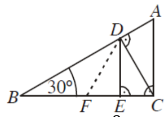
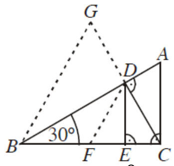
RLV 2017.
Geometriai feladatok
megoldások

1. I. megoldás:



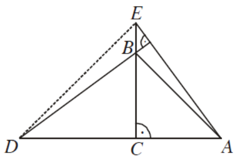
A BCD derékszögű háromszögben BCD szög = 60^0, tehát a CDE háromszögben CDE szög = 30^0. A CDE háromszöget az ED befogójára tükrözve a kapott CDF háromszög szabályos, ezért FC=FD=CD=7 cm, és így FE = 3,5 cm. A BED háromszögben BDE szög = 60^0, és az EDF háromszögben EDF szög = 30^0, ezért az EDB szög = 30^0. Így a BFD háromszög egyenlő szárú, ezért BF = FD = 7 cm. Tehát BE = BF + FE = 10,5 cm.

II. megoldás:



A BCD derékszögű háromszögben BCD szög = 60^0. Tükrözzük a BCD háromszöget a BD befogójára. A kapott BCG háromszög szabályos, ezért BC = CG = 2 CD = 14 cm. A CDE félszabályos háromszög, így EC = 3,5 cm. Tehát BE = BC – EC = 10,5 cm.

2. Készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát:



Az AED háromszögben BD és BC szakaszok egyenesei magasságvonalak, így B az AED háromszög magasságpontja. Így AB egyenese merőleges ED-re. Mivel CA = CB, és az ABC háromszög derékszögű, így CAB szög = 45^0. Mivel AB merőleges DE-re, így az ADE szög is 45^0. A DEC derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 45^0, így egyenlő szárú. Tehát CD = CE.

3. Húzzunk párhuzamosokat az „A” pontból az „x” és az „y” – tengelyekkel, a „B” pontból az „x” a „C” pontból az „y” – tengellyel, így egy ADEF téglalapot kapunk. Mivel $C \in x$ – tengely, ezért a második koordinátája nulla. Legyen az első koordinátája „c”, és tegyük fel, hogy $c > 0$. AD = c + 3, CD = 1, DE = 7, EB = c – 3, BF = 6, AF = 8 egység hosszú. A DAC, DEB, BAF és BAC háromszögekben felírva a Pitagorasz tételt:
$(c + 3)^2 + 1^2 = AC^2$; $(c – 3)^2 + 7^2 = BC^2$; $6^2 + 8^2 = AB^2$ és $AC^2 + BC^2 = AB^2$.
Az utolsóba behelyettesítve az első hármat kapjuk: $(c + 3)^2 + 1 + (c – 3)^2 + 49 = 100$.
Felbontva a zárójeleket és összevonva kapjuk, hogy: $2c^2 + 68 = 100$, amiből c = - 4 vagy c = 4 adódik. A c = - 4 is megoldása lesz a feladatnak.
Tehát a keresett pontok: C_1 (- 4; 0) és C_2 (4; 0).

4. Legyen D a kisebbik AC íven lévő metszéspont. ABC háromszög szabályos, így minden szöge 60 fokos. DB szögfelező, így DBC szög = 30^0. BE=BC miatt BEC szög = BCE szög. DBC szög a BEC háromszög külső szöge, így BCE szög = 15^0. ACE szög = ACB szög + BCE szög = $60^0 + 15^0 = 75^0$. ED a kör átmérője, így Thalesz tétel miatt ECD szög = 90^0. ACD szög = ECD szög – ACE szög = $90^0 – 75^0 = 15^0$.

5. Legyen a magasság talppontja D, az átfogó két szelete pedig x illetve x+1. Az átfogó ekkor 2x+1, amiből a rövidebb befogó a feltétel miatt 2x. Így a rövidebb befogóhoz tartozó kisebb derékszögű háromszög (DBC) átfogója kétszerese az egyik befogónak. Tehát DBC háromszög félszabályos, és CBD szög = 60^0. Így az ABC háromszög is félszabályos amiből következik, hogy a rövidebb befogója fele az átfogónak, azaz 2x + 1 = 4x. Ebből x = 0,5, így a = 2x = 1 (cm), c = 2x + 1 = 2 (cm). ABC háromszögben Pitagorasz tételt alkalmazva: $b = \sqrt{3}$ (cm).

