

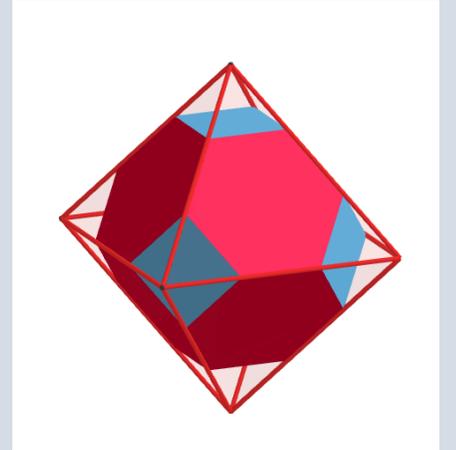
Hans-Jürgen Elschenbroich, Rudolf Sträßer

Raumgeometrie mit digitalen Werkzeugen

Vortrag auf dem MNU Bundeskongress 2025, Bochum

- 1 Warum Raum-Geometrie?**
- 2 Von der Ebene in den Raum**
- 3 Geometrie IM Raum**
- 4 Aus dem Raum in die Ebene**
- 5 Software für die (Raum)Geometrie**
- 6 3D-Druck**
- 7 Ausblick**

www.geogebra.org/m/f7ha4ftw



1.1 Warum RAUM-Geometrie?

Erfassung des Raumes

„Geometrie auf der niedrigsten, der nullten Stufe ist [...] die Erfassung des Raumes, [...] in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennenlernen muss, den es erforschen und erobern muss, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können“ (Freudenthal 1973, S. 376 f.)

Geometrie heißt übersetzt **Vermessung der Erde**.

Also: räumliche Geometrie müsste unterrichtet werden.

Die Meraner Reform postulierte zwei spezielle Aufgaben:

- „die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ und
- „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ (Gutzmer 1908, S. 104)

Beides kommt im räumlichen Geometrie-Unterricht mit 3D-DGS zusammen!

1.2 Geometrieunterricht (in der Ebene)

Eine **axiomatische Fundierung** des Geometrie-Unterrichtes in allgemeinbildenden Schulen ist mindestens **für die Lernenden ungeeignet**.

Gegenwärtig in weiterführenden Schulen: Geometrie \approx ebene Geometrie.

Die Probleme in der Ebene sind oft einfacher als im Raum und die Handhabung entsprechender Werkzeuge ist auch einfacher.

Einsatz von Zirkel und Lineal in der ebenen Geometrie ist einfach verglichen mit den oft komplexen Verfahren der Geometrie für 3D-Probleme.

(Elschenbroich & Sträßer, 2024a, S. 8)

Was ändert sich mit dem Einsatz digitaler Werkzeuge im Raumgeometrie-Unterricht?

1.3 Raumgeometrie in der allgemeinbildenden Schule

Früher: **Rechnen und Raumlehre** in der Volksschule.

Für die allgemeinbildende Schule kann man heute feststellen:

„Hier beschränkt sich in der Sekundarstufe I die Raumgeometrie weitgehend auf das Rechnen mit Formeln (insbesondere für Oberfläche und Volumen), während in der Analytischen Geometrie der Sekundarstufe II das vektorielle Rechnen mit Geraden und Ebenen, die ‚Hieb-und-Stich-Aufgaben‘, dominieren.“
(Elschenbroich & Sträßer, 2024, S. 2)

Deskriptive Geometrie in Deutschland?

Geometrie in Österreich?

1.4 Das Prinzip der Bewegung

„Nach dem **Prinzip der Bewegung** folgen als Raumformen Punkt, Linie, Fläche und Körper: die Linie als Spur des bewegten Punktes [...], die Fläche als Bahn einer Linie [...] und die Körper als Wege einer Fläche“. (Engel 1929, S. 26)

In der Sprache heutiger 3D-DGS:

Spur von Punkt, Linie, Fläche, ggf. Ortslinie und Ortsfläche.

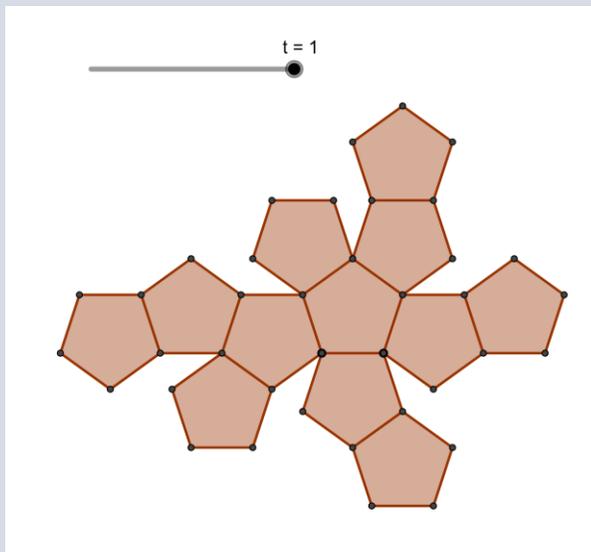
1.5 Raum und Ebene

Besonderes Augenmerk auf das Spannungsverhältnis von Raum und Ebene.
Raum und Ebene sind nicht voneinander getrennt.

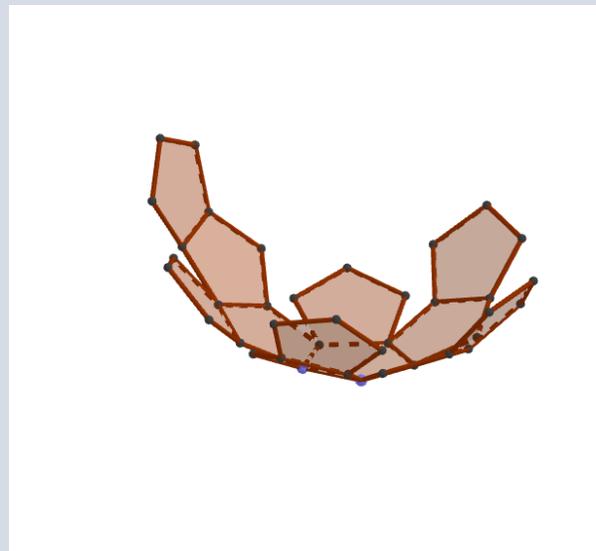
- Wie kommt man aus der Ebene in den Raum?
Falten (Netze), Extrudieren, Rotieren.
- Wie kommt man aus dem Raum in die Ebene?
Bilder, Zeichnung, Netze, Projizieren.
- Wie findet man Ebenes im Raum?
Schnitte durch Kegel, Würfel, Kugel, ...

2.1 Von der Ebene in den Raum I : Falten, Netz

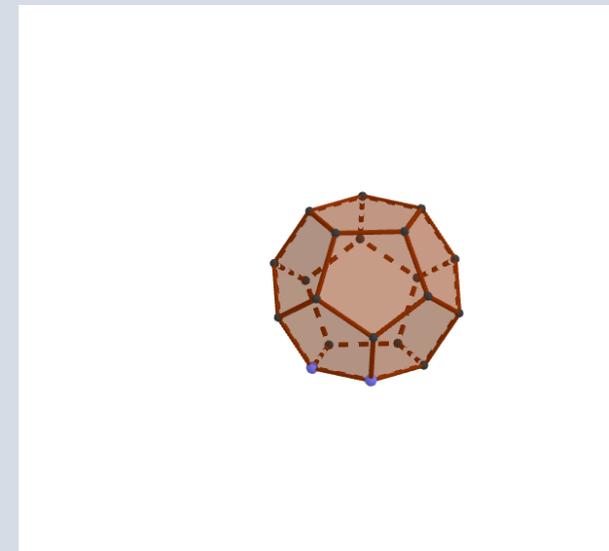
Vom Netz zum Körper (und umgekehrt) am Beispiel Dodekaeder.
Falten durch Ziehen an Schieberegler t .



2D-Ansicht



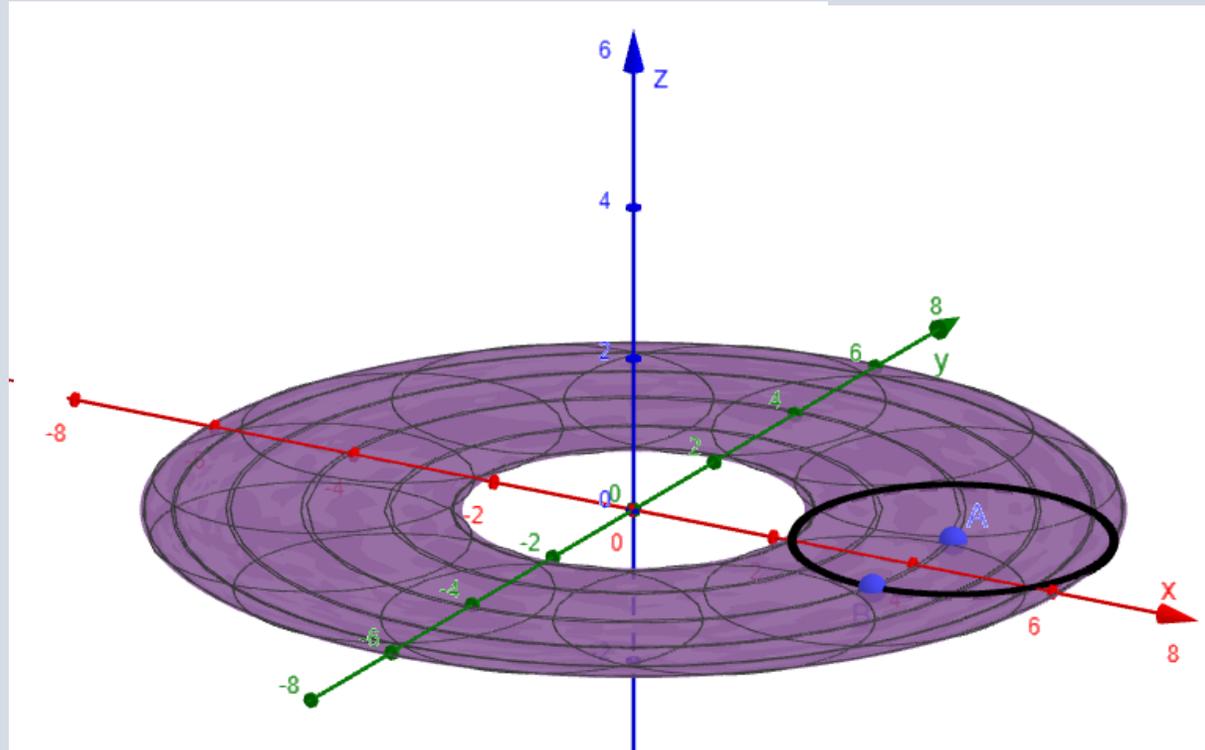
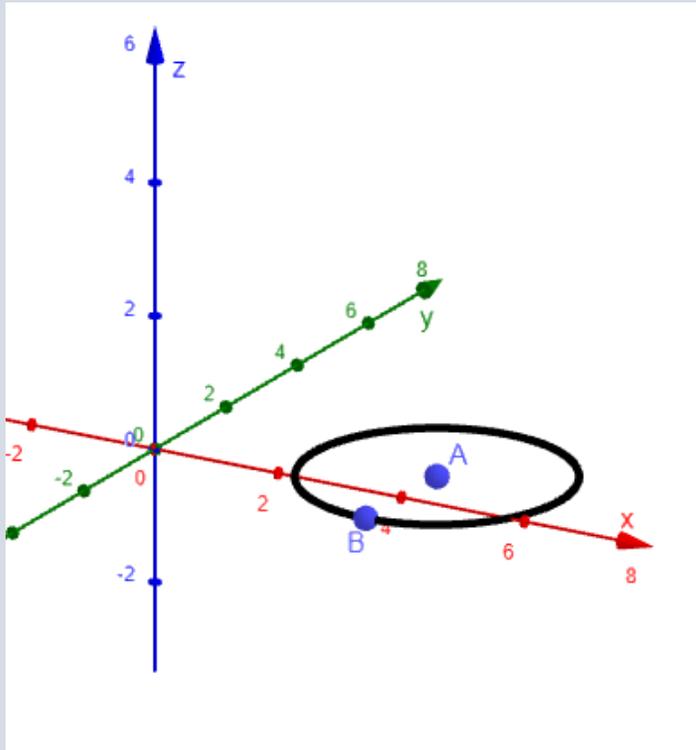
3D-Ansicht (1)



3D-Ansicht (2)

2.2 Von der Ebene in den Raum IV: Rotieren

Rotation eines Kreises in der xy -Ebene um die x -Achse, y -Achse, z -Achse.
Euklid: ‚Herumführen‘ (11. Buch).

