd = 0 \\ ___ + scd = c \\ \hline (___ - ___)r = -c \end{array}\right\} - \text{ diperoleh } r = \frac{___}{ad-bc} \qquad (7)$$

4. Dari (3) dan (4), eliminasi s, diperoleh r.

$$\left.\begin{array}{ll} ra + sc = 0 & \left|\times __\right| \\ rb + sd = 1 & \left|\times __\right| \end{array}\right.\quad \left.\begin{array}{r} ___ + ___ = 0 \\ ___ + ___ = __ \\ \hline (___ - ___)s = __ \end{array}\right\} - \text{ diperoleh } s = \frac{___}{ad-bc} \qquad (8)$$

5. Dari (5), (6), (7), dan (8), susunlah rumus umum A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{___}{ad-bc} & \frac{___}{ad-bc} \\ \frac{___}{ad-bc} & \frac{___}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} ___ & ___ \\ ___ & ___ \end{pmatrix}$$

6. Apa yang terjadi terhadap penyelesaian $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$ jika $|A| = 0$?

   Jawab:_____

7. Apa syarat agar sebuah matriks persegi memiliki invers?

   Jawab: _____

8. Misalkan A adalah matriks non singular*) berordo 2×2. Buktikan bahwa $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$.

   Bukti:

9. Cobalah masing-masing siswa membuat sebarang dua matriks non singular A dan B berordo 2×2. Selidiki nilai $(AB)^{-1}, A^{-1}B^{-1}$, dan $B^{-1}A^{-1}$. Bandingkan hasil yang diperoleh. Bandingkan juga dengan hasil yang diperoleh teman-temanmu. Buatlah dugaan terkait hubungan antara $(AB)^{-1}$ dan $B^{-1}A^{-1}$.

   Jawab:

10. Carilah dari berbagai sumber prosedur mencari invers matriks berordo 3×3, pelajari, kemudian presentasikan di hadapan teman-temanmu.

*) *matriks non singular merupakan matriks persegi yang determinannya tidak nol.*