<u>Másképp</u>:

Hasonlósággal is megoldható a feladat.

Az átfogó két szelete legyen x illetve x+1. Az átfogó ekkor 2x+1, amiből a rövidebb befogó a feltétel miatt 2x.

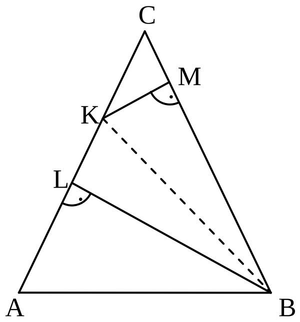
BDC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert szögeik megegyeznek, így $\frac{x}{2x}=\frac{2x}{2x+1}$. Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy x = 0,5.

Innen hasonlóan az előzőhöz kapjuk a háromszög oldalait: 1 cm, $\sqrt{3}$ cm és 2 cm.

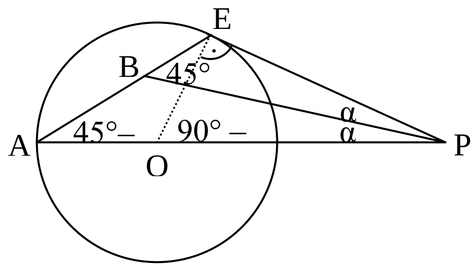
6. Az ABC háromszög belső szögösszege miatt BAC szög = 75^0, így a BAC háromszög egyenlő szárú, azaz AC = BC. Mivel BC = AD, így AC = AD azaz a DAC háromszög is egyenlő szárú. Ebből következik, hogy ACD szög = ADC szög = 65^0. Tehát az ABCD négyszög szögei: 125^0, 75^0, 95^0 és 65^0.

7. Legyen a BAC szög = α, és a BCA szög = γ. A PQC háromszög egyenlő szárú, így QPC szög = γ. BQP = 2γ, mert a QPC háromszög külső szöge. A BPQ háromszög is egyenlő szárú, így PBQ szög = 2γ. A PAB háromszög egyenlő szárú, így APB szög = α és a PBA szög = $180^0 - 2\alpha$. A QBP szög = $90^0 - (180^0 - 2\alpha) = 2\alpha - 90^0$. Így $2\alpha - 90^0 = 2\gamma$, amiből $\alpha = \gamma + 45^0$. Az ABC háromszögben $\alpha + \gamma = 90^0$, így $\alpha = 67{,}5^0$ és $\gamma = 22{,}5^0$.

8. Legyen L a B-ből húzott magasság talppontja! A feltétel szerint BL = BM. $BLK\Delta \cong BMK\Delta$, mert egy oldaluk közös, egy-egy oldaluk hossza egyenlő és a hosszabbik oldalakkal szemben azonos nagyságú szög van. Így $LBK\angle = MBK\angle$, azaz BK az $LBM\angle$ szögfelezője. Legyen $CAB\angle = CBA\angle = \alpha$! Ekkor $ABL\angle = 90° - \alpha$ és $LBC\angle = \alpha - (90° - \alpha) = 2\alpha - 90°$. Innen $LBK\angle = \alpha - 45°$. Tehát $ABK\angle = ABL\angle + LBK\angle = 90° - \alpha + \alpha - 45° = 45°$.

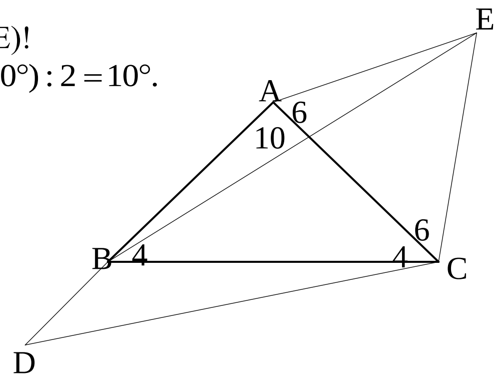


9. Mivel PB szögfelező, ezért jelöljük az APE szög felét α-val! Húzzuk be, az E érintési ponthoz tartozó sugarat, ez merőleges az érintőre. Az OEP derékszögű háromszög O-nál lévő szöge EOP szög = 90° – 2α. Ez a szög az AOE egyenlő szárú háromszög szárszögénél lévő külső szöge, így az alapon fekvő szögek nagysága EAO szög = OEA szög = (90° – 2α) : 2 = 45° – α.