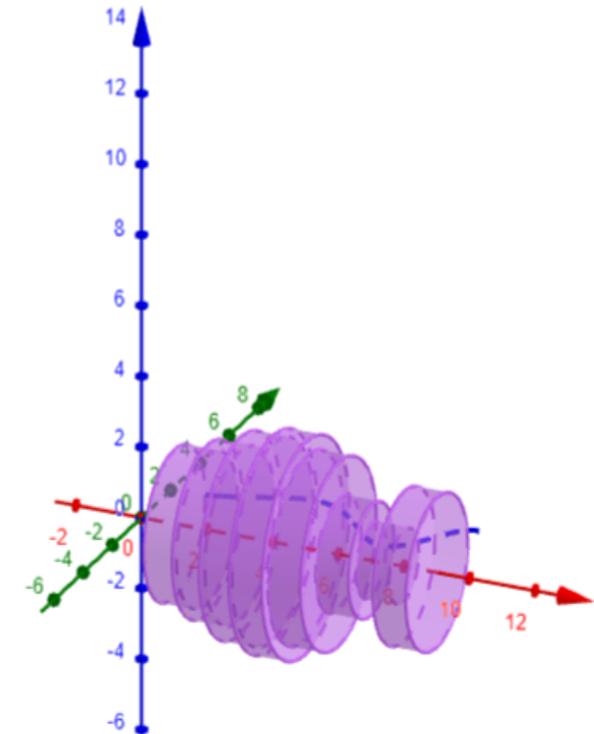
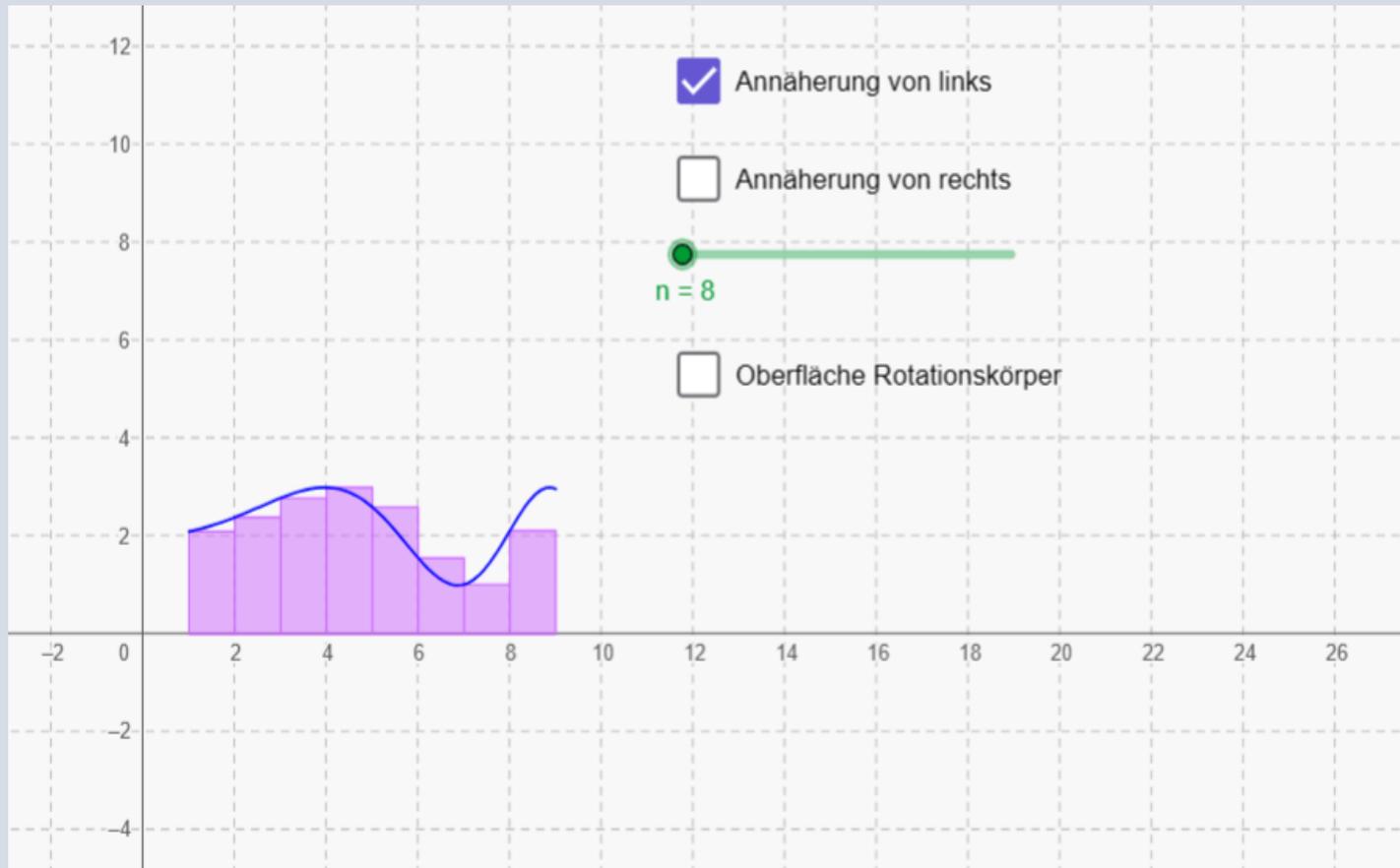


2.3 Exkurs: Volumen von Rotationskörpern in der Analysis

Rotation einer Fläche zwischen Graph f und der x -Achse um die x -Achse.

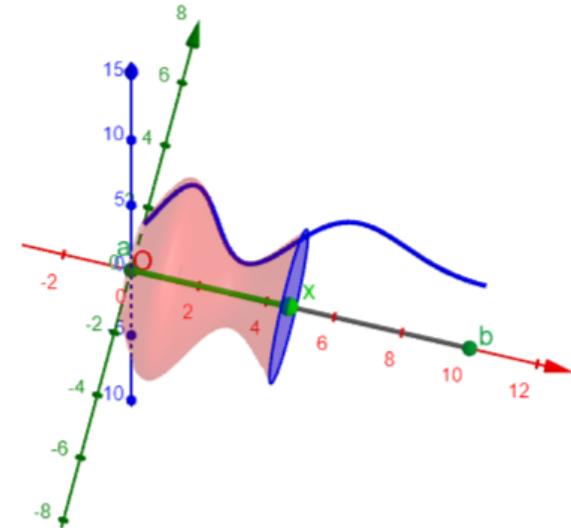
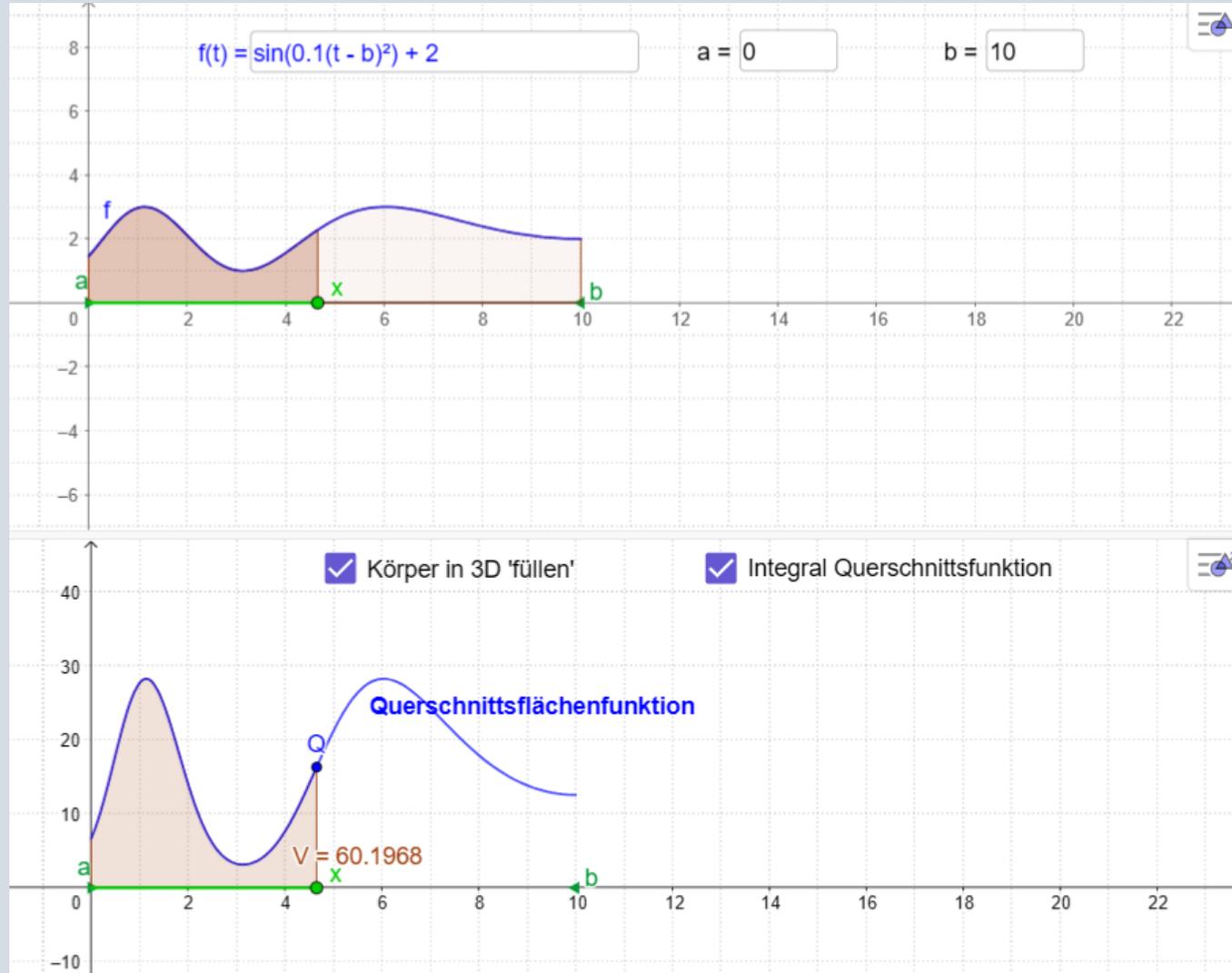
Die Anzahl der Rechteckstreifen kann mit dem Schieberegler n verändert werden.

In der Approximation rotieren in dieser Aktivität Linkssummen- und Rechtssummen-Rechtecke.