A feladatban keresett szög az ABP háromszög B csúcsánál lévő külső szöge, így ez egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével, vagyis 45° – α + α = 45°.

10. Emeljünk az AC oldalra kifelé szabályos háromszöget (ACE)! $EAC\angle = 60°$, $AB = AE$, ezért $ABE\angle = BEA\angle = (180° - 160°) : 2 = 10°$. Ebből $CEB\angle = 60° - 10° = 50°$. $BCE\angle = 40° + 60° = 100°$. Mivel $AD = BC$, $AC = CE$ és $CAD\angle = BCE\angle$, ezért $ADC\Delta \cong CEB\Delta$. Így $DCA\angle = CEB\angle = 50°$. Ebből következik, hogy $DCB\angle = 50° - 40° = 10°$. $CBD\angle = 180° - ABC\angle = 140°$, $BDC\angle = 180° - 10° - 140° = 30°$. Tehát a BCDΔ szögei: 140^o; 30^o; 10^o.



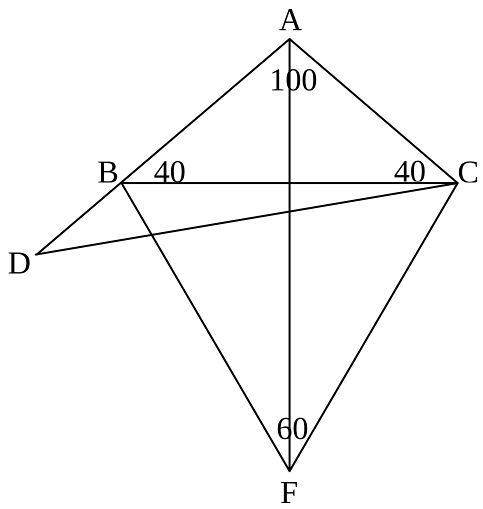
Másképp:

Emeljük a BC oldalra kifelé a szabályos BCF három-szöget!

A keletkező ABFC négyszög egy deltoid, amelynek AF átlója felezi az A-nál és F-nél lévő belső szöget. Így ABC háromszög szögei: FAB szög = 50°, BFA szög = = 30° és ABF szög = 40° + 60° = 100°.

Mivel AB = CA, BF = CB = AD és ABF szög = CAD szög = 100°, ezért $ABF\Delta \cong CAD\Delta$, amiből ADC szög = BFA szög = 30°, DCA szög = FAB szög = 50°.

Tehát a DCBΔ szögei: 30°; 50° – 40° = 10° és 180° – 30° – 10° = 140°.



Másképp:

Legyen AB = AC = b és BC = AD = a!

Másoljuk rá az AD oldalra az ABC háromszöget az ábra szerint!

Ekkor FD = AB = b, AF = CA = b és DA = BC = a.

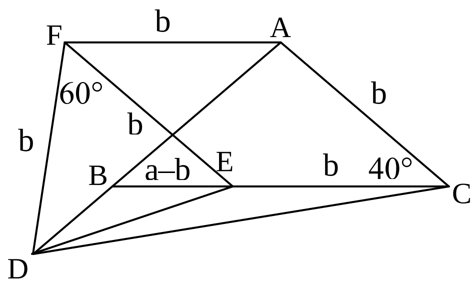
Ebből következik, hogy $DAF\Delta \cong BCA\Delta$.

Így DAF szög = BCA szög = 40° és AFD szög = CAB szög = 180° – 40° – 40° = 100°.

Vegyük fel a BC oldalon azt az E pontot, amelyre EC = AC = b!

Egyrészt DB = BE = a – b, így BDE szög = DEB szög = ABC szög : 2 = 20°.

Másrészt CAF szög = CAB szög + DAF szög = 100° + 40° = 140°, ECA szög = 40° és EC = = CA = AF, ezért ECAF négyszög rombusz. Így FE = b és AFE szög = ECA szög = 40°.



Ezekből FD = FE = b és EFD szög = AFD szög – AFE szög = 100° – 40° = 60°, így FDE háromszög szabályos, amiből következik, hogy DE = b.

Mivel DE = EC = b és DEB szög = 20°, ezért EDC szög = DCE szög = DEB szög : 2 = 10°.

Tehát BDC szög = BDE szög + EDC szög = 20° + 10° = 30°, DCB szög = 10° és CBD szög = = 180° – 30° – 10° = 140°.

Másképp:

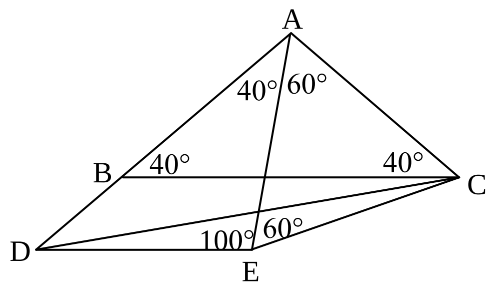
AD = BC, ezért másoljuk fel az AD szakaszra az ABC háromszöggel egybevágó ADE háromszöget.

/Az AE szakasz 40°-os és 60°-os részekre osztja a CAB szöget, így az AEC háromszög szabályos, ezért EC = AE = ED.

Így a DEC háromszög is egyenlő szárú, és mivel

DEC∢=100° + 60° = 160°, ezért alapon fekvő szöge

DCE∢=10°.

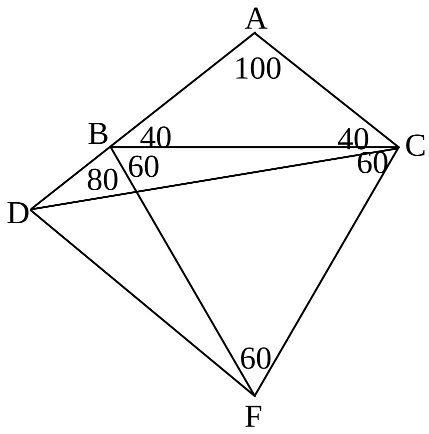


Ebből BCD∢ = ACE∢ – BCA∢ – DCE∢ = 60° – 40° –10° = 10°.

CBD∢=180° – 40° = 140°.

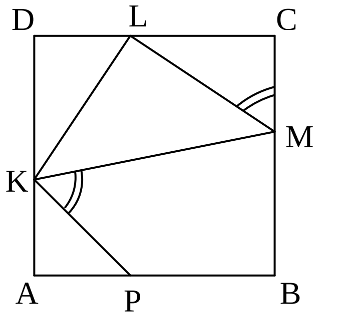
Tehát a BCD háromszög szögei 10°, 140° és 180° – 10° – 140° = 30°.

Másképp:



Emeljünk a BC oldalra kifelé szabályos BCF háromszöget!
Az FCAD négyszög szimmetrikus trapéz, mert AD = BC = = CF és $BAC\angle = ACF\angle = 100°$.
$BDF\angle = ADF\angle = 180° - 100° = 80°$ és $FBD\angle = 180° - ABC\angle - CBF\angle = 80°$, így az FBD egyenlő szárú háromszög.
Ebből következik, hogy $FD = FB = FC$, ami azt jelenti, hogy D, B és C rajta van az F középű FB sugarú körön.
A D-t nem tartalmazó BC ívhez tartozó középponti szög: $BFC\angle = 60°$. $BDC\angle$ ugyanehhez az ívhez tartozó kerületi szög, így felhasználva, hogy nagysága fele a középponti szögnek, 30°-os.
Tehát $BDC\angle = 30°$, $CBD\angle = CBF\angle + FBD\angle = 140°$ és $DCB\angle = 180° - 30° - 140° = 10°$.