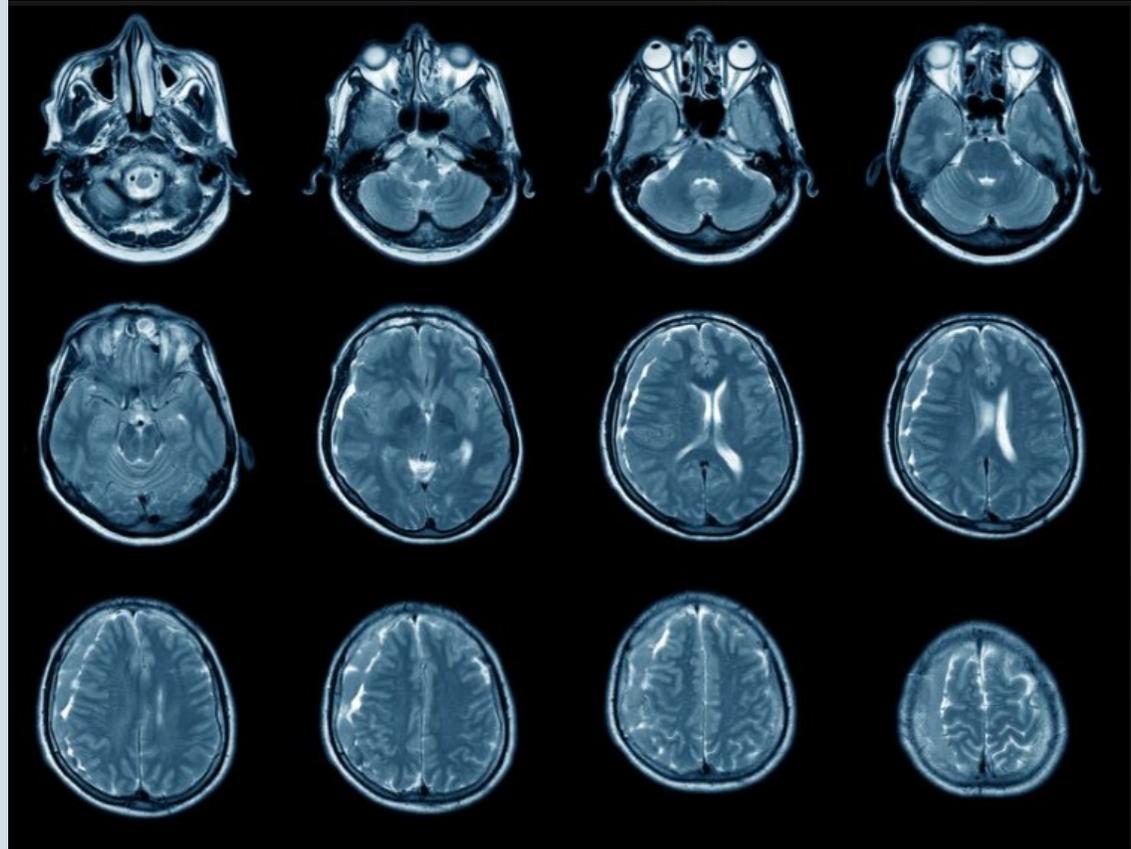


2.4 Exkurs: Integration über die Querschnittsfläche

Integration der Querschnittsfläche in den Grenzen von 0 bis h.



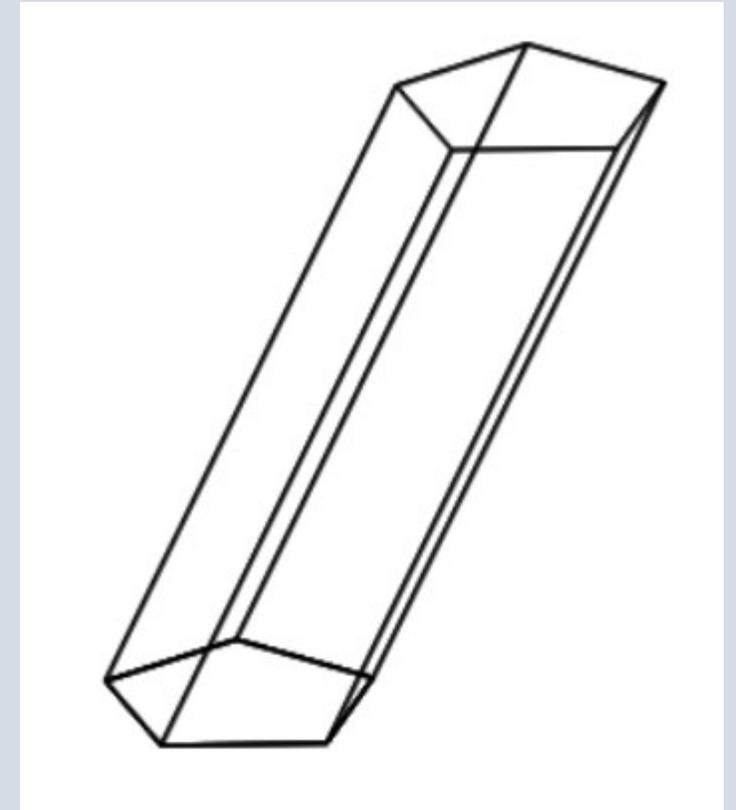
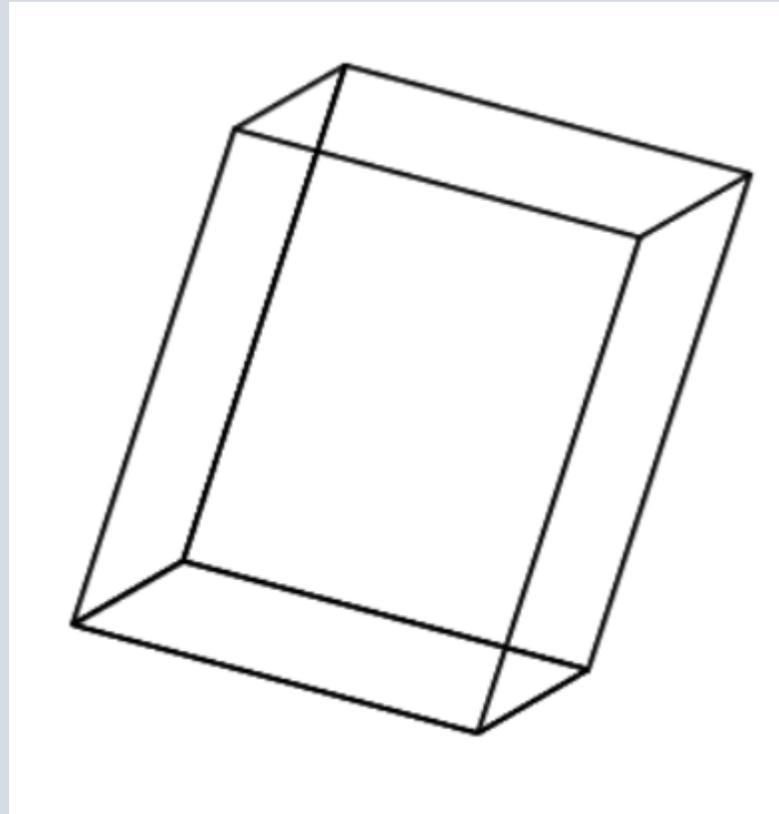
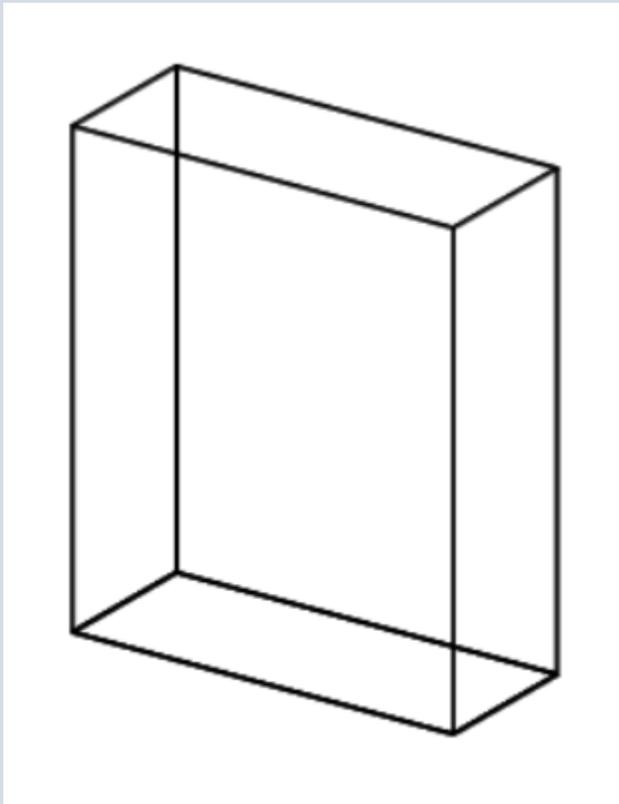
2.5 Exkurs Raum und Ebene: MRT



Vom räumlichen Objekt (Schädel) über (virtuelle) Schnitte zum räumlichen Modell.

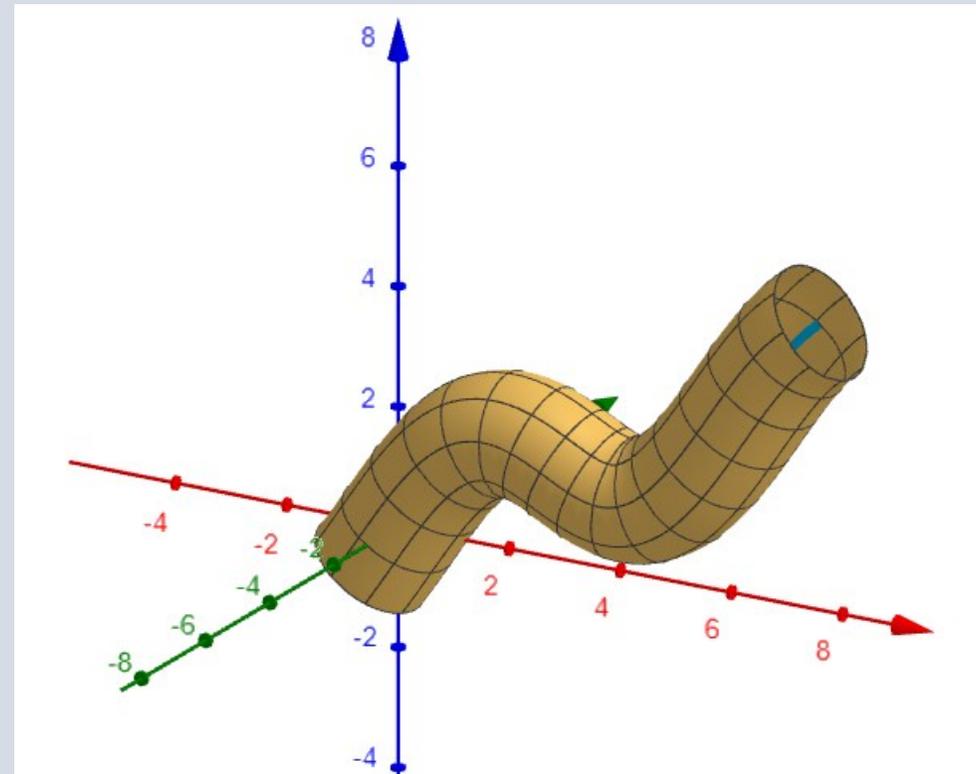
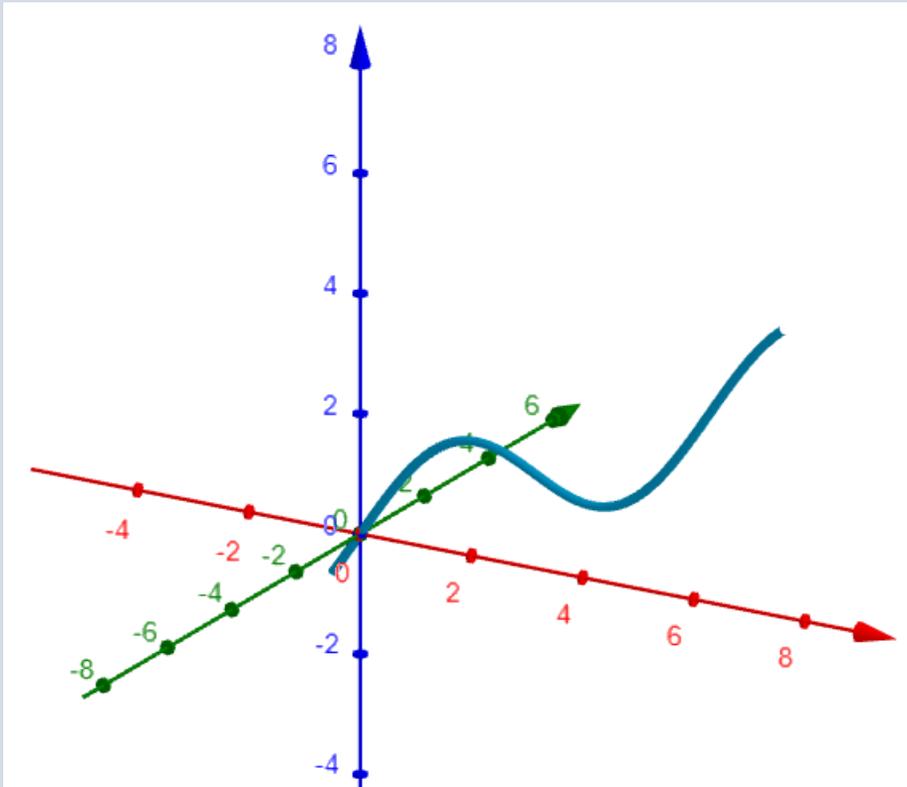
2.6 Von der Ebene in den Raum II: Extrudieren

Polygone können z.B. zu einem Prisma extrudiert werden (orthogonal, schräg):



2.7 Exkurs: Von der Ebene in den Raum III: Extrudieren

Weg eines Kreises orthogonal zu einer Kurve (z. B. Siphon):



2.8 Von der Ebene in den Raum mit CAD

Hier geht in verschiedenen Programmen
Verschiedenes.