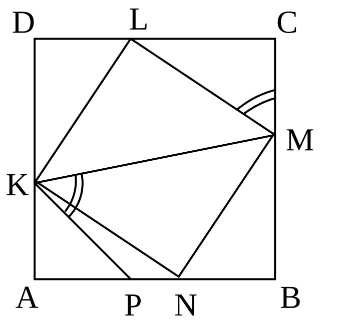
11. Jelöljük az LMC szöget α-val! Ekkor CLM szög = 90° – α.



Kössük össze az L pontot K-val!
Mivel ABCD négyzet és DL = CM = AK, ezért DK = CL,
LD = MC és LDK szög = MCL szög = 90°, így $LDK\Delta \cong MCL\Delta$, amiből következik, hogy KLD szög = α, DKL szög = 90° – α és LK = LM.
Mivel CLM szög = 90° – α és KLD szög = α, ezért MLK szög = = 180° – (90° – α) – α = 90°.
Mivel LK = LM és MLK szög = 90°, ezért KML egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ebből következik, hogy LKM szög = 45°.
A feltétel szerint AK = AP, amiből PKA szög = 45°.
Tehát MKP szög = 180° – DKL szög – LKM szög – PKA szög = 180° – (90° – α) – 45° – 45° = = α, azaz a kétíves szögek egyenlők.
(Az utolsó mondat helyett hivatkozhatunk arra is, hogy MKA szög = KMC szög, mert váltószögek, PKA szög = 45° és KML szög = 45°.)

Másképp:

Jelöljük az LMC szöget α-val! Ekkor CLM szög = 90° – α.
Legyen N az AB oldalnak az a pontja, amelyre NB = AP!
Mivel ABCD négyzet és NB = MC = LD = KA, ezért AN = BM = = CL = DK, valamint NBM szög = MCL szög = LDK szög = KAN szög = 90°, így $NBM\Delta \cong MCL\Delta \cong LDK\Delta \cong KAN\Delta$, amiből kö-vetkezik, hogy NMLK négyszög minden oldala egyenlő, valamint KLD szög = NKA szög = MNB szög = LMC szög = α és DKL szög = ANK szög = BMK szög = CLM szög = 90° – α, azaz min-den szöge 180° – (90° – α) – α = 90°-os, ezért négyzet.



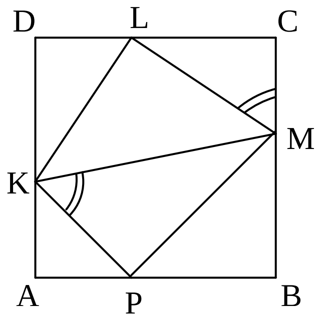
A feltétel szerint AK = AP, amiből PKA szög = 45°. A négyzet átlója felezi a szögét, így MKN szög = 45°.
Tehát MKP szög = MKN szög + NKA szög – PKA szög = 45° + α – 45° = α, azaz a kétíves szögek egyenlők.

Másképp:

Jelöljük az LMC szöget α-val! Ekkor CLM szög = 90° – α.

Kössük össze az L pontot K-val!

Mivel ABCD négyzet, DL = CM = AK, ezért DK = CL, LD = MC LD = MC és LDK szög = MCL szög = 90°, így $LDK\Delta \cong MCL\Delta$, amiből következik, hogy KLD szög = α, DKL szög = 90° – α és LK = LM.



Mivel CLM szög = 90° – α és KLD szög = α, ezért MLK szög = = 180° – (90° – α) – α = 90°.

Mivel LK = LM és MLK szög = 90°, ezért KML egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. Ebből következik, hogy KML szög = 45°.

A feltétel szerint AK = AP, amiből APK szög = 45°.

Kössük össze P pontot M-mel!

Ekkor PBM egyenlő szárú háromszög, ezért BMP szög= MPB szög = 45°.

Így KPM szög = 180° – APK szög – MPB szög = 90° és PMK szög = 180° – LMC szög – KML szög – BMP szög = 180° – α – 45° – 45° = 90° – α.

Tehát MKP szög = 180° – PMK szög – KPM szög = 180° – (90° – α) – 90°= α, azaz a kétíves szögek egyenlők.