Insbesondere interessant:

CAD-Abkömmlinge

Als ein Beispiel:

Aus GAM, Katalog von 3D-Objekten:

Keil

Würfel spezial

reguläre Polyeder

Dächer

Drehparaboloid

Torus

Kurven $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Drehflächen

Flächen $z = f(x,y)$

Flächen $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$

allg. Zylinder- (Prismen-) flächen

allg. Kegel- (Pyramiden-) flächen

Schiebflächen

Schraubflächen

Profilflächen

Regelfläche, Konoid

HP - Fläche

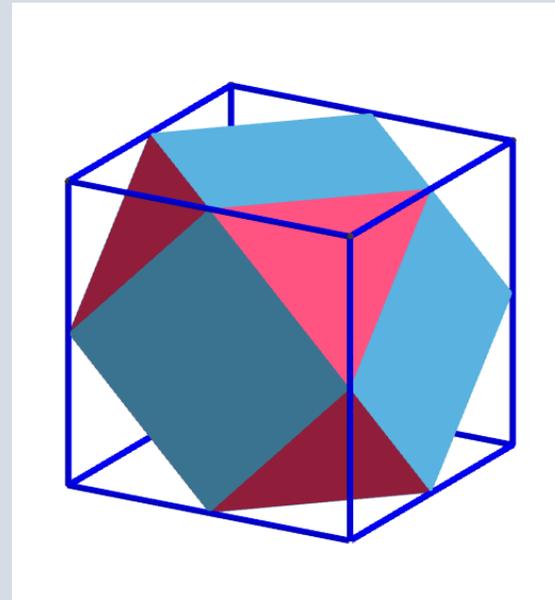
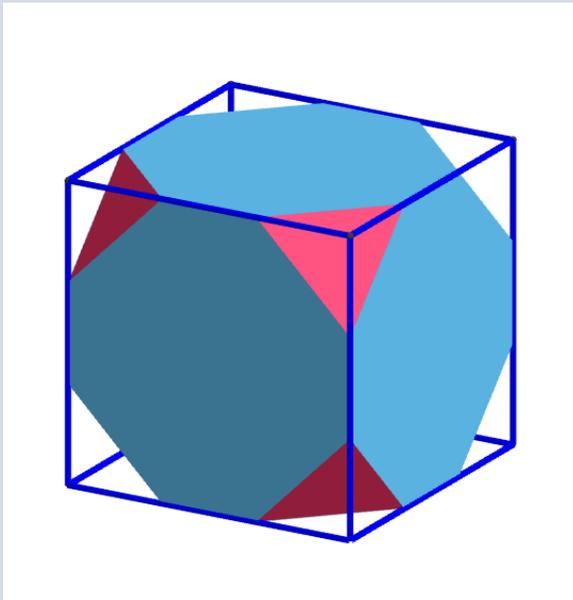
Regelfläche, Torse

Regelfläche, Verbindungstorse

Freiformflächen

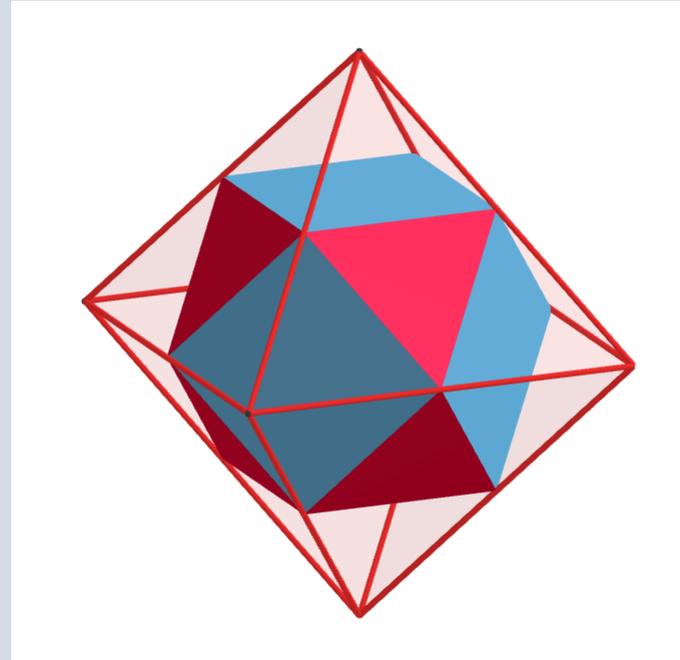
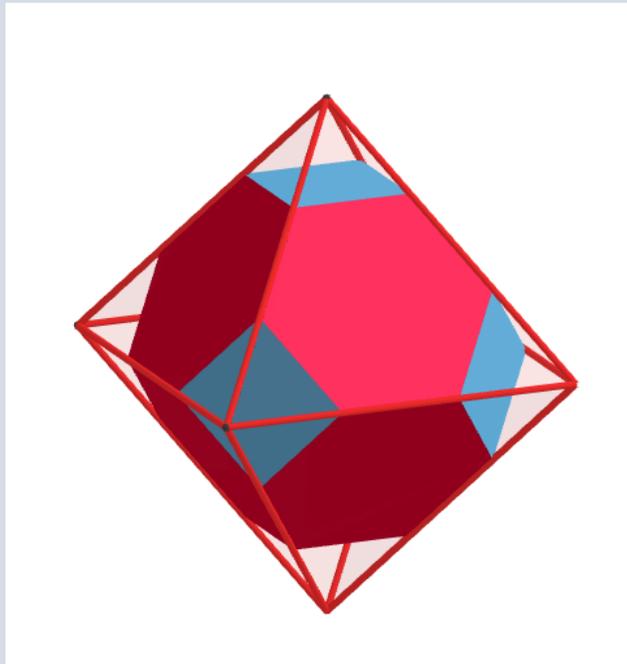
3.1 Exkurs: Metamorphose eines Würfels

Dynamisch vom Würfel über den Würfelstumpf zum Kuboktaeder.

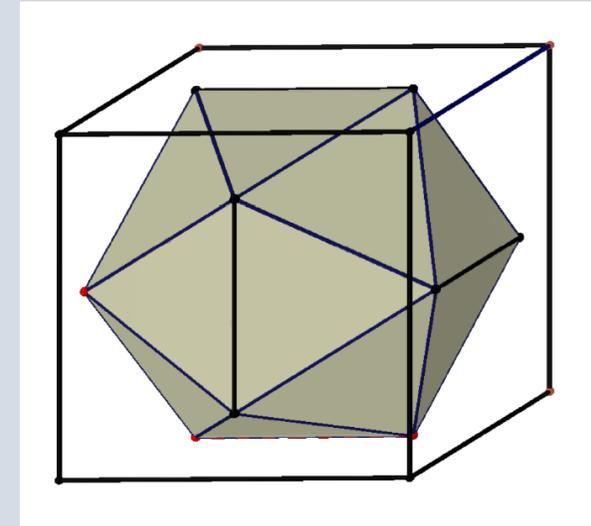
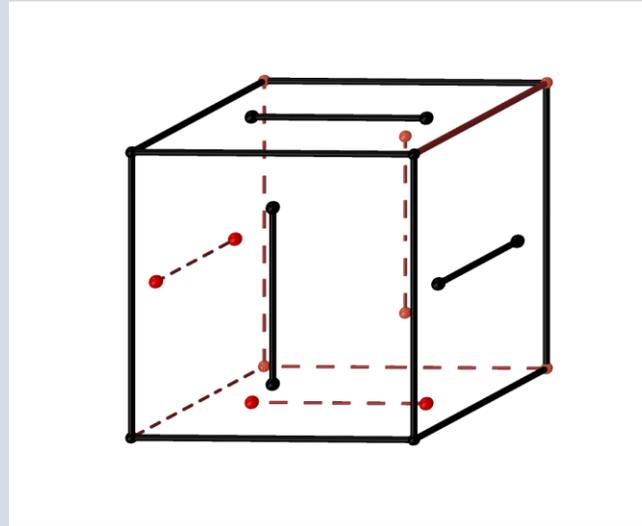
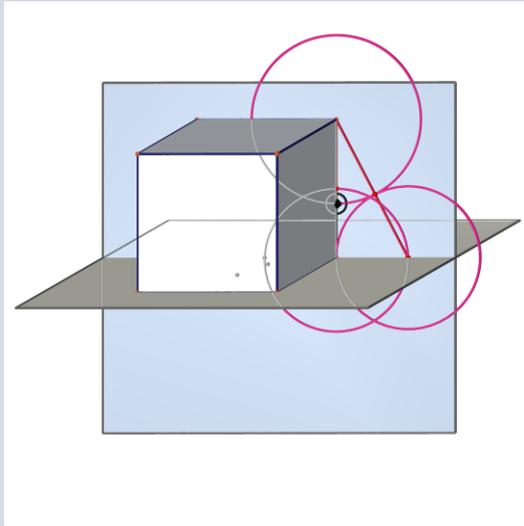


3.2 Metamorphose eines Oktaeders

Dynamisch vom Oktaeder über den Oktaederstumpf zum Kuboktaeder, siehe auch ‚Oktaeder der Grauens‘ im NRW-Abitur 2007.



3.3 Exkurs: Konstruktion eines Ikosaeders aus einem Würfel



Konstruktion mit Cabri 3D: R. Sträßer

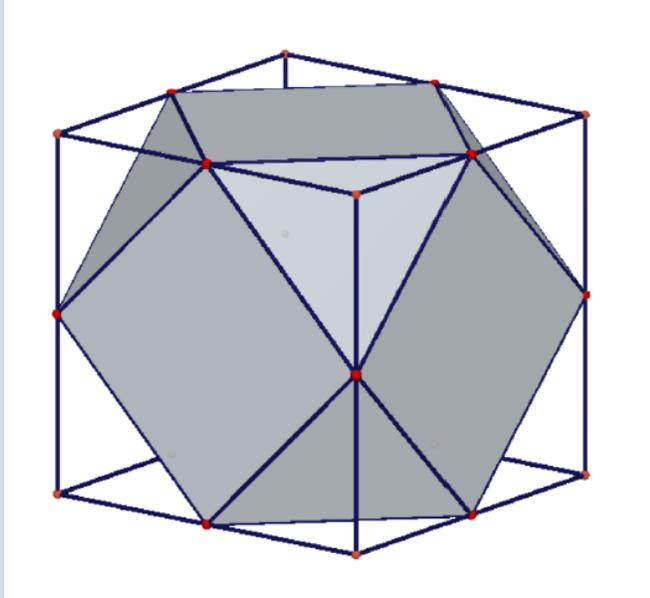
3D Druck: R. Hrach.

Foto: © Michael Wodak/MedizinFotoKöln

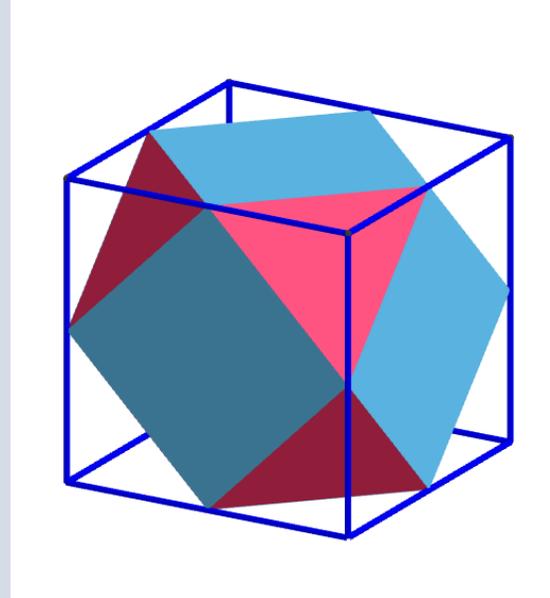


3.4 Konstruktionen eines Kuboktaeders aus einem Würfel

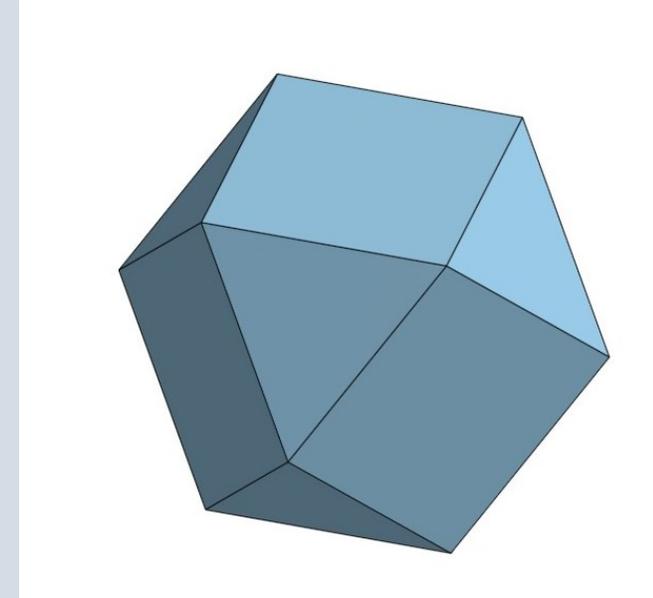
Würfel im Kantenmodell, Mittelpunkte der Kanten, zu gleichseitigen Dreiecken und Vierecken verbinden.



Cabri 3D: R. Sträßer.
Konvexe Hülle!



GeoGebra 3D: H.-J. Elschenbroich.
Nur als Flächenmodell möglich.

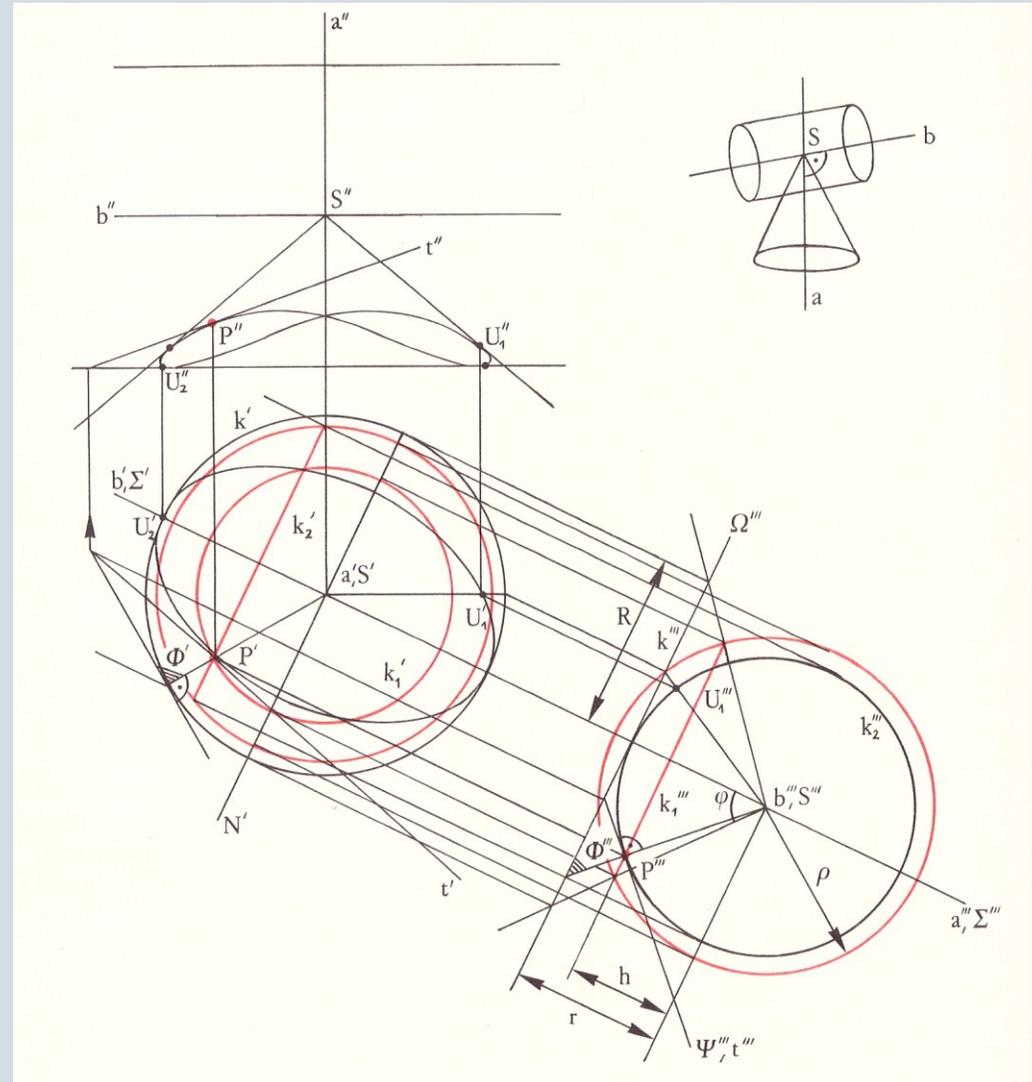


OnShape: P. Lürßen.
Volumenmodell.

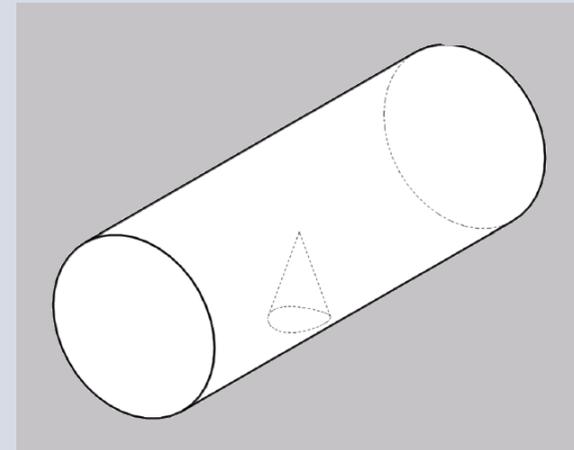
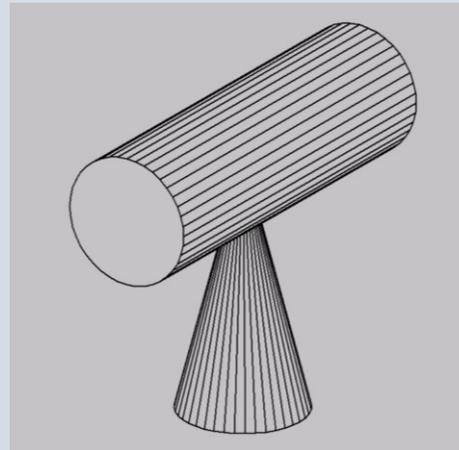
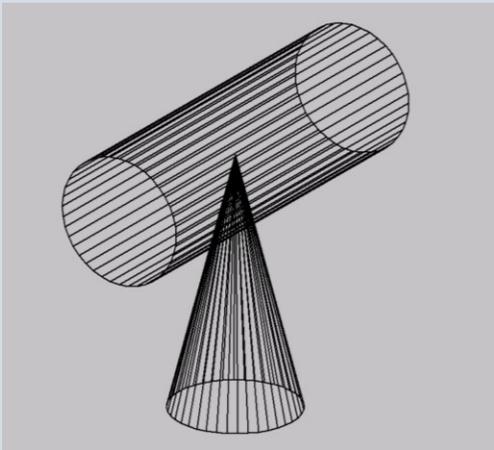
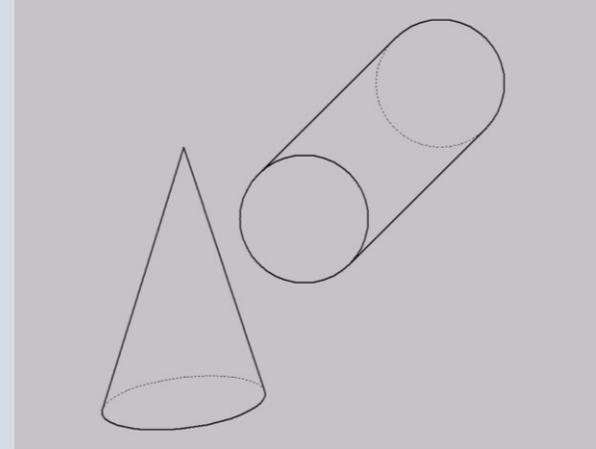
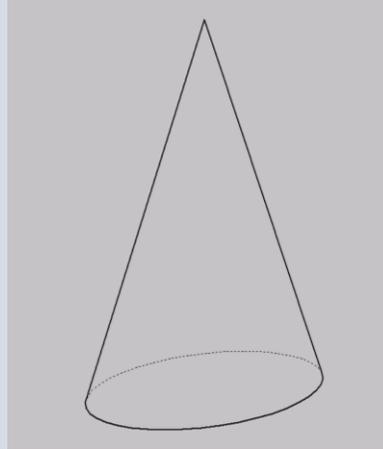
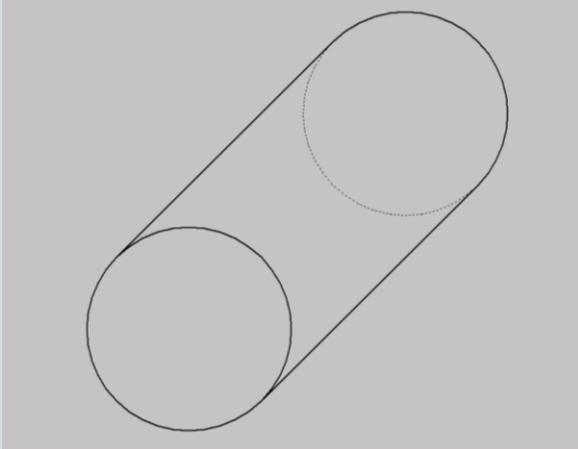
3.5 Exkurs: Durchdringung von Zylinder und Kegel, traditionell

Darstellende Geometrie

(Stärk 1978, S. 144)



3.6 Exkurs: Durchdringung von Zylinder und Kegel, digital



Konstruktion mit GAM: R. Sträßer

4.1 Vom Raum in die Ebene

Aufgabe: Dreidimensionale Objekte in der Ebene darstellen: Bild/ Bildschirm, Zeichnung, Foto.



Projektionen wie

- Kavalierprojektion, Militärprojektion (schräge Parallelprojektion),
- Isometrie, Dimetrie (orthogonale Parallelprojektion),
- Zentralprojektion (einäugiges Sehen).

4.2 Vom Raum in die Ebene

Ebene Bilder können räumlich verstanden und gesehen werden.
Das muss gelernt werden:



Tücke des Objekts: ‚Unmögliche‘ Figuren:



4.3 Verschiedene perspektivische Ansichten

In der Darstellenden Geometrie muss eine Konstruktion wiederholt werden, wenn ein räumliches Objekt mit einer neuen Projektion in einem ebenen Bild dargestellt werden soll.

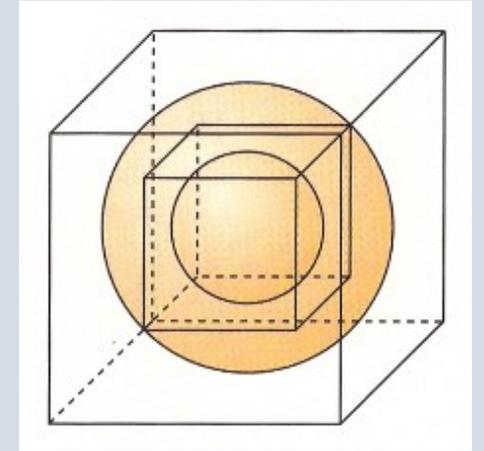
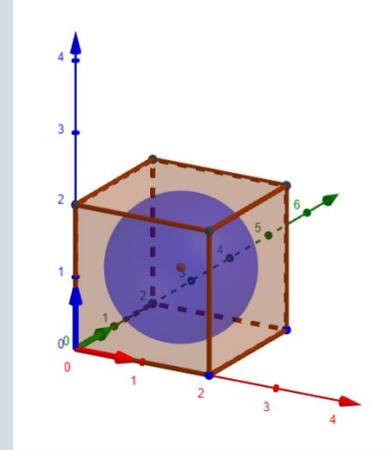
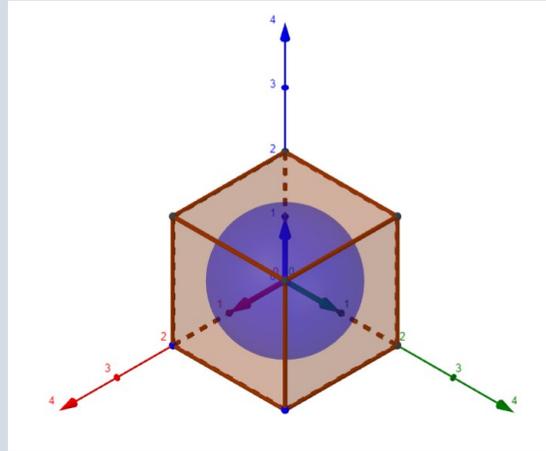
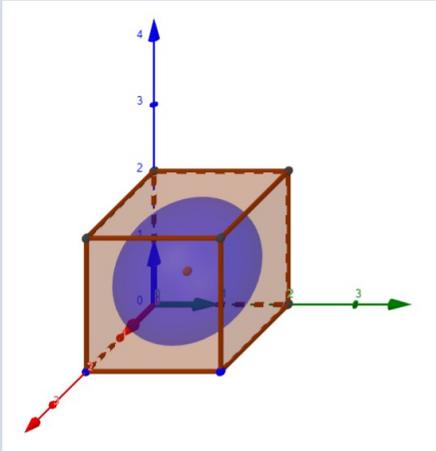
Bei 3D-DGS und 3D-CAD haben wir ein internes virtuelles Modell (Figur), das dann wahlweise in unterschiedlichen Projektionen dargestellt werden kann (Zeichnung), auch wenn dies ggf. softwarespezifisch unterschiedlich realisiert wird.

Projektion: Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Zentralprojektion, orthogonale Parallelprojektion, schräge Parallelprojektion.

Perspektive: mit einer Projektion erzeugtes Bild.

4.4 Verschiedene Perspektiven (mit GeoGebra)

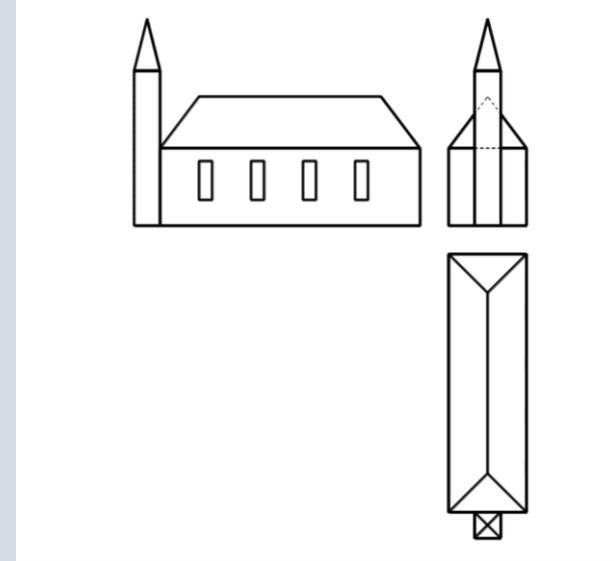
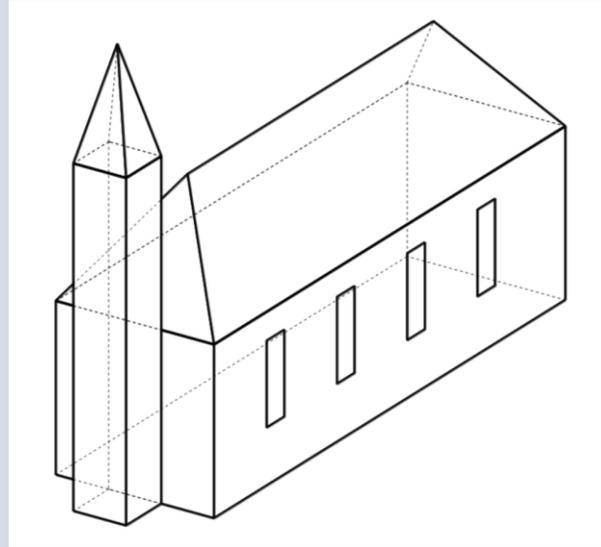
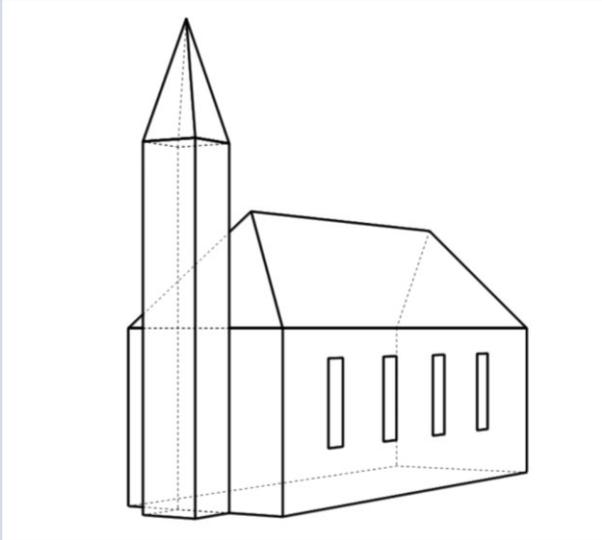


Würfel und Inkugel mit GeoGebra 3D:
Kavalierprojektion, Isometrie, GeoGebra-Projektion.

Schulbuch-Grafik.
Projektion?

Dank an Hans Walser!

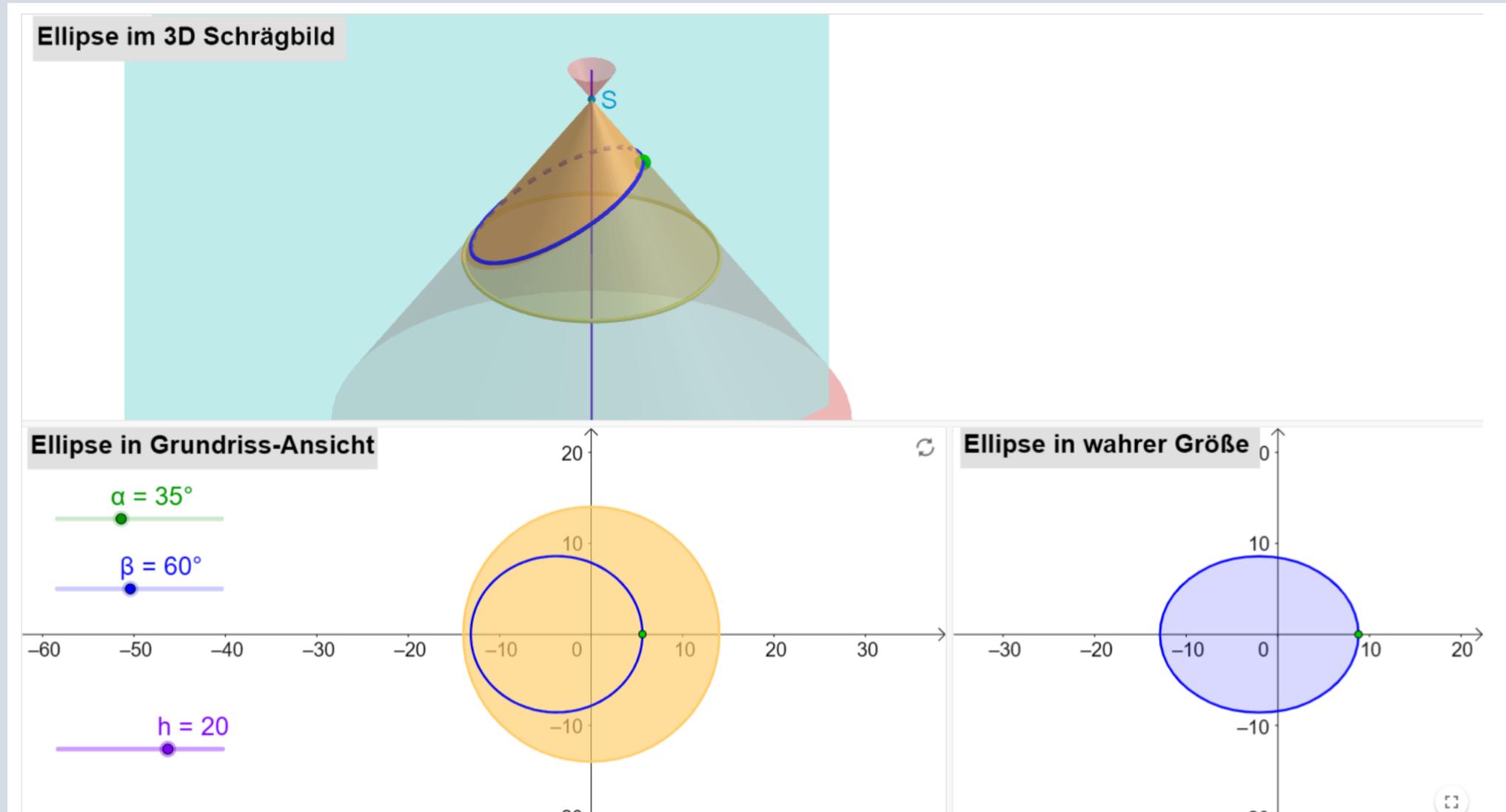
4.5 Verschiedene Perspektiven (mit GAM)



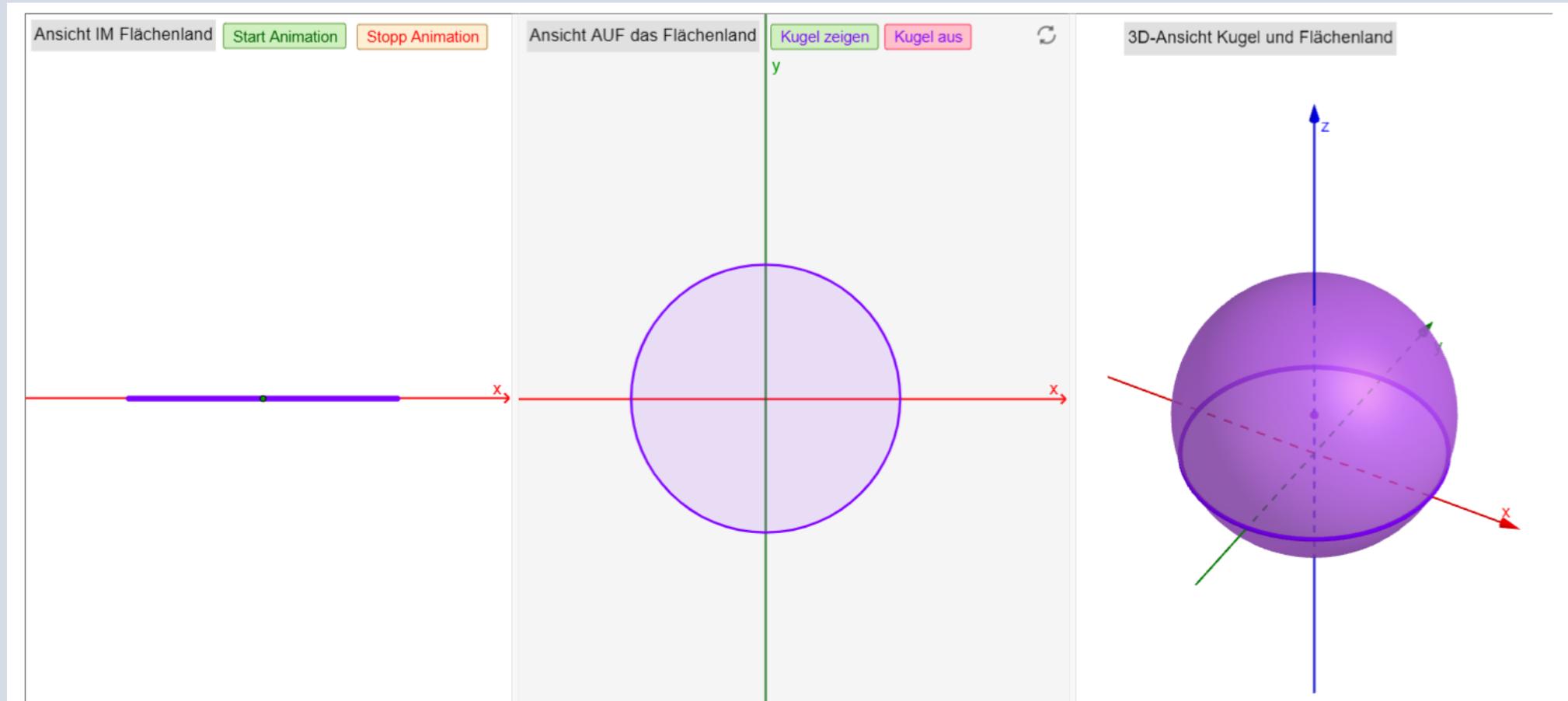
Kirche in Zentralprojektion, Isometrie, Dreitafel-Ansicht.

Konstruktion mit GAM nach CAD-Art : R. Sträßer

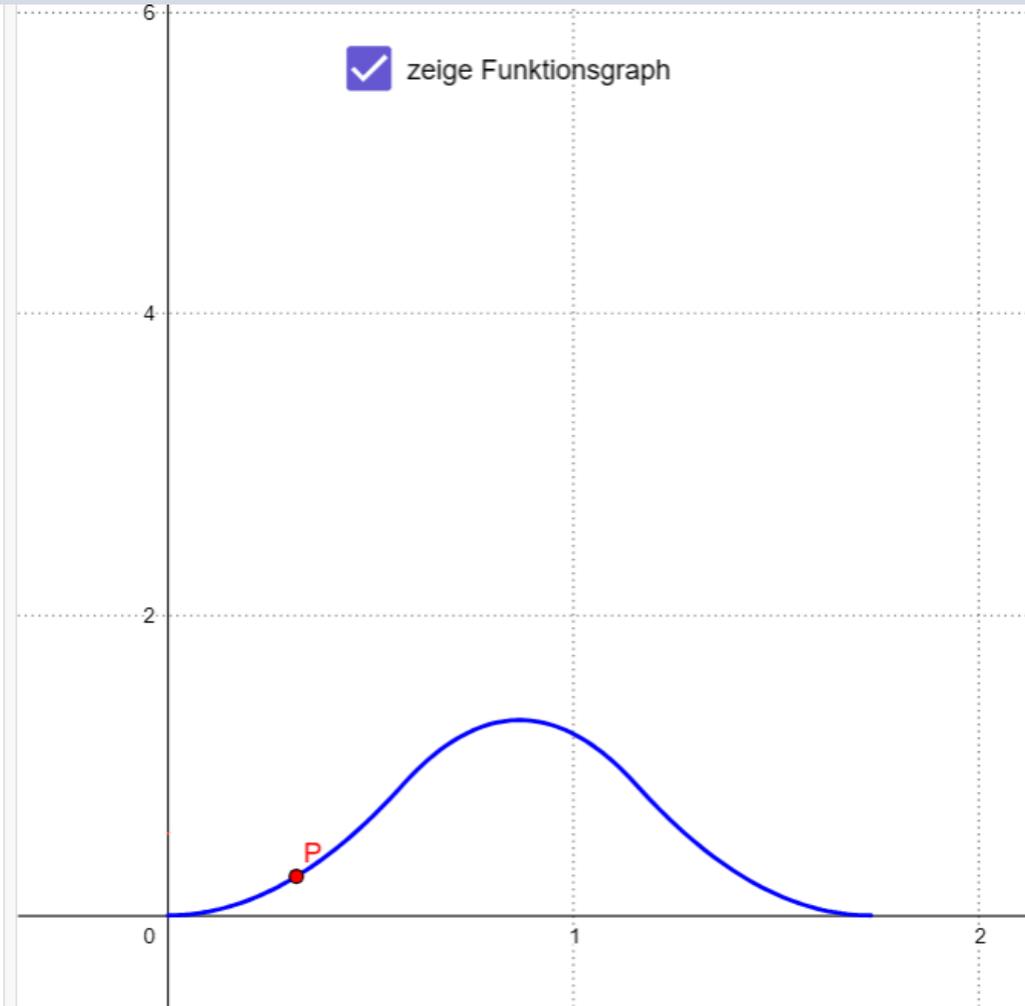
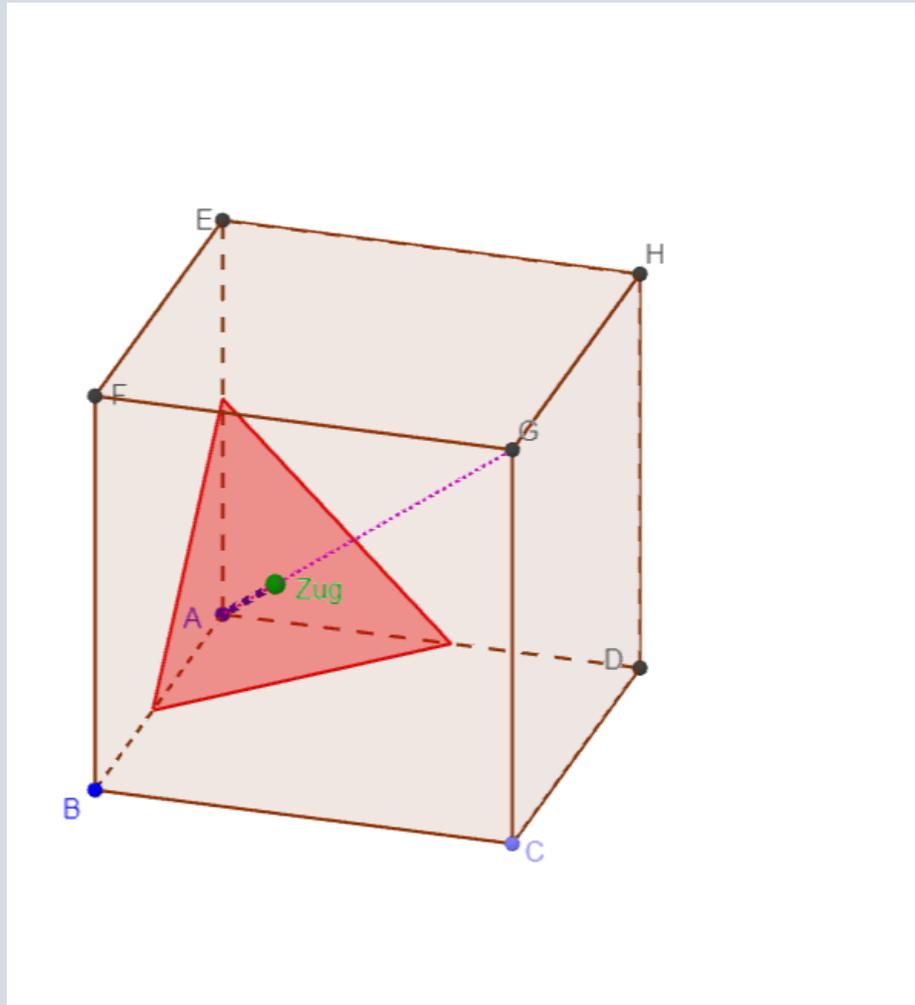
4.6 Vom Raum in die Ebene: Kegel-Schnitt (Eyerlini von Dürer)



4.7 Exkurs: Vom Raum in die Ebene: Kugel-Schnitte, Flatland



4.8 Exkurs: Vom Raum in die Ebene + Funktionen: Würfel-Schnitte



5.1 Figur, Zeichnung und Modell in der Raumgeometrie

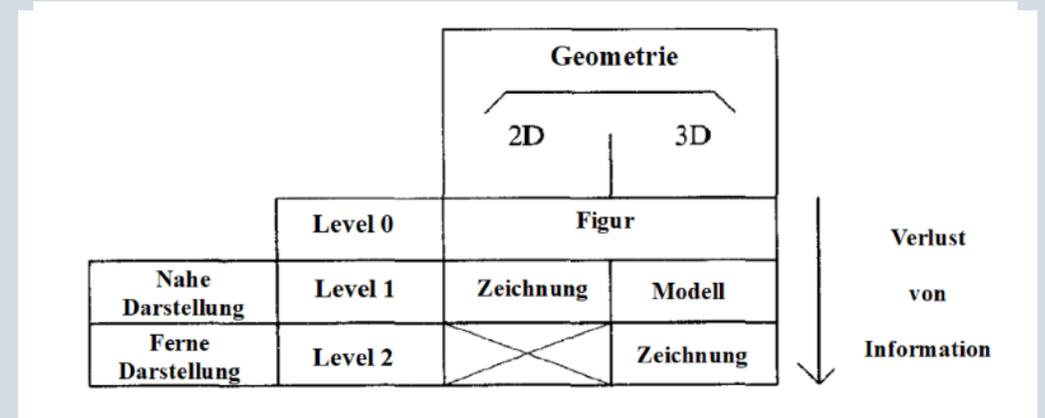
3D-DGS & 3D-CAD:

Bisher: Erschließung des Raumes durch Produzieren von „Modellen“ oder durch komplexe Verfahren von Darstellender Geometrie und Technischem Zeichnen, um dreidimensionale Objekte auf dem Zeichenblatt zu konstruieren.

Also: Unterscheidung von „Zeichnung“ und „Modell“.

Heutzutage: digitale Werkzeuge können beide Aspekte miteinander verbinden sie arbeiten intern mit einem virtuellen dreidimensionalen Modell, das sie automatisiert in eine Zeichnung auf dem Bildschirm übersetzen.

Der 3D-Druck baut nun eine Brücke, indem er aus dem digitalen virtuellen Modell ein statisches dreidimensionales Modell erzeugt.



Parzysz (1988), S. 80; Elschenbroich & Sträßer, 2024, S. 5

5.2 Einsatz digitaler Werkzeuge

- 2D-DGS: Zugmodus, Ortslinien, Makros. Punktbasiert. Dynamik!
- 3D-DGS: ebenfalls. Aber **zweigeteilter** Zugmodus.
Und je nach Software sehr eingeschränkte boolesche Operationen.
- 3D-CAD: Mächtige und komfortable boolesche Operationen.
Aber keine Dynamik für Zugmodus und Ortslinien.
- 3D-Druck (STL-Export) sowohl mit 3D-DGS als auch mit 3D-CAD möglich.

5.3 Software-Typen für die Raumgeometrie

- **3D-DGS** (wie *Cabri-3D* oder *GeoGebra*): Fortentwicklungen von 2D-DGS. Zeichnen und Konstruieren erfolgt in der Ebene. Objekte werden ausgehend von **Punkten** konstruiert und können durch Ziehen an diesen Punkten dynamisch variiert werden. Mächtige boolesche Operationen sind leider (in GeoGebra) nicht verfügbar. Je nach Software und Konstruktion Flächen- oder Volumen-Modelle.
- **3D-CAD** Varianten von professioneller Software zum technischen Zeichnen (wie *Tinkercad*, *Fusion 360*, *OnShape*). Mehr didaktisch: *GAM*. Objekte werden ausgehend von einem Katalog von **Grundkörpern** konstruiert. Bearbeitung durch Schnitte mit Ebenen und boolesche Operationen wie Vereinigung und Durchschnitt mit weiteren Objekten. Schnelle Ergebnisse, aber nur statische Modelle. Volumen-Modell.

6.1 Drucken mit dem 3D-Drucker

Alle gängigen 3D-DGS und 3D-CAD haben die Möglichkeit, das interne virtuelle Modell in eine **STL**-Datei zu exportieren und ein Modell mit einem 3D-Drucker zu produzieren. Dabei wird eine Oberfläche in (viele kleine) Dreiecke zerlegt.

STL: Standard Triangulation Language.

Aus der STL Datei wird dann mit dem **Slicer** die Steuerung des 3D Druckers für den schichtweisen Druck erzeugt.

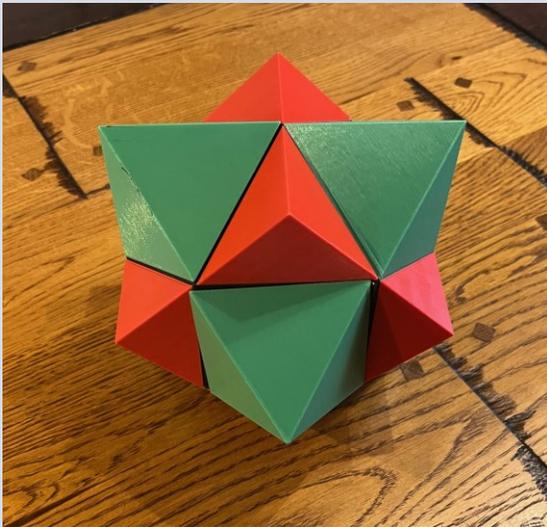
Damit kann man aus dem Unterricht eigene mathematische Modelle produzieren!

Hinweis: Das ist dann technisch/ handwerklich nicht ganz so einfach, wie es sich hier anhört. Man sollte schon einen Experten an der Schule haben ...

Es gibt auch Firmen im Internet, die zu einer eingesandten STL Datei dann 3D Objekte in professioneller Qualität drucken.

6.2 Modelle mit 3D Druck produzieren I (Kuboktaeder)

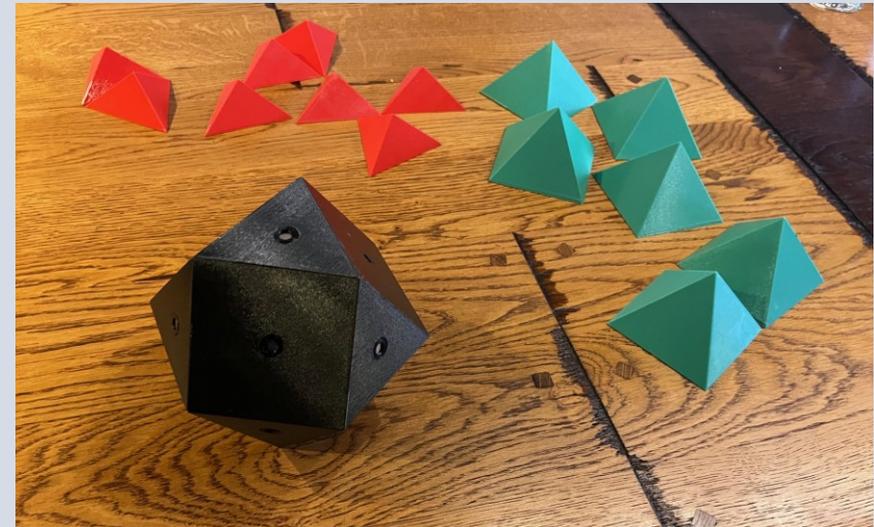
Beispiel Oktaeder, Hexaeder (Würfel), Kuboktaeder und abgeschnittene Pyramiden



Durchdringungskörper
(Vereinigung)



Oktaeder



Inneres Kuboktaeder (Durchschnitt)
und abgeschnittene Pyramiden

3D-Druck: R. Hrach. Foto: H.-J. Elschenbroich

6.3 Modelle mit 3D Druck produzieren II (Reuleaux & Meissner Tetraeder)

Bekannt in 2D: Reuleaux- Dreieck, Fläche konstanter Breite.

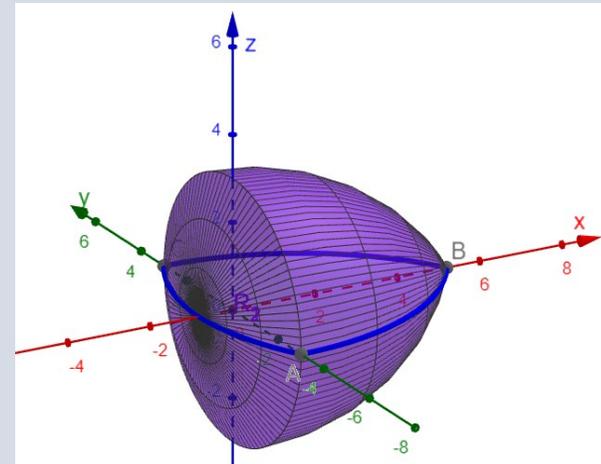
3D-Analogon: Reuleaux-Tetraeder, mit ‚scharfen‘ Kanten und ‚spitzen‘ Ecken.

Das ist aber **kein** Gleichdick (<https://de.wikipedia.org/wiki/Reuleaux-Tetraeder>).

Das Meissner-Tetraeder ist ein Gleichdick. An drei Kanten ‚abgerundetes‘ Reuleaux-Tetraeder. Jede ‚abgerundete‘ Kante liegt gegenüber einer ‚scharfen‘ Kante. Aus dem Reuleaux-Dreieck kann man dann auch noch einen Rotationskörper erzeugen.

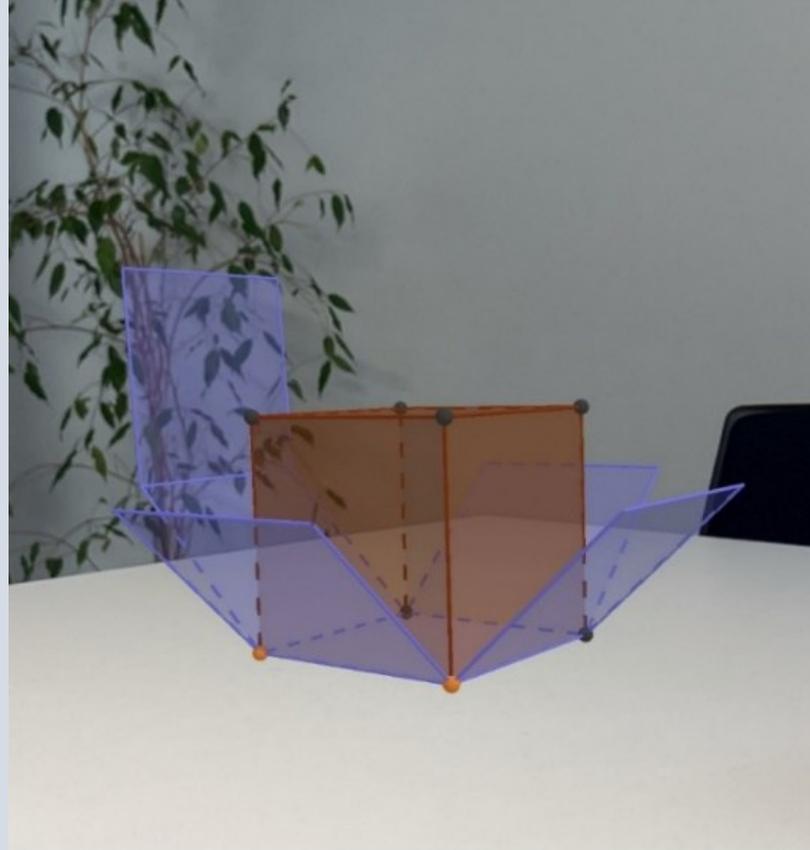


Reuleaux-Tetraeder Meissner Tetraeder



Reuleaux-Rotationskörper

7 Ausblick



Augmented Reality: Virtueller Würfel mit Netz im realen Klassenraum. GeoGebra Team

7 Ausblick

Einsatz von 3D-CAD und 3D-DGS:

Chance zur **Wiederbelebung**, zur **Re-Geometrisierung der Raumgeometrie** auch in den allgemeinbildenden Schulen.

Dies wird nur mit Software-Nutzung gelingen!

Entwicklung der Eingabemedien: Datenhandschuh, VR-Brille, ...

Neue Chancen:

- (1) Verbindung von Zeichnung und Modell in der Raumgeometrie-Software.
- (2) Einfache Herstellung von Modellen durch 3D-Druck, auch für Nicht-Profis
- (3) Absehbar: Verbindung von analoger und virtueller Welt, AR und VR.

*Danke für Ihre
Aufmerksamkeit !*

Kontakt

Hans-Jürgen Elschenbroich: elschenbroich@t-online.de

Rudolf Sträßer: rstraess@uni-muenster.de

Literatur

- Bender, R., Hattermann, M., & Sträßer, R. (2021). Konstruieren im Raum – plötzlich alles anders? *mathematik lehren*, 228, 14-18.
- Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024). Einleitung. *Der Mathematikunterricht*, 70(2), 2.
- Elschenbroich, H.-J., & Sträßer, R. (2024a). RAUM-Geometrie mit digitalen Werkzeugen. *Der Mathematikunterricht*, 70(2), 3-15.
- Engel, E. (1929): Raumlehre. 3. Auflage. Verlag Julius Beltz in Langensalza
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Stuttgart: Ernst Klett.
- Gutzmer, A. (1908): Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. B. G. Teubner
- Hattermann, M., Kadunz, G., Rezat, S., & Sträßer, R. (2015/2023). Geometrie: Raum und Form. In Bruder, R. u.a. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 185-219, 2. Aufl. 201-242). Berlin Heidelberg: Springer Spektrum.
- Mick, S. u.a. (o. J.). Arbeitsunterlagen zu einem kompetenzorientierten Unterricht aus Geometrischem Zeichnen. URL:https://raumgeometrie.schule.at/fileadmin/DAM/Gegenstandsportale/Raumgeometrie/Dateien/wg/Handreichung_GZ_Kompetenzen_2013_06_18.pdf
- Sträßer, R. & Elschenbroich, H.-J. (2025): Handeln im Dreidimensionalen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2025. WTM Verlag
- Sträßer, R. & Elschenbroich, H.-J. (2025): Minisymposium 14: RAUMgeometrie mit digitalen Werkzeugen. Erscheint in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2025. WTM Verlag

